现代数学手册

近代数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

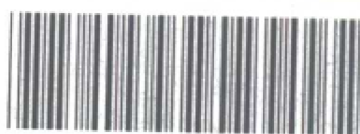
· 华中科技大学出版社 ·

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

近代数学卷

《现代数学手册》编纂委员会



·华中科技大学出版社·
(华中理工大学出版社)
中国·武汉

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入 21 世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征．可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来．

在中国，“科学技术是第一生产力”(邓小平名言)已逐渐成为人们信奉的朴实真理．国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件．但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技．因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言(拿破仑(Napoleon)名言)，自然也是一条不容置疑的客观真理．

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献．具体说来，这部工具性巨著服务的读者(或使用者)对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等．

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性．200 余位撰稿人与审稿人(来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等 40 多所高校与研究所)按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动.我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色.

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为"经典数学卷"、"近代数学卷"、"计算机数学卷"、"随机数学卷"和"经济数学卷".需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题.例如,"蒙特卡罗法"这一篇也可归入"计算机数学卷".

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间.特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱.最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱.

《现代数学手册》编纂委员会

主编　徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇 目 录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

·近代数学卷·

目　录

·近代数学卷·

第1篇

数理逻辑

编　者　吕义忠　顾红芳　朱朝晖
审校者　朱梧槚　肖奚安

目　录

引　言

怎样来回答什么是**数理逻辑**这样一个问题呢？我们为此而查阅了一些辞海、辞典、数理逻辑教材或专著，首先觉得问题的全面回答应涉及数理逻辑的定义、研究对象、研究领域与学科归属等四个方面．当然，其中定义这个方面是最根本的．其次又深感对于数理逻辑这一学科，尚没有一个统一而被一致公认的定义，有的数理逻辑著作中完全不谈这个问题．现经对数理逻辑历史发展中的几个相关侧面的认真研究和分析考察，并综合各家所言之长，我们倾向于采纳如下方式来回答什么是数理逻辑这个问题．

1. 数理逻辑的定义

数理逻辑是用数学方法去研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等逻辑问题的一门学科．

当然，对此也可等价地这样说：数理逻辑是用数学方法研究各种推理中之逻辑问题的一门学问，其中主要包括推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性、计算的能行性等之逻辑问题．

2. 数理逻辑的研究对象

数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象．其中主要包括演绎推理、形式推理、数学推理和各种近现代的非经典推理．

3. 数理逻辑的研究领域

作为数理逻辑之研究领域的历史性确认部分包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等5大块．但作为数理逻辑研究领域之近现代发展部分，还应包括诸如模态逻辑、多值逻辑、非单调逻辑、归纳逻辑、开放逻辑、中介逻辑演算、中介公理集合论等各种各样的非经典逻辑分支．

4. 数理逻辑的学科归属

数理逻辑是逻辑和数学互相交织在一起的一门边缘性学科，或者说，数理逻辑既是一门逻辑化了的数学分科，又是一个数学化了的逻辑分支．

此外，数理逻辑一词，在传统上又有所谓狭义的数理逻辑与广义的数理逻辑之说，其中狭义的数理逻辑指的是两个二值逻辑演算系统，即二值命题逻辑演算系统和谓词逻辑演算系统．而广义的数理逻辑则除了其基础部分，即所说的两个二值逻辑演算系统之外，还应包括传统上的四论，即集合论、模型论、递归论和证明论．然而由上文所论，数理逻辑的研究领域，根据数理逻辑的现代发展，除了逻辑演算和四论这5大块之外，还应包括近现代发展起来的各种非经典逻辑．那么，根据这一观点，再来划分狭义和广义数理逻辑时，我们又应如何界定各种非经典逻辑的归属呢？经研究后认为，各种非经典逻辑中的纯逻辑演算部分应统统纳入狭义的数理逻辑范围，如各种多值逻辑演算、模态逻辑演算、时态逻辑演算，以及中介逻辑演算等等．而广义的数理逻辑，则除了包括经典逻辑演算、各种非经典逻辑演算和传统

意义下的四论之外，还应包括各种非经典逻辑中的非逻辑演算的相关内容，诸如以中介逻辑演算为推理工具的中介公理集合论、中介模型论和中介证明论等等.

1 经典二值逻辑演算

1.1 逻辑演算简述

1.1.1 逻辑演算

逻辑演算是为了研究推理中前提和结论之间的形式关系而构造的形式系统，也是使思维严格化与精确化的一种有规则的符号推演系统.这种系统通常有如下组成部分：

(1)原始符号，如变元、常元、联结符号和分组符号等，也是系统的字母；

(2)形成规则，借此规定什么样的符号串是有意义的，并称为合式公式，又规定什么样的符号串是无意义的，即不是合式公式；

(3)作为推理工具的公理和推理规则.

德国逻辑学家莱布尼兹(Leibniz)初步构造了逻辑演算的体系，英国数学家布尔(Boole)是第一个在逻辑学中应用数学方法成功的人，创立了逻辑代数.弗莱格(Frege)则首先建立了初步自足的命题逻辑演算和一阶谓词演算.

1.1.2 二值逻辑演算

经典的二值逻辑演算分为**命题逻辑演算**和**谓词逻辑演算**.其中命题逻辑演算只研究复合命题的逻辑形式以及复合命题之间的推理关系，其中复合命题是由简单命题经使用命题连接词连接而成的，命题逻辑演算把简单命题作为整体考虑，并不剖析简单命题内部的逻辑形式.但**谓词逻辑演算**则不仅要研究复合命题的逻辑形式和复合命题之间的推理关系，还要分析简单命题的逻辑形式，以及命题、命题函数经使用命题连接词与量词所构成之复合命题的逻辑形式，进而研究这些复合命题之间的推理关系.

1.2 命题逻辑演算的自然推理系统 P^N

下面构造命题逻辑演算的自然推理系统 P^N.

1.2.1 形式语言 La

首先建立形式语言 La，再在 La 之上配以推理工具而构成 P^N.现为建造和描述 La，需要用到元语言变元和元语言常元.在这里，元语言变元有如 A、B、C、A_i、B_i、C_i、Γ、Δ、Γ_i、Δ_i($i=1,2,\cdots$)，其中 A、B、C、A_i、B_i、C_i($i=1,2,\cdots$)的值域是

LaWff 全体所构成的集合，而 Γ、Δ、Γ_i、Δ_i（$i=1,2,\cdots$）的值域是 LaWff 有穷序列全体构成的集合.

在这里，记号 LaWff 是“形式语言 *La* 中之合式公式”的简记. 以后规定

$$\circ\circ\circ\circ\circ\circ \overset{\text{def}}{=\!=} \triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$$

表示◦◦◦◦◦◦就是△△△△△△，即◦◦◦◦◦◦被定义为△△△△△△，例如，“合式公式”简记为 Wff，于是即为

$$\text{Wff} \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“合式公式”},$$

又如我们有

$$\text{LaWff} \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“形式语言 } La \text{ 中之合式公式”}.$$

为今后行文简洁起见，令

$$\cdots \Rightarrow \circ\circ\circ \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“如果}\cdots\text{，则}\circ\circ\circ\text{，”}.$$

$$\cdots \Leftrightarrow \circ\circ\circ \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“}\cdots\text{当且仅当}\circ\circ\circ\text{”}.$$

如所知，形式语言应由它的基本符号（即原始符号库）和 Wff 的形成规则构成. 在这里，*La* 的基本符号为

$$\neg\ ,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,(\,,\,),\,',$$

$$p,q,r,p_i,q_i,r_i(i=1,2,\cdots),$$

其中$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$是 *La* 的 5 个命题联结词. 它们的名称依次为：否定词、合取词、析取词、蕴涵词和等值词. 又依次解释并读为：“非”、“且”、“或”、“如果…，则…”、“当且仅当”. 又（，），’依次为左括号、右括号、逗号，它们是一些技术符号. 此外，p,q,r,p_i,q_i,r_i（$i=1,2,\cdots$）是命题符号，这是用以表示命题的符号，其个数是无穷多个.

此处还应注意：$\Rightarrow$与$\Leftrightarrow$是相关自然语言的缩写，因而是元语言符号，不能与 *La* 中的形式符号$\rightarrow$与$\leftrightarrow$混淆.

一个命题的真或假称为命题的真假值，也简称为命题的真值. 通常以 t 和 f（或 T 和 F）分别表示命题的真值或假值. 在二值逻辑中，任一命题只有 t 或 f 这两个可能的值. 因此，命题联结词$\neg$ 是由$\{T,F\}$到$\{T,F\}$的一元映射，而其余四个联结词、$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$都是由$\{T,F\}^2$ 到$\{T,F\}$的二元映射. 它们的具体映射值可由如下的真值表体现出来.

p	$\neg p$
t	f
f	t

$p \wedge q$ (p \ q)	t	f
t	t	f
f	f	f

$p \vee q$ (p \ q)	t	f
t	t	t
f	t	f

$p \rightarrow q$ (p \ q)	t	f
t	t	f
f	t	t

$p \leftrightarrow q$ (p \ q)	t	f
t	t	f
f	f	t

因而这些命题联结词又称为真值函数.

定义 1　任何一个 *La* 的基本符号之有穷序列,叫做 *La* 的一个公式.

在 *La* 中,也要区分合乎语法的公式和不合乎语法的公式,即所谓 Wff 与非 Wff,LaWff 是由 *La* 的形成规则来定义的. *La* 的形成规则有如下 6 条:

Rf1　单独一个命题符号是 LaWff;

Rf2　A 是 LaWff$\Rightarrow\neg A$ 是 LaWff;

Rf3　A,B 均为 LaWff$\Rightarrow(A\rightarrow B)$是 LaWff;

Rf4　A,B 均为 LaWff$\Rightarrow(A\wedge B)$是 LaWff;

Rf5　A,B 均为 LaWff$\Rightarrow(A\vee B)$是 LaWff;

Rf6　A,B 均为 LaWff$\Rightarrow(A\leftrightarrow B)$是 LaWff.

定义 2　形式语言 *La* 的一个公式 A 是 LaWff$\Leftrightarrow A$ 由 *La* 的形成规则生成.

La 关于生成 LaWff 的 6 条形成规则可分为两类:第一类是直接生成一类 LaWff,其中有 Rf1,就是命题符号,也称为原子公式. 而其余的 Rf2～Rf6 归为第二类,它们都是确定一些运算,对已生成之 LaWff 应用其中之运算生成新的 LaWff.

1.2.2　形式推理规则

下面给出 P^N 中配套于 *La* 的推理工具,即如下的 12 条形式推理规则:

Ri1　$A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash A_i(i=1,2,\cdots,n)$;　　$(\in)$

Ri2　$\Gamma\vdash\Delta(\Delta\neq 0)\vdash A\Rightarrow\Gamma\vdash A$;　　(τ)

Ri3　$\vdash A\Rightarrow\Delta\vdash A$;　　(τ_0)

Ri4　$\Gamma,\neg A\vdash B,\neg B\Rightarrow\Gamma\vdash A$;　　$(\neg)$

Ri5　$A\rightarrow B,A\vdash B$,　　$(\rightarrow_-)$

Ri6　$\Gamma,A\vdash B\Rightarrow\Gamma\vdash A\rightarrow B$;　　$(\rightarrow_+)$

Ri7　$A\wedge B\vdash A,B$;　　$(\wedge_-)$

Ri8　$A,B\vdash A\wedge B$;　　$(\wedge_+)$

Ri9　$A\vdash C,B\vdash C\Rightarrow A\vee B\vdash C$;　　$(\vee_-)$

Ri10　$A\vdash A\vee B,B\vee A$;　　$(\vee_+)$

Ri11　$A\leftrightarrow B,A\vdash B$,
　　$A\leftrightarrow B,B\vdash A$;　　$(\leftrightarrow_-)$

Ri12　$\Gamma,A\vdash B,\Gamma,B\vdash A\Rightarrow\Gamma\vdash A\leftrightarrow B$.　　$(\leftrightarrow_+)$

对于上面 12 条形式推理规则,各有一个名称,又从各不相同的侧面反映了演绎推理中之相应的推理思想,现将它们的涵义分述如下.

Ri1 叫做肯定前提律,简记为$(\in)$. 其涵义指,对前提中的每个命题而言,均可作为由整个前提所推出的结论.

Ri2 称为传递律,简记为(τ). 其涵义指,由一定的前提推出一些命题,又由这些命题推出了某个命题,则由原来的前提就可推出该命题.

Ri3 称为增加前提律,简记为(τ_0). 其涵义指,如果在系统内除了作为出发点的原始思想规定(或公理)外,不加任何其它前提就能推出某个命题时,则在加上一些前提的条件下,也能推出该命题.

Ri4 叫做反证律,简记为$(\neg)$. 其涵义指,如果在一定的前提 Γ 之下,再设定 A

假(即设定$\neg A$为真),并由此就能推出互相矛盾的命题(即$B,\neg B$),那么由原来的前提就能推出A为真.反证律反映了演绎推理中之反证法的推理思想.

Ri5叫做蕴涵词消去律,简记为($\rightarrow_-$),其涵义指,由"A蕴涵B",则A可以推出B,这是演绎推理中之假言推理思想的反映.

Ri6称为蕴涵词引入律,简记为($\rightarrow_+$).其涵义指,如果在一定前提下,再设A真,就能推出B,那么由原来的前提就能推出"A蕴涵B".

Ri7叫做合取词消去律,简记为($\wedge_-$).其涵义指,由A且B可推出其中之A,也可推出其中之B.

Ri8叫做合取词引入律,简记为($\wedge_+$).其涵义指,由A为真,同时又设定B为真,那么由此即可推出"A且B"为真.

Ri9称为析取词消去律,简记为($\vee_-$).其涵义指,如果由A能推出C,同时由B也能推出C,则由"A或B"就能推出C.这反映了演绎推理中之分情形证明的推理思想.

Ri10称为析取词引入律,简记为($\vee_+$).其涵义指,由A能推出命题"A或B"和"B或A",其中B为任何命题.

Ri11叫做等值词消去律,简记为($\leftrightarrow_-$).其涵义指,如果A和B是两个等价命题,再加上其中的任何一个命题,就能推出另一个命题.

Ri12叫做等值词引入律,简记为($\leftrightarrow_+$).其涵义指,设A和B是两个命题,如果在一定的前提下,再加上A、B中的任何一个,就能推出另一个,那么由这个前提,就能推出A和B是两个互相等价的命题.

对于P^N中的上述12条形式推理规则,可以分成两类:第一类是直接生成P^N的形式推理关系.因而包括($\in$)、($\wedge_-$)、($\wedge_+$)、($\rightarrow_-$)、($\vee_+$)、($\leftrightarrow_-$)等六条.第二类是确定一些运算,对已生成之某种形式推理关系应用相应的运算时,就能生成新的形式推理关系.因而包括(τ)、(τ_0)、($\neg$)、($\vee_-$)、($\rightarrow_+$)、($\leftrightarrow_+$)等六条.

一个形式系统(逻辑演算)通常由形式语言和推理工具两部分组成.而综上所述,关于P^N的框架结构可用下表概述之:

- P^N
  - 形式语言 La
    - 基本符号:$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、(,)、',$p,q,r,p_i,q_i,r_i(i=1,2,\cdots)$.
    - LaWff的形成规则
      - 第一类:Rf1.
      - 第二类:Rf2—Rf6.
  - 推理工具
    - 第一类:($\in$)、($\wedge_-$)、($\wedge_+$)、($\rightarrow_-$)、($\vee_+$)、($\leftrightarrow_-$).
    - 第二类:(τ)、(τ_0)、($\neg$)、($\vee_-$)、($\rightarrow_+$)、($\leftrightarrow_+$).

1.2.3 形式推理关系

根据P^N中的形式推理规则,可以一步一步地生成P^N的形式推理关系.逻辑演算中的形式推理关系也叫做形式定理.此外,仅由P^N的12条形式推理规则,还不足以说明Γ与A之间,在P^N中不存在形式推理关系,因而还要引入如下的定义.

定义3 $\Gamma\vdash A$是P^N中之形式推理关系$\Leftrightarrow\Gamma\vdash A$能由$P^N$中之形式推理规则生

成.

一个逻辑演算中之形式定理是无穷无尽的.在这里,只列出10条重要的形式定理为例.

定理1 $A \vdash A$(同一律).

定理2 $A \to B, B \to C \vdash A \to C$(蕴涵词传递律).

定理3 $\Gamma, A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$(归谬律).

定理4 $\Gamma, A \vdash C$ 且 $\Gamma, B \vdash C \Rightarrow \Gamma, A \vee B \vdash C$.

定理5 $A \wedge B \dashv\vdash \neg(A \to \neg B)$.

定理6 $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$(无矛盾律).

定理7 $A \vee B \dashv\vdash \neg A \to B$.

定理8 $\vdash A \vee \neg A$(排中律).

定理9 $A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$.

定理10 $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$(等值词传递律).

1.3 谓词逻辑演算的自然推理系统 F^N

下面构造谓词逻辑演算的自然推理系统 F^N,首先要给出配套于 F^N 的形式语言,记为 *Le*,再在 *Le* 之上配以推理工具而构成 F^N.

1.3.1 形式语言 *Le*

$$\text{LeWff} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \text{“形式语言 } Le \text{ 中之合式公式”}.$$

另外,还要类似于前文引入元语言变元,只是分别将它们的值域扩充到 LeWff 全体构成之集合和 LeWff 有穷序列全体所构成的集合等等.

形式语言 *Le* 的符号库包括如下基本符号.首先是保留形式语言 *La* 的全部基本符号,其次还要添加下述几类基本符号.

(1)量词:$\forall$,$\exists$.

(2)个体词:$a, b, c, a_i, b_i, c_i (i = 1,2,\cdots)$.

(3)谓词:$F, G, H, F_i, G_i, H_i (i = 1,2,\cdots)$.

(4)约束变元:$X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i (i = 1,2,\cdots)$.

(5)技术符号:[,].

其中谓词就是形式语言中用以指称论域中之个体的性质,或者个体与个体之间的关系的形式符号.而个体词则是指称那些论域中之元素或某个理论的研究对象.量词 $\forall$ 叫做全称量词,解释并读为“所有”,$\exists$ 叫做存在量词,解释并读为“有些”.因此,表达式 $\forall XF(X)$ 读为“所有的 X 均使得 $F(X)$ 成立”,而表达式 $\exists XF(X)$ 读为“有些 X 使得 $F(X)$ 成立”.在这里,特称跟在量词符号 $\forall$ 或 $\exists$ 后面的 X 为量词的作用变元,$F(X)$ 叫做相应于其前面的量词的作用域,而作用域中的那个 X,叫做被相应的量词后面的同名作用变元所约束的约束变元.作用变元与作用域中的那个被约束的变元,又合起来统称为约束变元.又在作用域中,若还有不同于约束变元的

其它变元(例如个体词 $a,b,\cdots$等)出现,由于它们不被量词后面的作用变元所约束,故而叫做自由变元.显然,Le 的符号库是 La 的符号库的真扩张.

定义 4 任何一个 Le 的基本符号之有穷序列,叫做 Le 的一个公式.

1.3.2 Le 的形成规则

当然,LeWff 是由 Le 的形成规则来定义的. Le 的形成规则有如下 9 条:

Rf1 单独一个命题符号是 LeWff;

Rf2 任一 $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是 LeWff;

Rf3 A 是 LeWff$\Rightarrow\neg A$ 是 LeWff;

Rf4 A,B 均为 LeWff$\Rightarrow(A\rightarrow B)$是 LeWff;

Rf5 A,B 均为 LeWff$\Rightarrow(A\wedge B)$是 LeWff;

Rf6 A,B 均为 LeWff$\Rightarrow(A\vee B)$是 LeWff;

Rf7 A,B 均为 LeWff$\Rightarrow(A\leftrightarrow B)$是 LeWff;

Rf8 $A(a)$是 LeWff、a 在其中出现,X 不在其中出现$\Rightarrow\forall XA(X)$是 LeWff;

Rf9 $A(a)$是 LeWff,a 在其中出现,X 不在其中出现$\Rightarrow\exists XA(X)$是 LeWff.

定义 5 形式语言 Le 的一个公式是 LeWff$\Leftrightarrow A$ 由 Le 的形成规则生成.

1.3.3 形式推理规则

F^N 中配套于 Le 的推理工具是 16 条形式推理规则,其中 Ri1 ~ Ri12 这 12 条形式推理规则就是 P^N 中之 12 条形式推理规则移用过来的,其余 4 条分述如下:

Ri13 $\forall XA(X)\vdash A(a)$; $(\forall_-)$

Ri14 $\Gamma\vdash A(a)$,a 不在 Γ 中出现,$\Rightarrow\Gamma\vdash\forall XA(X)$; $(\forall_+)$

Ri15 $A(a)\vdash B$,a 不在 B 中出现,$\Rightarrow\exists XA(X)\vdash B$; $(\exists_-)$

Ri16 $A(a)\vdash\exists XA(X)$,$A(X)$是由 $A(a)$中 a 的部分出现替换为 X 而得 $(\exists_+)$

Ri13 叫做全称量词消去律,记为$(\forall_-)$.其涵义无非是指演绎推理中的这样一种推理思想:即若某学科之论域中的一切个体皆具有某个性质时,则可在该论域中任取一个个体出来,该个体必具有该性质.

Ri14 叫做全称量词引入律,记为$(\forall_+)$.其涵义是指演绎推理中之如下的推理思想:即若在某学科论域中任选个体 a,总能在某种前提下推出 a 具有性质 $\mathscr{A}$ 的话,则在同样的前提下,可推出论域中一切个体都具有性质 $\mathscr{A}$.此处又为强调对论域内个体的选取完全任意而不受任何约束,特别不受那个推出它有性质 $\mathscr{A}$ 的前提的约束,故在$(\forall_+)$中明确规定“a 不在 Γ 中出现”.

Ri15 叫做存在量词消去律,记为$(\exists_-)$.其涵义是指演绎推理中如下的推理思想:若某学科之论域中任选的个体 a,只要 a 具有性质 $\mathscr{A}$,就能推出结论 φ,那么在肯定论域中存在着具有性质 $\mathscr{A}$ 的个体情况下,就必能推出结论 φ.又由于强调个体 a 之选取的完全任意性,特别不受欲推之结论 φ 的约束,从而在$(\exists_-)$中规定 a 不在 B 中出现.

Ri16 叫做存在量词引入律,记为$(\exists_+)$,其涵义体现演绎推理中的下述推理思想:若已知论域中之个体 a 具有性质 $\mathscr{A}$,那么即可结论论域中存在着具有性质 $\mathscr{A}$

的个体.此外,在这里既不要求用 X 取代 $A(a)$ 中 a 的所有出现,但也不排斥用 X 取代 a 在 $A(a)$ 中的所有出现.

还应指出:如上关于量词的推理规则($\forall_-$)、($\forall_+$)、($\exists_-$)、($\exists_+$)还可推广到多个量词的形式.

对于 Le 中的9条形成规则和 F^N 的16条形式推理规则,类同于 La 与 P^N 中的讨论,也都可分为两类.而关于 F^N 的框架结构可用下表概述之.

F^N
- 形式语言 Le
  - 基本符号:$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,), ,, [,]$,
    $p, q, r, p_i, q_i, r_i, F, G, H, F_i, G_i,$
    $H_i, a, b, c, a_i, b_i, c_i, X, Y, Z, X_i,$
    $Y_i, Z_i (i = 1, 2, \cdots)$.
  - LeWff 的形成规则
    - 第一类:Rf1, Rf2.
    - 第二类:Rf3 ~ Rf9.
- 推理工具
  - 第一类:$(\in), (\wedge_-), (\wedge_+), (\rightarrow_-), (\vee_+), (\leftrightarrow_-), (\forall_-), (\exists_+)$.
  - 第二类:$(\tau), (\tau_0), (\neg), (\vee_-), (\rightarrow_+), (\leftrightarrow_+), (\forall_+), (\exists_-)$.

因为 Le 和 F^N 分别是 La 和 P^N 的扩充,故有

$$A \text{ 是 LaWff} \Rightarrow A \text{ 是 LeWff},$$
$$(\Gamma \vdash A) \in P^N \Rightarrow (\Gamma \vdash A) \in F^N.$$

此外,规定

$$a \underset{\triangledown}{\in} \Gamma \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“}a \text{ 不在 } \Gamma \text{ 中出现”},$$

$$a \underset{\triangledown}{\in} B \overset{\text{def}}{=\!=} \text{“}a \text{ 不在 } B \text{ 中出现”}.$$

1.3.4　形式定理

F^N 中之重要形式定理有如:

定理 11　$\Gamma, A(a) \vdash B, a \underset{\triangledown}{\in} \Gamma \& a \underset{\triangledown}{\in} B, \Rightarrow \Gamma, \exists X A(X) \vdash B$;

定理 12　$\forall X \forall Y A(X, Y) \vdash\dashv \forall Y \forall X A(X, Y)$;

定理 13　$\forall X A(X) \vdash \exists X A(X)$;

定理 14　$\forall X A(X) \vdash\dashv \neg \exists X \neg A(X)$;

定理 15　$\forall X \neg A(X) \vdash\dashv \neg \exists X A(X)$;

定理 16　$\forall X A(X) \rightarrow B \vdash\dashv \exists X [A(X) \rightarrow B], X \underset{\triangledown}{\in} B$;

定理 17　$A \wedge \forall X B(X) \vdash\dashv \forall X [A \wedge B(X)], X \underset{\triangledown}{\in} A$;

定理 18　$\exists X A(X) \vee \exists Y B(Y) \vdash\dashv \exists X \exists Y [A(X) \vee B(Y)]$;

定理 19　$\forall X [A(X) \leftrightarrow B(X)], \forall X [B(X) \leftrightarrow C(X)],$
$\vdash \forall X [A(X) \leftrightarrow C(X)]$;

定理 20　$\forall X [A(X) \leftrightarrow B(X)] \vdash\dashv \forall X [A(X) \rightarrow B(X)], \forall X [B(X) \rightarrow A(X)]$.

定义 6　$\Gamma \vdash A$ 是 F^N 中之形式定理 $\Leftrightarrow \Gamma \vdash A$ 能由 F^N 中之形式推理规则生成.

在经典的二值逻辑演算中,还有所谓命题逻辑演算的重言式系统 P^T 和谓词

逻辑演算的重言式系统 F^T. 但可证明：

$$(\Gamma \vdash A) \in P^N \Leftrightarrow (\Gamma \vdash A) \in P^T;$$
$$(\vdash A) \in P^N \Leftrightarrow (\vdash A) \in P^T;$$
$$(\Gamma \vdash A) \in F^N \Leftrightarrow (\Gamma \vdash A) \in F^T;$$
$$(\vdash A) \in F^N \Leftrightarrow (\vdash A) \in F^T.$$

亦即 P^N 与 P^T 互相等价，F^N 与 F^T 互相等价.

1.4　带等词的谓词逻辑演算系统 $F^{N(\simeq)}$

所谓带等词的谓词逻辑演算系统 $F^{N(\simeq)}$，是指将"等词"扩充到 F^N 中去. "等词"是一个二元谓词，用形式符号$\simeq$表示之，等词便是$\simeq$的名称，解释并读为"等同于".

1.4.1　$F^{N(\simeq)}$的推理工具

$F^{N(\simeq)}$的推理工具，首先要将 F^N 中的 16 条形式推理规则全部移用为 $F^{N(\simeq)}$的形式推理规则. 再外加如下两条形式推理规则：

Ril7　$\vdash a \simeq a$;　$(\simeq_+)$

Ril8　$A(a), a \simeq b \vdash A(b)$，其中的 $A(b)$是由 $A(a)$将其中 a 的某些出现替换为 b 而得.　$(\simeq_-)$

其中 Ril7 叫做等词引入律，记为$(\simeq_+)$，它反映了演绎推理中的这样一种推理思想，即论域（个体域）中任何一个个体总与它自己有等同关系. 又 Ril8 叫做等词消去律，记为$(\simeq_-)$. 它反映了演绎推理中如下的推理思想：如果论域中之个体 α 具有性质 $\mathscr{A}$，并且个体 α 与个体β 具有等同关系，那么个体 β 也具有性质 $\mathscr{A}$.

1.4.2　$F^{N(\simeq)}$的重要形式定理

关于 $F^{N(\simeq)}$中之重要形式定理列出几条如下：

定理 21　$a \simeq b \vdash b \simeq a$;

定理 22　$a \simeq b, b \simeq c \vdash a \simeq c$;

定理 23　$A(a), \neg A(b) \vdash \neg(a \simeq b)$;

定理 24　$A(a) \vdash\dashv \forall X(a \simeq X \to A(X))$;

定理 25　$A(a) \vdash\dashv \exists X(a \simeq X \land A(X))$.

1.5　逻辑演算的语义研究简述

如所知，形式系统（逻辑演算）是不附加任何实际意义的符号系统，在这类演算系统中进行推演，也不过是依据一定的语法规则对形式符号的组合进行机械变形而已. 然而形式系统与素朴数学模型的联系却又是必然的和客观存在的. 人们不可能去凭空构造或研讨一个毫无实际背景的形式系统. 事实上，构造任何一个形式系统时，都有一个预定的实际模型，而当反映某种预想模型的形式系统一旦构造，则

对此形式系统又可作出各种不同的解释. 如此,在构造了形式系统之后,如何来刻画该形式系统与实际模型之间的关系,又如何严格地从数学的角度去阐明该形式系统恰好反映了它的预想实际模型,诸如此类问题的探讨,就要对形式系统再作严格的语义研究.

大致说来,在严格定义了语义上"A 真"这一概念之后,再严格论证如下结论.

结论 1 如果 A 真,则 A 必为逻辑演算中的形式定理.

结论 2 如果 A 是逻辑演算系统内的形式定理,则 A 真.

结论 1 是指:凡在实际模型中为真的合式公式,一定能在形式系统中被推演出来. 如此就说该系统具有完备性.

结论 2 是指:凡在形式系统中被推演出来的形式定理,也一定是实际模型中成真的定理,此时就说该形式系统具有可靠性.

关于形式系统的严格的语义研究,除了完备性与可靠性之外,还要研究系统的无矛盾性(协调性)、紧致性等其它一些总体特征.

2 集 合 论

2.1 古典集合论与近代公理集合论诞生的历史背景

2.1.1 集合论产生的历史背景

集合论作为一门独立的数学分支的诞生和发展,乃是 19 世纪的事. 当时由于工业科学和自然科学的蓬勃发展,大大推动了微积分的理论与应用性的研究,同时又迫切要求奠定其理论基础,此外,当时的抽象代数与几何学均有较大发展,特别是群、环、域论与点集拓朴的开辟和研究,所以就整个经典数学而言,就迫切要求去建立一个可以统括各个数学分支、并能建树其上的理论基础. 正是在这一历史背景下,康托尔(Cantor)系统地总结了长期以来的数学的认识与实践,缔造了一门崭新的学科——集合论. 由于集合论的思想和方法渗透到数学的各个分支中,而且任何一个数学概念,都能从集合论的概念出发把它定义出来,任何一条数学定理,都能从集合论的思想规定出发把它推导出来. 因此一致公认集合论可以成为整个经典数学的理论基础.

2.1.2 古典集合论

由于近代公理集合论的兴起和发展,人们特称康托尔所创建的集合论为**古典集合论**,又因康托尔只以朴素的形式陈述他的理论,通常又叫做**朴素集合论**. 康托尔创建古典集合论的最重要的思想方法就是**概括原则**:其意指任给一个一元谓词,即性质 p,则就能把所有具有性质 p 的对象,也仅由这些具有性质 p 的对象 x,汇集

起来构成一个集合.用符号来表达就是

$$A=\{x\mid p(x)\}\quad 或\quad x\in A\leftrightarrow p(x).$$

后来,由于康托尔本人和别人相继发现古典集合论中有悖论(即自相矛盾的理论),特别是罗素(Russell)发现了一个十分基本而且直接涉及逻辑理论本身的悖论(称为罗素悖论),这可惊动了整个学术界,因为整个经典数学岂不被奠定在一个矛盾百出的理论基础上,怎能令人心安?数学家和逻辑学家不能不认真对待集合论的悖论问题.为了在集合论中避免悖论的出现,曾有多种不同的方案,其中之一就导致了近代公理集合论的兴起和发展.这项工作最先由德国数学家策墨洛(Zermelo)所承担,他于1908年建立他的集合论公理系统.后经弗兰克尔(Frankel)、冯·诺伊曼(Von Neuman)和斯科伦(Skolem)等的几次改进,终于形成了著名的ZFC系统.在这个系统中,避免了历史上已被发现之悖论的出现,而且至今未被发现有新的悖论出现,但也没有在理论上证明该系统今后不可能出现悖论.亦即该系统的直接的相容性并没有解决.近代公理集合论还有NBG(简记为GB)等其它公理集合论.NBG系统首先由冯·诺伊曼建立,后经贝尔纳斯(Bernays)和哥德尔(Gödel)改进而发展起来.这些系统在同等程度上使得整个经典数学奠定在一个相对牢固的基础上.

2.2　ZFC系统

ZFC系统的陈述有许多版本,通常采用的公理表包括如下11条非逻辑公理:

1. 外延公理

$$\forall A\,\forall B[\,\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Rightarrow A=B\,].$$

该公理说,如果两个集合有完全相同的元素,则它们相等.

2. 空集公理

$$\exists\varnothing\,\forall x(x\bar{\in}\varnothing).$$

该公理表示无条件地承认存在一个不含任何元素的集合,即存在一个集合,任何对象都不是它的元素.

3. 对偶公理

$$\forall u\,\forall v\,\exists B\,\forall x(x\in B\Leftrightarrow x=u \text{ or } x=v).$$

该公理指出,对于任何集合 u 与 v,总存在一个集合,恰以 u 与 v 为它的元素.

4. 并集公理(初级形式)

$$\forall a\,\forall b\,\exists B\,\forall x(x\in B\Leftrightarrow x\in a \text{ or } x\in b).$$

该公理认为,对任何两个集合 a 和 b,存在一个集合,它的元素或者属于 a,或者属于 b,或者属于两者.

5. 幂集公理

$$\forall a\,\exists B\,\forall x(x\in B\Leftrightarrow x\subseteq a).$$

该公理指出,对任意集合 a,存在一个集合,它的元素恰好是 a 的一切子集.当然,这里的 $x\subseteq a$ 还可表示为 $\forall t(t\in x\Rightarrow t\in a)$.

6. 子集公理

对每一个不包含 B 的公式____,如下的表达式是公理.

$$\forall t_1 \cdots \forall t_k \forall C \exists B \forall X(x \in B \Leftrightarrow x \in C \& ____).$$

若用自然语言叙述，这个公理断言(对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 和 C)存在这样的一个集合 B，其元素正好是 C 中所有使得那个不包含 B 的公式____成立的那些元素 x. 于是，自然得出 B 是 C 的子集(子集公理之名由此而来). 集合 B 被($t_1, t_2, \cdots, t_R$ 和 C)唯一确定. 并可用抽象记号的变形 $B=\{x \in C \mid ____\}$ 来给它命名，子集公理也叫做划分公理或分出公理.

7. 并集公理(高级形式)

$$\forall A \exists B \forall x[x \in B \Leftrightarrow \exists b(b \in A \ \& \ x \in b)].$$

该公理说，对任意集合 A，存在一个集合 B，它的元素正好是 A 的元素的元素全体.

定义 1　对任何集合 a，它的后继 a^+ 定义为

$$a^+ = a \cup \{a\}.$$

定义 2　如果集合 A 满足如下条件：

1°　$\varnothing \in A$;

2°　$\forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A)$，

则称该集合为一归纳集. 其中条件 2°也叫做集合 A 在后继下封闭，即对每个 $a \in A$，总有 $a^+ \in A$. 虽然我们还没有给出"无限"的形式定义，但实际上已经看到，任何一个归纳集将是无限的. 我们将以公理的形式来保证归纳集的存在.

8. 无穷公理

$$\exists A(\varnothing \in A \& \forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A)).$$

该公理指的是无条件承认归纳集的存在.

9. 选择公理

$$\forall \mathscr{A}(\mathscr{A} \neq \varnothing \& \forall a(a \in \mathscr{A} \Rightarrow a \neq \varnothing) \&$$
$$\forall a \forall b(a \in \mathscr{A} \ \& \ b \in \mathscr{A} \ \& \ a \neq b \Rightarrow a \cap b \neq \varnothing) \Rightarrow \exists B$$
$$(x \in B \Rightarrow \exists b(b \in \mathscr{A} \ \& \ x \in b \ \& \ b \cap B = \{x\}))).$$

该公理说，设 $\mathscr{A}$ 是这样一种集合：①$\mathscr{A}$ 是非空集合，并且 $\mathscr{A}$ 的每个元素都是非空集合，②$\mathscr{A}$ 的任何两个不同的元素都不相交. 那么存在一个集合 B，恰以 $\mathscr{A}$ 的每个元素中的一个元素的全体构成(即对每个 $b \in \mathscr{A}$，$b \cap B$ 是某个 x 的单元集 $\{x\}$).

10. 替换公理

$$\forall A[\forall x \forall y_1 \forall y_2(x \in A \ \& \ \varphi(x, y_1) \ \& \ \varphi(x, y_2) \Rightarrow y_1 \Rightarrow y_2) \Rightarrow \exists B \forall y(y \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \ \& \ \varphi(x, y)))].$$

此处应注意，B 不在公式 $\varphi(x, y)$ 中出现.

现将替换公理译成自然语言：把公式 $\varphi(x, y)$ 读为"x 提名 y"，则该公理的前提说："任给集合 A，A 的每个元素至多提名一个对象"，此时也说 A 是单值的. 而该公理的结论是说："所有被集合 A 之元素所提名的那些对象可以汇集起来构成一个集合 B."这里所以叫做替换公理，指的是集合 A 中的每个元 x，由它的被提名者(如果有的话)所代替而产生了集合 B 这样一种思想.

11. 正则公理

$$\forall A(A\neq\varnothing\Rightarrow\exists m(m\in A\ \&\ m\cap A=\varnothing)).$$

该公理说,每个非空集合 A,至少有一个元素 m,使得 m 与 A 没有公共元素.

应当指出,以上所列 ZFC 系统的 11 条非逻辑公理并不都是互相独立的.例如,子集公理就可由其它公理推导出来.然而为了使用上的方便,人们习惯于如上的表述方式.此外,配套于 ZFC 系统的推理工具就是经典的二值逻辑演算系统.但是,在 ZFC 系统中,除要保留经典二值逻辑之所有形式符号、形成规则和推理规则之外,还要增添一个二元常谓词$\in$,读为"属于",从而在形成规则时,还要增加:

(*) a,b 是个体词$\Rightarrow a=b,a\in b$ 都是 Wff.

2.3 NBG 系统

另外一个著名的近代公理集合论系统就是 NBG(或称 GB)系统,配套于 NBG 系统的逻辑工具也是经典二值逻辑演算系统.但在 NBG 系统中,引入了类的概念,并区分了集合和真类,集合既可以集合为其元素,也可为其它类的元素,但规定真类只能以集合为其元素,真类本身不能作为任何类的元素.在 NBG 系统的语言中有两种变元,即集合变元和类变元,通常用小写英文字母 $a,b,c,u,v,x,y,z,\cdots$ 表示集合,又用大写英文字母 $A,B,C,U,V,X,Y,Z,\cdots$ 表示类.在语言中除了二元常谓词$\in$之外,还要增添两个一元谓词 $\mathscr{M}$ 和 Cla.其中 Cla(ξ)指 ξ 是类,而$\mathscr{M}(\xi)$指 ξ 是集合.NBG 系统共有 5 组 18 条非逻辑公理.

1.(A 组)基本公理

A1 $\forall x\mathrm{Cla}(x)$

该公理说任何集合是类.

A2 $\forall X\forall Y(X\in Y\rightarrow\mathscr{M}(X))$.

该公理说作为某个类之元素的类是集合.

A3 $\forall X\forall Y[\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\rightarrow X=Y]$.

该公理说有相同元素的两个类是相等的.这就是类的外延公理.

A4 $\forall x\forall y\exists z\forall u[u\in z\leftrightarrow(u=x\vee u=y)]$.

该公理说任给二集 x 和 y,则有一集 z,它恰以 x 和 y 为其元.这是集合的无序对公理.

上述 4 条基本公理区分了类与集合,约定了两个类相等的含义.基于上述基本公理可定义有序对$\langle x,y\rangle$,有序三元组$\langle x,y,z\rangle$等概念.

2.(B 组)类的存在性公理

B1 $\exists A\forall x\forall y[\langle x,y\rangle\in A\leftrightarrow x\in y]$.

该公理指出了对应着集合之间的$\in$关系的有序对的类(即二元关系)的存在性.

B2 $\forall A\forall B\exists C\forall u[u\in C\leftrightarrow(u\in A\wedge u\in B)]$

该公理指出了任何两个类的交是类.

B3 $\forall A\exists B\forall u[u\in B\leftrightarrow\neg(u\in A)]$

该公理指出了一个类的补的类的存在性.

B4 $\forall A \exists B \forall x[x \in B \leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in A)]$

该公理指任何序偶的类的定义域是类

B5 $\forall A \exists B \forall x \forall y[\langle x, y\rangle \in B \leftrightarrow x \in A]$

该公理指任何一个类可成为某二元关系(此处为序偶类 B)的定义域.

B6 $\forall A \exists B \forall x \forall y[\langle x, y\rangle \in B \leftrightarrow < y, x > \in A]$.

该公理指二元关系的逆关系仍为类.

B7 $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[\langle x, y, z\rangle \in B \leftrightarrow \langle z, y, x\rangle \in A]$.

该公理指三元关系类进行轮换后的三元关系还是类.

B8 $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[\langle x, y, z\rangle \in B \leftrightarrow \langle y, z, x\rangle \in A]$.

该公理指三元关系进行一种对换后还是类.

对于上述 B7 与 B8 应注意,由于有序三元组的任何置换均可由轮换与对换来生成,故由 B7 与 B8 推知,三元关系的任何置换关系仍为类.

B组公理指出了由哪些条件可以决定一个类,又指出如何由已知类去构造新的类.

3.(C组)集合的存在性公理

C1 $\exists a(\neg E\mathscr{M}(a) \wedge \forall x[x \in a \rightarrow \exists y(y \in a \wedge x \subset y)]\}$

此处符号 $E\mathscr{M}(a)$ 指 a 为空集,该公理说无条件承认有一非空集合 a,对于 a 的任一元 x,必有 a 的元素 y,使得 x 是 y 的真子集,所以集合 a 必有无穷多个元素,故 C1 为无穷公理.

C2 $\forall x \exists y \forall u \forall v[u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in y]$.

该公理断言对任何集合 x,都存在一集合 y,使得集合 x 的任何元素的元素都是 y 的元素,此乃并集公理.

C3 $\forall x \exists y \forall u[u \subseteq x \rightarrow u \in y]$

该公理说任何集合 x,都有集合 y 存在,使得 x 的任一子集都是 y 的元素,这是幂集公理.

C4 $\forall x \forall A\{\mathscr{U}_n(A) \rightarrow \exists y \forall u[u \in y \leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge \langle u, v\rangle \in A)]\}$.

此处符号 $\mathscr{U}_n(A)$ 指类 A 是单值的,亦即

$$\mathscr{U}_n(X) \leftrightarrow \forall u \forall v \forall w[\langle u, v\rangle \in X \wedge \langle u, w\rangle \in X \rightarrow v = w].$$

该公理说对任何集合 x 和任何单值的类 A,总有集合 y 存在,此 y 恰由 x 的元经由单值二元关系类 A 所产生的集所组成.此即替换公理.

在上述 C 组公理中,应注意由 C1,C2,C3 所决定的集并不是唯一的,因为→与↔完全不同.

4.(D组)正规公理

D1 $\forall A[\neg E\mathscr{M}(A) \rightarrow \exists u(u \in A \wedge Ex(u, A)]$.

此处符号 $Ex(u, A)$ 指 u 与 A 没有公共元素.该公理说,对任何非空类 A,必有一元 u,使得 u 与 A 没有公共元素.相当于 ZFC 中的正则公理.

5.(E组)选择公理

E1 $\exists A\{\mathscr{U}_n(A) \wedge \forall x[\neg E\mathscr{M}(x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge < y, x > \in A)]\}$.

这是一条强形式的选择公理,指存在着单值类 A,对任何非空集合 x,都有 x

的元 y 存在，使有 $\langle y,x\rangle\in A$. 因为单值关系就是函数，因而该公理是指无条件承认存在着全选择函数 A，它能从任何一个非空集合中唯一地选出一个元素来.

2.4 ZFC 系统与 NBG 系统的比较

可以证明 NBG 系统是 ZFC 系统的一个非本质的保守扩张，而且 NBG 与 ZFC 之数学内涵的丰富程度基本相当，也有人说 NBG 是用集合与类的术语重新叙述的 ZFC. 两者相比，各有特点，分述如下：

(1)NBG 系统中计有 5 组 18 条非逻辑公理，其中没有公理模式，因而只有有限多条公理. ZFC 系统的非逻辑公理中却有公理模式(如子集公理)，因而是无穷多条非逻辑公理.

(2)NBG 系统中可以证明一条关于类的一般存在性定理，它相当接近概括原则，然而 ZFC 却是在已知集合中构造集合，这与概括原则相去甚远.

(3)NBG 中规定真类不是任何类的元，这一点很不自然，因为无论真类 C 有多大，对于 $\{C\}$ 和 $C\in\{C\}$ 一事理应十分自然和合理.

由如上之(1)和(2)看，NBG 优于 ZFC，而上述(3)就显出 NBG 欠缺有余.

2.5 中介公理集合论系统诞生的历史背景

20 世纪 60 年代，由扎德(Zadeh)教授创始而被发展起来的模糊集理论，标志着数学的发展，已进入了数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充时代. 由于扎德是一位著名的控制论专家，却不是一位纯粹数学家，从而决定了扎德只能提供一种用精确性经典数学手段去处理模糊现象的相对合理的方法，因而不能在数学基础理论意义上去解决模糊谓词的造集问题，亦即在数学基础理论意义上数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充问题. 为要解决问题，首先要明确精确性经典数学的思想原则，然后在新的背景下确立新的原则，并在新的原则下去建立确认模糊谓词可以造集的公理集合论.

自从亚里士多德(Aristotle)以来，形式逻辑就区分了反对对立和矛盾对立概念. 如果两个概念，都有其自身的肯定的内容，并在其上位概念中，两者之间存在着最大的差异，那么，这两个概念就是反对对立概念，记为$(P,\dashv P)$，其中形式符号 $\dashv$ 叫做对立否定词，读为“对立于”. 例如，善和恶、美和丑、真和假等等都是 P 和 $\dashv P$. 如果两个概念中，一个的内涵否定另一个的内涵，那么这两个概念就是矛盾对立概念，记为$(P,\neg P)$，如所知，形式符号 $\neg$ 的名称为否定词，读为“非”. 例如，资本和非资本、劳动和非劳动等等都是 P 和 $\neg P$. 现将形式符号 $\sim$ 叫做模糊否定词，读为“部分地”. 那么，$\sim P(x)$ 表示对象 x 部分地具有性质 P，现任给$(P,\dashv P)$，若有对象 x 使有 $\sim P(x)\ \&\sim\dashv P(x)$，则称 x 为 P 和 $\dashv P$ 的中介对象. 如此，在拒不考虑模糊谓词造集问题的古典集合论和近代公理集合论中，在拒不研究模糊现象的精确性经典数学中，事实上在无形中贯彻了一条思想原则，该原则无条件认为，对任何可接受的谓词 P，要么 $P(x)$，要么 $\dashv P(x)$，亦即没有对象 x 能使有 $\sim P(x)$，亦

即任给$(P, \dashv P)$，只要论域一经适当限制，就否认有中介对象存在，从而$(P, \dashv P)$就是$(P, \dashv P)$，以致$\neg P$就是$\dashv P$，这就是经典二值逻辑中所强调之“非美即丑”、“非善即恶”和“非真即假”等等的由来．特称该原则为“无中介原则”．现在，要确立一条与无中介原则相反的原则，即无条件认为存在着某些谓词P，有对象x使得$P(x)$和$\dashv P(x)$都部分地真，特称为“**中介原则**”．1983年以来，朱梧槚与肖奚安经过长期合作研究，在中介原则观点下，创建了**中介逻辑演算系统 ML 和中介公理集合论系统 MS**．其中 ML 由中介命题逻辑 MP 及其扩张系统 MP^*、中介谓词逻辑 MF 及其扩张系统 MF^*、带等词的中介谓词逻辑 ME^* 等5个演算系统构成，ML 是 MS 配套的逻辑工具并使 MS 严格形式化的演算系统．关于 ML 的具体内容的陈述见6.1.2．

2.6　中介公理集合论系统

中介公理集合论系统 MS 除承认和使用 ML 的全部形式符号、定义符号和推理规则外，还要引入两个基本的常谓词，其一是二元谓词$\in$，读为“属于”，其二是一元常谓词$\mathscr{M}$，解释并读为“小”．从而还要增添如下的形成规则：

(＊)　x, y为个体词$\Rightarrow x\in y$和$\mathscr{M}(x)$都是 Wff．

在 MS 中规定以 $a, b, c, a_i, b_i, c_i, A, B, C, A_i, B_i, C_i, x, y, z, x_i, y_i, z_i, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, u, v, u_i, v_i (i=0,1,2,\cdots)$表示个体词．

1.MS 中的 20 条非逻辑公理

公理 1(外延公理)：$a=b \asymp \forall z(z\in a \asymp z\in b)$．

公理 2(对偶公理)：$\exists c\forall x(x\in c \asymp \text{Ш}^{\circ}(x=a \vee x=b))$．

公理 3(联集公理)：$\exists b(b=\{x \mid \exists y(y\in a \wedge x\in y)\})$．

公理 4(交集公理)：$\exists b(b=\{x \mid \forall y(y\in a \prec x\in y)\})$．

公理 5(外集公理)：$\exists b(b=\{x \mid x\bar{\in} a\})$．

公理 6(中介集公理)：$\exists b(b=\{x \mid x\tilde{\in} a\})$．

公理 7(清晰集公理)：$\exists b(b=\{x \mid \text{Ш}^{\circ}(x\in a)\})$．

公理 8(卡氏积公理)：$\exists c(c=\{x \mid \exists y\exists z(y\in a \wedge z\in b \wedge \text{Ш}^{\circ}\ x=\langle y, z\rangle)\})$．

公理 9(幂集公理)：$\exists b(b=\{x \mid x\subseteq a\})$．

公理 10(泛概括公理)：对任何 Nor$P$，只要其中不含a的自由出现，则

$$\exists a(a^{\mathrm{com}}_{x}\exists x_1\cdots\exists x_n(\text{Ш}^{\circ}(x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle \wedge P(x_1,\cdots,x_n;t)))．$$

公理 11(替换公理)：对任何$\underset{(x_1,x_2)}{\mathscr{U}_n}\varphi(x_1,x_2,t)$，只要其中没有$b$的自由出现，则

$$\forall a[\mathscr{M}(a)\Rightarrow \exists b(\mathscr{M}(b)\wedge b^{\mathrm{cqa}}_{y}(\exists x(x\in a^0 \wedge \varphi(x,y,t))))]．$$

替换公理是说，对于任何小集a，可以用单值谓词φ将其内部的元素换为其它元素，从而形成新的小集b，这个新集称为a被φ替换而得的替换集．

公理 12(选择公理)：$\mathscr{M}(a)\wedge\forall x\forall y((x\in a\wedge y\in a\wedge$

$$\neg(x=y))\Rightarrow x\cap y=\varnothing)\Rightarrow \exists b(\mathscr{M}(b)\wedge\forall x(x\in a$$

$\wedge x \neq \varnothing \Rightarrow I(b \cap x))).$

公理 13(后继恰集公理):$\mathscr{M}(a) \Rightarrow \exists b[\mathscr{M}(b) \wedge b^{\text{exa}}_{y} \forall y(y \text{suc} a \prec x \in y)].$

公理 14(清晰公理):$\underset{x}{\text{dis}} \mathscr{M}(x).$

公理 15(巨集公理):$GI(a) \vee GI(a^{\sim}) \vee GI(a^{-}).$

公理 16(小清晰集公理):$\mathscr{M}(a) \Leftrightarrow \mathscr{M}(a^{0}).$

公理 17(单点小集公理):$I(a) \Rightarrow \mathscr{M}(a).$

公理 18(小联集公理):$\mathscr{M}(a) \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow \mathscr{M}(x)) \Rightarrow \mathscr{M}(\bigcup a).$

公理 19(小交集公理):$\mathscr{M}(a) \wedge \exists x(x \in A \wedge \mathscr{M}(x)) \Rightarrow \mathscr{M}(\bigcap a).$

公理 20(小幂集公理):$\mathscr{M}(a) \wedge \mathscr{M}(a^{\sim}) \Rightarrow \mathscr{M}(\mathscr{P}a).$

2. 中介公理集合论中的核心概念

定义 3(模糊谓词):

$$\underset{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\text{fuz}} P \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x_1 \cdots \exists x_n (\overset{\circ}{\sim} P(x_1, x_2; \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_r)).$$

定义 4(清晰谓词):$\underset{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\text{dis}} P \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \urcorner \underset{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\text{fuz}} P.$

定义 5(恰集):$a^{\text{exa}}_{x} P(x, t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in a \urcorner P(x, t)).$

定义 6(概集):$a^{\text{com}}_{x} P(x, t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall x((P(x, t) \Rightarrow x \in a) \wedge (\urcorner P(x, t) \Rightarrow x \in a)).$$

定义 7(正规谓词)

1° 若 x, y 是项,则 $x \in y, x = y$ 都是正规谓词.

2° 若 P、Q 是正规谓词,则 $P \rightarrow Q$, $\urcorner P$, $\sim P$ 都是正规谓词.

3° 若 $P(a; t)$是正规谓词,a 在其中出现,x 不在其中出现,x 取代 a 的所有出现(部分出现),则 $\forall x P(x, t)$($\exists x P(x, t)$)是正规谓词.

MS 中的谓词是正规谓词,当且仅当它能由上述形成规则 1°、2°、3°经有限步生成.P 是 MS 中的正规谓词记为 Nor$P$.

关于中介公理集合论 MS 有如下几个至关重要的结论:

1° 拓宽了经典数学的逻辑基础与集合论基础:因为严格证明了任何经典二值逻辑演算系统都是中介逻辑演算系统的子系统,同时又严格证明了 ZFC 中除正则公理以外的每一条非逻辑公理都是 MS 的定理,而且正则公理对于由 ZFC 推出整个经典数学不起作用,亦即 ZFC 用以推出整个经典数学的思想规定是正则公理以外的那些非逻辑公理和二值逻辑演算系统.

2° 在数学基础理论意义上扩充了数学研究对象:在古典集合论与近代公理集合论中,只有精确谓词可以造集,但在 MS 中,不仅精确谓词可以造集,同时模糊谓词也可以造集.此外"全集 V"不是古典集合论和 ZFC 的研究对象,GB 系统中的真类不能是任何集合的元素,但在 MS 中,全集 V 不仅是系统内的合理的研究对象,而且可以成为某集的元素,从而{V}是合理允许的.

3° 最大限度地保留了概括原则的合理内容:过去大家认为近代公理集合论对概括原则的限制过大,以致在避免悖论的同时而失去了一部分合理的数学内容,因

此,致力于寻找一种修改概括原则的方案,要使之既能排除悖论的出现又能最大限度地保留概括原则的合理内容.但在 MS 中,既能证明 MS 中的正规清晰谓词全体完全覆盖了概括原则意义上的所有造集谓词,同时又能证明在 MS 中任一正规清晰谓词都唯一决定着一个恰集.

4° MS 的相容程度等同于近代公理集合论的相容程度:这就是说,在 MS 中已严格证明了既经出现之二值逻辑悖论,N 值($3\leq n<\omega$)逻辑悖论和无穷值逻辑悖论都不会在 MS 中出现,同时也至今没有在 MS 中发现有其它新的悖论的出现.

3 模 型 论

模型论是数理逻辑的主要分支之一,它主要探讨形式语言及其解释(或称模型、结构)之间的联系.模型论的早期发展主要归功于络文汉姆(Löwenheim)、斯科林、哥德尔、塔斯基(Tarski)和马尔塞夫(Malcev)等人的工作。20 世纪 40 年代末期到 50 年代初期,由于亨钦(Henkin)、鲁宾逊(Robinson)和塔斯基的工作,才使模型论逐步成为数理逻辑的一个分支.模型论有所谓一阶模型论、高阶模型论、无穷长语言模型论、具有广义量词的模型论、模态模型论、多值模型论等等.此处只论及一阶模型论的基本概念与重要结果.

3.1 基本概念及符号

3.1.1 一阶逻辑形式语言

一阶逻辑形式语言 $\mathscr{L}$ 是指以下三部分组成的集合:1° 关系符号 R_i, $i\in I$. 2° 函数符号 F_j, $j\in J$;3° 个体常量符号 C_k, $k\in K$.

一般地,就把 $\mathscr{L}$ 记作 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{C_k\}_{k\in K}\}$. 对每个 R_i 均有某个确定的自然数 n 与之关联,称 R_i 是 n 元关系符号,有时也记作 R_i^n. 对函数符号也有类似约定.另外,需要指出的是,对形式语言 $\mathscr{L}$,总假设其中还有如下一些逻辑符号:

1° 个体变元:$V_1, V_2, \cdots, V_n\cdots$;

2° 联接词:$\rightarrow$(蕴涵),$\neg$(否定);

3° 量词符号:$\forall$

4° 等号 $=$

5° 辅助性技术符号(,).由于这些符号对一阶语言是共同的,故往往不记入 $\mathscr{L}$ 中.称 $\mathscr{L}$ 中的关系符号、函数符号及个体常量符号为非逻辑符号,以 $|\mathscr{L}|$ 表示 $\mathscr{L}$ 中非逻辑符号集的基数.语言 $\mathscr{L}$ 的幂或基数则记为 $\|\mathscr{L}\|$,其定义为 $|\mathscr{L}|+\omega$,易知 $\|\mathscr{L}\|$ 就是 $\mathscr{L}$ 中合式公式的个数,也就是 $\mathscr{L}$ 中语句的个数.

关于语言 $\mathscr{L}$ 中项、公式的具体定义以及自由变元、约束变元、一阶逻辑公理系统等概念在此限于篇幅不作介绍,可参见两个演算部分的相关内容.

3.1.2 一阶模型

若 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{C_k\}_{k\in K}\}$是一阶语言，其模型是一个四元有序组 $\mathscr{U}=\langle A,\{R_i^{\mathscr{U}}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}}\}_{j\in J},\{C_k^{\mathscr{U}}\}_{k\in K}\rangle$，其中 A 是非空集合，称之为 $\mathscr{U}$ 的论域．

对每个 $i\in I$，$R_i^{\mathscr{U}}$ 是 R_i 在 $\mathscr{U}$ 中的解释．如果 R_i 是 n 元关系符号，则 $R_i^{\mathscr{U}}$ 是 A 上的 n 元关系，即 $R_i^{\mathscr{U}}\subseteq A^n$．对 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，若 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R_i^{\mathscr{U}}$，则称 $R_i^{\mathscr{U}}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为真，否则称为不真或不成立．

对每个 $j\in J$，$F_j^{\mathscr{U}}$ 是 F_j 在 $\mathscr{U}$ 中的解释．若 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 m 元函数符号，则 $F_j^{\mathscr{U}}$ 是 A 上的 m 元函数．

对每个 $k\in K$，$C_k^{\mathscr{U}}$ 是论域 A 中一个指定的元素，$C_k^{\mathscr{U}}$ 称为 C_k 在 $\mathscr{U}$ 中的解释．

若一个模型 $\mathscr{U}$ 的论域是 A，A 的势 $|A|$ 也称为模型 $\mathscr{U}$ 的势．如果 $|A|=\omega$，就称 $\mathscr{U}$ 是可数模型；$|A|<\omega$，就称 $\mathscr{U}$ 是有限模型；$|A|>\omega$，就称 $\mathscr{U}$ 是不可数模型．

以下给出形式语言的公式在模型中取真假值的基本语义定义．

若 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型，对于 $\mathscr{L}$ 中的项 $t(x_0,x_1,\cdots,x_n)$及 A 中 $n+1$ 元组 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，归纳定义 t 在 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 处的值 $t[a_0,a_1,\cdots,a_n]$如下：

1° 若 $t=V_i$，则 $t[a_0,a_1,\cdots,a_n]=a_i$；

2° 若 t 是常量符号 C，则 $t[a_0,a_1,\cdots,a_n]=C^{\mathscr{U}}$；

3° 若 $t=F(t_1,t_2,\cdots,t_m)$，则 $t[a_0,a_1,\cdots,a_n]=F^{\mathscr{U}}(t_1[a_0,a_1,\cdots,a_n],t_2[a_0,a_1,\cdots,a_n],\cdots,t_m[a_0,a_1,\cdots,a_n])$．

若 $\mathscr{U}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型，$\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中的公式，其自由变元及约束变元都在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 中，对 A 中任一 $n+1$ 元组 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，归纳定义“$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 在 $\mathscr{U}$ 中适合 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$”（记作 $\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$）这一概念如下：

1° 若 φ 为 $t_1(x_0,x_1,\cdots,x_n)\equiv t_2(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，则当且仅当 $t_1[a_0,a_1,\cdots,a_n]=t_2[a_0,a_1,\cdots,a_n]$时，$\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$；

2° 若 φ 为 $R(t_1(x_0,x_1,\cdots,x_n),t_2(x_0,x_1,\cdots,x_n),\cdots,t_m(x_0,x_1,\cdots,x_n))$，则当且仅当 $R^{\mathscr{U}}(t_1[a_0,a_1,\cdots,a_n],t_2[a_0,a_1,\cdots,a_n],\cdots,t_m[a_0,a_1,\cdots,a_n])$在 $\mathscr{U}$ 中为真时，$\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$；

3° 若 φ 为 $\theta_1(x_0,x_1,\cdots,x_n)\wedge\theta_2(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，则当且仅当 $\mathscr{U}\models\theta_1[a_0,a_1,\cdots,a_n]$且 $\mathscr{U}\models\theta_2[a_0,a_1,\cdots,a_n]$时，$\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$；

4° 若 φ 为 $\neg\theta(x_0,x_1,\cdots,x_n)$，则当且仅当 $\mathscr{U}\models\theta[a_0,a_1,\cdots,a_n]$不成立时，$\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$．

5° 若 φ 为 $\forall x_i\psi(x_0,x_1,\cdots,x_n)(i<n)$，则当且仅当对任一 $a\in A$，有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_{i-1},a,a_{i+1},\cdots,a_n]$时，$\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$．

如果 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中公式，如果对 $\mathscr{L}$ 的每一模型 $\mathscr{U}$ 及 A 中每一 $n+1$ 元组 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均有 $\mathscr{U}\models\varphi[a_0,a_1,\cdots,a_n]$，则称 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$是 $\mathscr{L}$ 中恒真公式（即永真公式）．当恒真公式 φ 为语句（即不含自由变元的公式）时，称之为恒真语句．如果 Σ 是 $\mathscr{L}$ 中的语句集，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，若对任一 $\sigma\in\Sigma$ 均有 $\mathscr{U}\models\sigma$，则

记作 $\mathscr{U}\models\Sigma$,并称 $\mathscr{U}$ 是 Σ 的一个模型.

3.2　模型间的关系及性质

3.2.1　模型的同态与同构

若 $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}'$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型,其中,$\mathscr{U}=\langle A,\{R_i^{\mathscr{U}}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}}\}_{j\in J},\{C_k^{\mathscr{U}}\}_{k\in K}\rangle$,$\mathscr{U}'=\langle A',\{R_i^{\mathscr{U}'}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}'}\}_{j\in J},\{C_k^{\mathscr{U}'}\}_{k\in K}\rangle$. 如果存在映射 $f:A\to A'$ 使下列条件成立:

1° 对任意 $i\in I$,若 R_i 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号,对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$,如果 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R_i^{\mathscr{U}}$ 成立,则 $\langle f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\rangle\in R_i^{\mathscr{U}'}$ 成立;

2° 对任意 $j\in J$,若 F_j 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号,对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in A$,有

$$f(F_j^{\mathscr{U}}(a_1,a_2,\cdots,a_m))=F^{\mathscr{U}'}{}_j(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_m))\text{成立;}$$

3° 对任意 $k\in K$,有 $f(C_k^{\mathscr{U}})=C_k^{\mathscr{U}'}$ 成立,则称 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ 同态或 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的同态模型,并称映射 f 是 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的同态映射,记作 $f:\mathscr{U}\sim\mathscr{U}'$.

如果 f 是模型 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的同态映射,而且 f 还是 A 到 A' 的双射函数,并且条件1°加强为:当且仅当 $\langle f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\rangle\in R^{\mathscr{U}'}{}_i$ 时,$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R_i^{\mathscr{U}}$,则称模型 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ 同构或称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的同构模型,f 相应地称为 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{U}'$ 的同构映射,记作 $f:\mathscr{U}\cong\mathscr{U}'$.

3.2.2　模型的膨胀与归约

如果 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in Z},\{F_j\}_{j\in J},\{C_k\}_{k\in K}\}$,$\mathscr{L}'=\{\{R_i\}_{i\in Z'},\{F_j\}_{j\in J'},\{C_k\}_{k\in K'}\}$ 是两个一阶语言,并且 $Z\subseteq Z'$,$J\subseteq J'$,$K\subseteq K'$,则称 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 的膨胀或 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}'$ 的归约. 若 $\mathscr{U}$,$\mathscr{U}'$ 分别是语言 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{L}'$ 的模型,$\mathscr{U}'$ 与 $\mathscr{U}$ 具有相同的论域 A,而且对 $\mathscr{L}$ 中的非逻辑符号 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{U}'$ 的解释完全相同,则称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的膨胀模型或 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}'$ 的归约模型. 在模型论中经常用到一种简单膨胀的技巧,即如果 X 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的常量符号组成的集合,记 $\mathscr{L}_X=\mathscr{L}\cup X$,称 $\mathscr{L}_X$ 为 $\mathscr{L}$ 的简单膨胀. $\mathscr{L}$ 模型 $\mathscr{U}$ 的 $\mathscr{L}_X$ 膨胀记作 $\mathscr{U}_X$,$\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},C^{\mathscr{U}_X})_{C\in X}$,其中 $C^{\mathscr{U}_X}$ 是新常量 C 在 $\mathscr{U}_X$ 中的解释,在不引起歧义时也记作 $\mathscr{U}_X=(\mathscr{U},C)_{C\in X}$.

3.2.3　子模型与扩充模型

若 $\mathscr{L}=\{\{R_i\}_{i\in I},\{F_j\}_{j\in J},\{C_k\}_{k\in K}\}$ 是一阶语言. $\mathscr{U}=\langle A,\{R_i^{\mathscr{U}}\}_{i\in L},\{F_j^{\mathscr{U}}\}_{j\in J},\{C_k^{\mathscr{U}}\}_{k\in K}\}$,$\mathscr{U}'=\langle A',\{R_i^{\mathscr{U}'}\}_{i\in I},\{F_j^{\mathscr{U}'}\}_{j\in J},\{C_k^{\mathscr{U}'}\}_{k\in K}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型,如果 $A'\subseteq A$ 并且 $\mathscr{U}$,$\mathscr{U}'$ 满足下列条件1°,2°,3°,则称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的子模型,$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}'$ 的扩充模型,记作 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{U}$.

1° 对 $\mathscr{L}$ 中的任一 n 元关系符号 R 及 A' 中任一 n 元组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 当且仅当 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R^{\mathscr{U}'}$ 时,有 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle\in R^{\mathscr{U}}$.

2° 对 $\mathscr{L}$中的任一 m 元函数符号 F 及 A' 中任一 m 元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 有 $F^{\mathscr{U}}(a_1, a_2, \cdots, a_m) = F^{\mathscr{U}'}(a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

3° 对 $\mathscr{L}$中的任一常量符号 C 有 $C^{\mathscr{U}} = C^{\mathscr{U}'}$.

与上述子模型、扩充模型概念紧密联系的另一概念是**同构嵌入**.如果 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$是 $\mathscr{L}$的两个模型,若存在模型 $\mathscr{U}'$使 $\mathscr{U}\cong\mathscr{U}'$且 $\mathscr{U}'\subseteq\mathscr{B}$,则称 $\mathscr{U}$同构嵌入 $\mathscr{B}$,记作 $\mathscr{U} \underset{\sim}{\subset} \mathscr{B}$.相应的映射 $f:\mathscr{U}\cong\mathscr{U}'$则称为 $\mathscr{U}$到 $\mathscr{B}$的同构嵌入函数,记作 $f:\mathscr{U} \underset{\sim}{\subset} \mathscr{B}$.

3.2.4 初等等价模型、初等子模型与初等扩充模型

若 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$都是语言 $\mathscr{L}$的模型,如果对 $\mathscr{L}$的任意句子 φ,当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi$ 时,$\mathscr{U}\models\varphi$,就称 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$**初等等价模型**,记作 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

若 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$是语言 $\mathscr{L}$的两个模型,$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$,且对 $\mathscr{L}$中任意公式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及任意 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$,其中 A 为 $\mathscr{U}$之论域,有下列条件成立:

当且仅当 $\mathscr{B}\models\varphi[a_1, a_2, \cdots, a_n]$时,$\mathscr{U}\models\varphi[a_1, a_2, \cdots, a_n]$,

则称 $\mathscr{U}$是 $\mathscr{B}$的**初等子模型**,也称 $\mathscr{B}$是 $\mathscr{U}$的初等扩充,记作 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$.

若 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$是 L 的两个模型,如果存在模型 $\mathscr{U}_1$,使 $\mathscr{U}\cong\mathscr{U}_1$ 且 $\mathscr{U}_1\prec\mathscr{B}$,则称 $\mathscr{U}$初等嵌入 $\mathscr{B}$,记作 $U \underset{\sim}{\prec} B$,并且称同构映射 $f:\mathscr{U}\cong\mathscr{U}_1$为初等嵌入映射,记作 $f:\mathscr{U} \underset{\sim}{\prec} \mathscr{B}$.

3.2.5 模型的部分同构与有限同构

若 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$是语言 L 的两个模型,p 是 $\mathscr{U}$到 $\mathscr{B}$的一个偏函数,p 的定义域记为 $\mathrm{dom}(p)$,p 的值域记为 $\mathrm{rg}(p)$.如果 p 是一个单射且满足下列条件就称 p 是 $\mathscr{U}$到 $\mathscr{B}$的一个部分同构.

1° 对 $\mathscr{L}$中的任一关系符号 R,若 R 是 n 元关系符号,则对任意 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathrm{dom}(p)$有下式成立:

当且仅当$\langle p(a_1), p(a_2), \cdots, p(a_n)\rangle \in R^{\mathscr{B}}$时,$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle \in R^{\mathscr{U}}$.

2°对 $\mathscr{L}$中任一 m 元函数,符号 F 及 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathrm{dom}(p)$有下式成立:

当且仅当 $F^{\mathscr{B}}(p(a_1), p(a_2), \cdots, p(a_m)) = p(a)$时,$F^{\mathscr{U}}(a_1, a_2, \cdots, a_m) = a$.

3° 对 $\mathscr{L}$中任意常量符号 C 及任意 $a \in \mathrm{dom}(p)$,当且仅当 $C^{\mathscr{B}} = p(a)$时有 $C^{\mathscr{U}} = a$.

由上面的定义可以看出,部分同构是一个局部化概念.它仅涉及模型 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$的一部分,即 $\mathrm{dom}(p)$与 $\mathrm{rg}(p)$而与其它元素无关.

若 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$是语言 $\mathscr{L}$的两个模型,如果存在 $\mathscr{U}$到 $\mathscr{B}$的部分同构集 $P(\neq\varnothing)$且满足下列条件,则称 $\mathscr{U}$与 $\mathscr{B}$是部分同构模型,记作 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$.

1° 对任意$p\in P, a\in A$,存在 $q\in P$ 使$p\subset q$ 且 $a\in \mathrm{dom}(q)$;

2° 对任意$p\in P, b\in B$,存在 $q\in P$ 使$p\subset q$ 且 $b\in \mathrm{rg}(q)$.

若 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$部分同构,P 是满足上述定义的非空部分同构集,则常记作 $P:\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$.

与上述部分同构概念密切相关的还有另一概念——有限同构.设 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$是一阶语言 $\mathscr{L}$的两个模型,如果存在满足下列条件的 $\mathscr{U}$到 $\mathscr{B}$的部分同构集组成的序

列 $P_i: i<\omega$，则称 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$是有限同构的.

1° 对任一 $n<\omega$ 有 $P_n\neq\varnothing$；

2° 对任一 $p\in P_{n+1}$，$a\in A$，存在 $q\in P_n$ 使得 $p\subset q$ 且 $a\in \mathrm{dom}(q)$；

3° 对任一 $p\in P_{n+1}$，$b\in B$，存在 $q\in P_n$ 使 $q\supset p$ 且 $b\in \mathrm{rg}(q)$.

若 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$有限同构，$P_n: n<\omega$ 是满足上述定义的部分同构集序列，则常记作 $(P_n)_{n<\omega}: \mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$.

3.2.6 基本性质

上面介绍的各种模型之间的关系存在着许多重要而基本的性质，罗列部分如下：

设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$都是一阶语言 L 的模型，则

1°若 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$、$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{C}$，则 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{C}$；

2°若 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$、$\mathscr{B}\prec\mathscr{C}$，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{C}$；

3°若 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$，$\mathscr{U}\prec\mathscr{C}$且 $\mathscr{B}\prec\mathscr{C}$，则 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$；

4°若 $\mathscr{U}\prec\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$；

5°若 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$；

6°若 $\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$有限且 $\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$；

7°若 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$；

8°若 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$，则 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$；

9°若 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$且 $\mathscr{U}$为有限模型，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$；

10°若 $\mathscr{U}\cong_p\mathscr{B}$，$\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$为可数模型，则 $\mathscr{U}\cong\mathscr{B}$；

11°(Fraissé 定理)若 $\mathscr{L}$中只含有有限多个关系符号；$\mathscr{U}$、$\mathscr{B}$是 $\mathscr{L}$的模型，则当且仅当 $\mathscr{U}\cong_f\mathscr{B}$时，$\mathscr{U}\equiv\mathscr{B}$.

3.3 一阶模型论中的基本定理

3.3.1 一阶逻辑完全性定理

1930年哥德尔给出一阶逻辑的完全性定理，1949年亨钦用常量法把哥德尔完全性定理推广到一般形式，亨钦所采用的常量方法已成为模型论中的重要方法之一，限于篇幅在此不作详细介绍，具体内容可见文献[1].下面仅罗列定理内容.

定理1(哥德尔完全性定理) 设 $\mathscr{L}$是一阶语言，φ 是 $\mathscr{L}$的句子，当且仅当 φ 是 $\mathscr{L}$的永真句子时，φ 是 $\mathscr{L}$的定理，即当且仅当$\models\varphi$ 时，$\vdash\varphi$.

定理2(广义完全性定理) 设 $\mathscr{T}$是 $\mathscr{L}$的句子集，当且仅当 $\mathscr{T}$有模型时，$\mathscr{T}$和谐.

3.3.2 紧致性定理与 LST 定理

紧致性定理与 LST 定理刻画了一阶模型论的特征，其中，紧致性定理尤其是一阶模型论的基础，整个一阶模型论几乎都可以看成是紧致性定理的推论.

定理 3(紧致性定理) 当且仅当 Σ 的每个有限子集有模型时,句子集 Σ 有模型.

定理 4(升 LST 定理) 如果理论 T 有无限模型,则对任意一个基数 $\alpha \geqslant \|\mathscr{L}\|$,$T$ 有势为 α 的模型.

定理 5(降 LST 定理) 语言 $\mathscr{L}$ 的句子集 T 如果有模型,则 T 有势小于等于 $\|\mathscr{L}\|$ 的模型.

定理 6(强升 LST 定理) 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个无限模型,则 $\mathscr{U}$ 有任意大的初等扩充模型.此处任意大指比 $\|\mathscr{L}\|$ 大的任意基数.

定理 7(强降 LST 定理) 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的无限模型,$X \subset A$ 则对任意基数 β,若 $\|\mathscr{L}\| \leqslant \beta \leqslant |A|$,$|X| \leqslant \beta$,则 $\mathscr{U}$ 必有势为 β 的初等子模型 $\mathscr{B}$ 使 $X \subset B$,其中 B 为 $\mathscr{B}$ 的论域.

3.3.3 一阶逻辑的完全理论

一阶语言的句子集也称为理论.当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任意一个句子 α,有 $T \vdash \alpha$ 或 $T \vdash \neg\alpha$ 成立时,$\mathscr{L}$ 的和谐句子集 T 称为完全理论.并非每个和谐句子集都是完全理论,例如,$\mathscr{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$,佩亚诺(Peano)算术公理组成的句子集是和谐的,因为 $\langle N, +, \cdot, s, o\rangle$ 是它的一个标准算术模型.然而,1931 年哥德尔证明佩亚诺公理组成的句子集是不完全的,这就是著名的哥德尔不完全性定理.下面的一些性质可用来判断一个理论是否有完全理论.

1° 语言 $\mathscr{L}$ 的任何一个极大和谐句子集是完全理论.

2° 若 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型,则 $\mathrm{Th}\mathscr{U} = \{\varphi : \mathscr{U} \models \varphi\}$ 是完全理论.

3° 当且仅当 $\mathscr{L}$ 的一个和谐理论的任意两个模型均初等等价时,该理论是完全的

4° 若 $\mathscr{L}$ 是仅含有限多个关系符号的一阶语言,T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论,则当且仅当 T 的任意两个模型均有限同构时,T 为完全理论.

在判定一个理论是否为完全理论的方法中,有一个重要的判别方法——Vaught 判断法.为介绍这个方法,先简要介绍范畴理论的概念.所谓理论 T 是一个范畴理论指 T 的任意模型均同构.由 LST 定理可知,当且仅当 T 只有同构的有限模型时,理论 T 是范畴理论.从而在同构意义下,一个理论 T 是范畴理论的充要条件是 T 仅有一个有限模型.这就使范畴理论这个概念很狭隘而没有普遍意义.而相对较弱的 α-范畴概念却是有趣的,所谓理论 T 是 α-范畴是指若 T 有势为 α 的模型,则 T 任意两个势为 α 的模型均同构.利用 α-范畴概念,可以判别理论 T 是否为理论完全的,即如下判别法.

定理 8(Vaught 判别法) 若理论 T 没有有限模型且对某个无限基数 $\alpha \geqslant \|\mathscr{L}\|$,$T$ 是 α-范畴的,则 T 是完全理论.

除了完全理论外,模型论中还有另一个讨论理论完全性的概念——模型完全理论.这个概念是鲁滨逊引入的一个重要概念,其具体定义如下:所谓 T 是模型完全理论指对 T 的任意两个模型 $\mathscr{U}$,$\mathscr{B}$,若 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}$ 则 $\mathscr{U} \prec \mathscr{B}$.当已知某个理论是模型完全理论时,有一种新的方法判别它是否为完全理论,这就是鲁滨逊判别法.

定理 9(鲁滨逊判别法) 设 T 是模型完全理论,则有:

1° 如果 T 的任意两个模型能同构嵌入 T 的第三个模型,则 T 是完全理论;

2° 如果 T 有一个模型能同构嵌入 T 的任意模型,则 T 是完全理论.

运用上述鲁滨逊判别法的前提是判定 T 是模型完全理论.下面定理给出了理论 T 是模型完全理论的几个充要条件.

定理 10 设 T 是语言 $\mathscr{L}$ 的理论,则下述四个条件互相等价:

1° T 是模型完全理论;

2° 若 $\mathscr{U}$ 是 T 的任意一个模型,则 $T\cup\Delta_{\mathscr{U}}$ 是 $\mathscr{L}_A$ 的完全理论,其中

$\Delta_{\mathscr{U}}=\{\varphi:\varphi$ 是 $\mathscr{L}_A$ 的原子句子或原子句子的否定且 $\mathscr{U}_A\models\varphi\}$

3° 若 $\mathscr{U},\mathscr{B}$ 是 T 的任意两个模型,如果 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{B}$,则 $\mathscr{L}_A$ 中每个存在句 φ 如在 $\mathscr{B}_A$ 中真就在 $\mathscr{U}_A$ 中真;

4° 对 $\mathscr{L}$ 中每个存在公式 φ,都有一个全称公式 ψ,使 $T\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$.

除了上述定理,还可用 Lindström 定理来判别一个理论是模型完全的理论.为此,介绍模型链及其并的概念.称 $\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{U}_\beta\subseteq\cdots(\beta<\alpha)$,这样一个递增序列为**模型链**.若对每个 $\beta<\alpha$,$\mathscr{U}_\beta$ 均为 T 的模型,则称该模型链为 T 的模型链.现定义模型 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$ 为模型链的并,具体定义如下:

1° $\mathscr{U}$ 的论域 $A=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta$,其中,$A_\beta$ 是 $\mathscr{U}_\beta$ 的论域;

2° 对 $\mathscr{L}$ 中每个关系符号 R,$R^{\mathscr{U}}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}R^{\mathscr{U}_\beta}$;

3° 对 $\mathscr{L}$ 中每个函数符号 F,$F^{\mathscr{U}}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}F^{\mathscr{U}_\beta}$;

4° 对 $\mathscr{L}$ 中每个常量符号 C,$C^{\mathscr{U}}=C^{\mathscr{U}_\beta}(\beta<\alpha)$.

由于 $\{\mathscr{U}_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 是模型的递增链,上述定义显然是有意义的并由定义易知,对每个 $\beta<\alpha$,$\mathscr{U}_\beta\subseteq\mathscr{U}$.

定理 11(Lindström 定理) 设 T 是可数语言 $\mathscr{L}$ 的和谐理论,若 T 满足下列三个条件:

1° T 的每个模型都无限;

2° T 的模型链的并仍是 T 模型;

3° 对某个无限基数 α,T 是 α-范畴理论,

则 T 是模型完全理论.

3.3.4 模型的初等链与保持性定理

上面提到模型递增链概念,一般来说,理论 T 的递增链的并所形成的模型不一定仍然是理论 T 的模型,但对于初等链而言,结论是成立的.所谓模型链 $(\mathscr{U}_\beta)_{\beta<\alpha}$ 是初等链指 $\mathscr{U}_0\prec\mathscr{U}_1\prec\cdots\prec\mathscr{U}_\beta\prec\cdots,\beta<\alpha$,即对任意 $\beta<\gamma<\alpha$ 有 $\mathscr{U}_\beta\prec\mathscr{U}_\gamma$.

定理 12(初等链定理) 若 $\{\mathscr{U}_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 是模型的初等链,$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$,则对任意 $\beta<\alpha$,$\mathscr{U}_\beta\prec\mathscr{U}$.

定理 13 若 T 是 $\mathscr{L}$ 的模型完全理论,$\{\mathscr{U}_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 是 T 的模型链,$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathscr{U}_\beta$,则

$\mathscr{U}\models T$.

初等链定理有许多重要的应用,其中之一就是利用初等链可以证明一些保持性定理.在此罗列一些保持性定理.

首先介绍几个基本概念.若理论 T 的模型的子模型仍为 T 之模型,则称 T 在子模型下保持;如果 T 的模型链的并仍然是 T 的模型,则称 T 在链并下保持;如果 T 模型的同态模型仍是 T 的模型,则称 T 在同态模型下保持.以上这些都是理论 T 的语义特征,保持性定理将给出与之等价的语法特征.

定理 14 当且仅当 T 有全称公理集(即 Π_1 公理集)时,理论 T 在子模型下保持.

定理 15 当且仅当 T 有全称存在公理集(即 Π_2 公理集)时,理论 T 在链并下保持.

定理 16 当且仅当 T 有正公理集时,和谐理论 T 在同态下保持.(即 T 的公理集由正句子组成,所谓公式 φ 是正公式是指 φ 由原子公式经 $\wedge$, $\vee$ 和 $\forall$, $\exists$ 联结而成.)

3.3.5 模型论力迫法

20 世纪 60 年代初,科恩(P.J.Cohen)创造了集合论力迫法.科恩用这种力迫法证明了连续统假设与 ZFC 公理系统的和谐性及独立性.60 年代末鲁滨逊把力迫法引进模型论,提出了模型论中的有限力迫与无限力迫两种方法.Keisler 用有限力迫法证明了省略型定理,并给出了广义量词逻辑的模型论力迫法.后来各种模型论力迫法纷纷被提出来,由此引出的概念、力迫伴随理论、模型伴随理论等使模型论研究开拓了一个新方向.本段介绍有限力迫的基本概念与结果.

首先,介绍有限力迫的基本概念.设 $\mathscr{L}$ 是一个形式语言,C 是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的无限新常量集,记 $\mathscr{L}(C)$ 为 $\mathscr{L}$ 的简单膨胀 $\mathscr{L}\cup C$.设 T 是语言 $\mathscr{L}$ 中的和谐理论,任取 $\mathscr{L}(C)$ 中有限多个原子语句或原子语句的否定组成的集合 p,如果 $T\cup p$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的和谐句子集,就称 p 是理论 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的一个条件.一般约定,$\varnothing$ 集也看作是个条件.下文常以 p,q,r 或 p_1,q_1 等表示 T 条件.

设 φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 的一个句子,称 T 的条件 p 有限力迫 φ,记作 $p \Vdash_{T,\mathscr{L}(C)} \varphi$ 或简记作 $p\Vdash\varphi$,归纳定义如下:

1° φ 是原子语句,当且仅当 $\varphi\in p$ 时,$p\Vdash\varphi$.

2° 若 φ 形如 $\varphi_1\vee\varphi_2$,当且仅当 $p\Vdash\varphi_1$ 或 $p\Vdash\varphi_2$ 时,$p\Vdash\varphi_1\vee\varphi_2$.

3° 若 φ 形如 $\exists x\psi(x)$,当且仅当 $\exists c\in C$ 使得 $p\Vdash\varphi(c)$ 时,$p\Vdash\varphi$.

4° 若 φ 形如 $\neg\psi$,当且仅当不存在条件 q 使得 $q\supset p$ 且 $q\Vdash\psi$ 时,$p\Vdash\varphi$.

由上面的定义可以看出,力迫关系与一阶语言 $\mathscr{L}$、$\mathscr{N}$ 的理论 T 以及新常量集 C 有关,但实际上,新常量集 C 在力迫关系中并无实质性作用.下面的定理说明,对两个不同的无限新常量集 C,C',如果 $C\subset C'$,对 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件 p 和句子 φ,p 在 $\mathscr{L}(C)$ 中力迫 φ 与 p 在 $\mathscr{L}(C')$ 中力迫 φ 是一致的.因此,力迫关系与新常量集的势无关,而对不同的新常量集,除了符号不同之外并没有具体意义上的区别.所以,对任意的一阶语言 $\mathscr{L}$,任意的理论 T,可以任取一个可数无限新常量集 C,在 $\mathscr{L}(C)$

中考虑力迫关系.

定理 17　设 C, C' 都是不在 $\mathscr{L}$ 中出现的无限新常量集, $C \subseteq C'$, 设 T 是 $\mathscr{L}$ 中的和谐理论, p 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的一个条件, $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}(C)$ 中的句子,则当且仅当 $p \Vdash_{\mathscr{L}(C')} \varphi$ 时, $p \Vdash_{\mathscr{L}(C)} \varphi$.

除上面介绍的力迫关系外,还有一种弱力迫关系,其具体定义如下:

设 p 是 T 的一个条件, φ 是 $\varphi(C)$ 的句子,若 $p \Vdash \neg\neg\varphi$ 就称 p 弱力迫 φ,记作 $p \Vdash^* \varphi$.

易知,当且仅当对任意条件 $q \supset p$ 有 $q \nVdash \neg\varphi$,即对任意条件 $q \supset p$,存在 $r \supset q$ 使得 $r \Vdash \varphi$ 时, $p \Vdash^* \varphi$. 关于力迫与弱力迫有如下一些基本性质:

1° 若 $p \Vdash \varphi$,则 $p \Vdash^* \varphi$;

2° 若 $p \Vdash \varphi$ 且 $q \supset p$,则 $q \Vdash \varphi$;

3° 对任意 ψ, p 不能同时力迫 ψ 和 $\neg\psi$;

4° 若 $\psi \in p$,则 $p \Vdash \psi$;

5° 若 ψ 是原子句或原子句的否定且 $p \Vdash \psi$,则 $P \cup \{\psi\}$ 也是 T 的条件;

6° 对任意句子 φ, p 不能同时弱力迫 φ 及 $\neg\varphi$;

7° 若 $p \Vdash^* \varphi$, $q \supset p$,则 $q \Vdash^* \varphi$;

8° 当且仅当 $p \Vdash \neg\varphi$ 时, $p \Vdash^* \neg\varphi$;

9° 当且仅当对任意 $c \in C$, $p \Vdash^* \varphi(C)$ 时, $p \Vdash \forall x\varphi(x)$.

下面介绍有限力迫的兼纳模型存在定理. 如果 T 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的和谐理论, C 是无限新常量集, G 是膨胀语言 $\mathscr{L}(C)$ 中原子句及原子句的否定组成的集合. 若 G 满足下列条件,则称 G 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集,简称 T-兼纳集(或 T-脱殊集).

1° G 的任意有限子集都是 T 的条件;

2° 对 $\mathscr{L}(C)$ 中的任意句子 φ,存在 $p \subseteq G$,使 $p \Vdash \varphi$ 或 $p \Vdash \neg\varphi$.

当存在 T 条件, $p \subseteq G$ 使 $p \Vdash \varphi$,就称 G 力迫 φ,记作 $G \Vdash \varphi$. 如果 G 是 T-兼纳集, φ 是 $\mathscr{L}(C)$ 中句子,可以严格证明 $G \Vdash \varphi$ 或 $G \Vdash \neg\varphi$ 恰有一个成立. 下面的定理保证了兼纳集的存在性.

定理 18(兼纳集存在定理)　设 $\mathscr{L}$ 是可数语言, C 是可数无限新常量集, T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论, p 是 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的条件,则 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中有兼纳集 G 使得 $p \subseteq G$.

需要指出的一点是,上述定理中 $\mathscr{L}$ 可数是必不可少的条件, S. Shelah 和 P. Henrard在 $\mathscr{L}$ 不可数情形下举例说明和谐理论 T 可以没有兼纳集.

定理 19(兼纳模型存在定理)　设 G 是理论 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集,则存在 $\mathscr{L}(C)$ 的模型 $\mathscr{U}$ 满足下列条件:

1° $\mathscr{U}$ 的论域 A 中每个元素都是某个新常量符号 $c \in C$ 的解释;

2° 对 $\mathscr{L}(C)$ 中任意一个句子 φ,当且仅当 $G \Vdash \varphi$ 时, $\mathscr{U} \models \varphi$.

一般称满足上述条件的模型 $\mathscr{U}$ 为 G 生成的兼纳模型.有时以 $\mathscr{U}(G)$ 表示 G 生成的兼纳模型. $\mathscr{U}(G)$ 在语言 $\mathscr{L}$ 中的归约也叫做 T 的兼纳模型. 有一点必须指出,若对和谐理论 T 不加限制, T 的兼纳模型一般不是 T 的模型.

定理 20(兼纳模型唯一性定理)　若 G 是理论 T 在 $\mathscr{L}(C)$ 中的兼纳集, $\mathscr{U}_1$ 和

$\mathscr{U}_2$ 都是 $\mathscr{K}(C)$中由 G 生成的兼纳模型，则 $\mathscr{U}_1 \cong \mathscr{U}_2$.

定理 21　若和谐理论 T 是归纳理论(即 T 保持模型链的并)，则 T 的兼纳模型是 T 的模型.

上面介绍的兼纳模型是对力迫关系定义的，下述定理说明改用弱力迫定义的兼纳模型将和用力迫定义的没有区别.

定理 22　设 $\mathscr{U}$ 是 G 生成的兼纳模型，条件 $p \subset G$，若 $p \Vdash^{*} \varphi$ 则 $\mathscr{U} \models \varphi$.

除了上面介绍的有限力迫，还有所谓的无限力迫，受篇幅所限，这部内容略去，有兴趣的读者可阅读有关文献.

3.3.6　省略型定理与内插定理

本段介绍模型论中很基本的两个定理——省略型定理与内插定理. 在介绍定理前，先介绍相关的基本概念与记号.

设 $\mathscr{L}$ 是形式语言，以 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 $\mathscr{L}$ 中自由变元都在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之中的公式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型. $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$，$\mathscr{U} \models \Sigma[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示对任意公式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有 $\mathscr{U} \models \varphi[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

设 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，如果存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ 使 $\mathscr{U} \models \Sigma[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，则称 $\mathscr{U}$ 实现 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，否则就称 $\mathscr{U}$ 省略 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

设 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，如果 $T \cup \{\exists x_1 x_2, \cdots, x_n \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 和谐，则称公式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与理论 T 和谐.

设 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 的公式集，T 是 $\mathscr{L}$ 的理论，如果存在与 T 和谐的公式 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使对任意公式 $\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有 $T \models \forall x_1, x_2, \cdots, x_n(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \rightarrow \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n))$，就称理论 T 局部实现 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，否则就称 T 局部省略 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

定理 23　设 T 是完全理论，T 有模型省略公式集 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 T 局部省略 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

定理 24(省略型定理)　设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，T 局部省略公式集 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 T 有一可数模型省略 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

定理 25　设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，则当且仅当 T 有完全扩充 $\overline{T}$ 局部省略 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 时，T 有一个可数模型省略公式集 $\Sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

需要指出的一点是，省略型定理对含无限多个变元的公式集不成立，但对无限多个含有限变元的公式集仍有下述省略型定理成立.

定理 26　设 $\mathscr{L}$ 是可数语言，T 是 $\mathscr{L}$ 的和谐理论，$\Sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_{n1})$，$\Sigma_2(x_1, x_2, \cdots, x_{n2})$，$\cdots$，$\Sigma_r(x_1, x_2, \cdots, x_{nr})$，$\cdots$，是 $\mathscr{L}$ 的公式集. 如果 T 局部省略每个 $\Sigma_r(x_1, x_2, \cdots, x_{nr})$，则 T 有可数模型省略所有 $\Sigma_r(x_1, x_2, \cdots, x_{nr})$.

省略型定理是构造模型的有效方法，在模型论中有许多应用，限于篇幅这部分内容略去. 另外，值得指出的一点是，通过改变局部省略的定义，省略型定理可以推

广到不可数语言,即所谓的 α-省略型定理.

下面介绍内插定理,它是模型论的重要定理,它有多种形式,下面引出其三种形式.

定理 27(Craig 内插定理) 设 φ,ψ 是 $\mathscr{L}$ 的两个句子,$\varphi\models\psi$,则存在句子 θ 使得

1° $\varphi\models\theta$ 且 $\theta\models\psi$;

2° θ 中出现的每个非逻辑符号(等号除外)都在 φ,ψ 中同时出现.

上述 Craig 内插定理还有一种等价形式,即下面的鲁滨逊和谐定理.

定理 28(鲁滨逊和谐定理) 设 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ 是两个语言,$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2$,设 T_1,T_2 分别是 $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ 的和谐理论,$T_1\cap T_2=T$ 是 $\mathscr{L}$ 的完全理论,则 $T_1\cup T_2$ 是 $\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2$ 的和谐理论.

内插定理除了上面的形式外,还有一种更强的形式.

定理 29(Lydon 内插定理) 设语言 $\mathscr{L}$ 中不含函数符号和常量符号,如果 $\mathscr{L}$ 的句子 φ,ψ 满足 $\varphi\vdash\psi$,则 $\mathscr{L}$ 中一定有句子 θ 使得

1° $\varphi\vdash\theta$ 且 $\theta\vdash\psi$;

2° θ 中正出现的关系符号也在 φ,ψ 中都正出现;θ 中负出现的关系符号在 φ,ψ 中都有负出现.

上述定理中关系符号的正(或负)出现是指一个关系符号在句子中出现于偶数个(或奇数个)"¬"号的辖域内.等价地说,当句子化成前束范式时关系符号之前不带有"¬"的称为正出现,否则称为负出现.

4 递 归 论

4.1 可计算性与可判定性

递归论起源于 20 世纪 30 年代.当时出现了几种有关可计算性和可判定性的较直观的定义.例如,人们用图灵机,马尔可夫算法,λ-演算,带 μ-算子的递归式和带归宿函数的一般递归式等计算模型来定义上述这些概念.但是,丘奇(A.Church)等人发现并证明所有这些定义都是等价的,即它们都产生出相同的函数类和相同的判定问题的类.因此,人们普遍接受所谓的丘奇论题:**可计算性(可判定性)等价于图灵可计算性(图灵可判定性)**.换句话说,每个算法可计算的函数(可判定的问题)都是图灵可计算的(图灵可判定的).因此,任何算法都可用图灵机加以实现.

递归论主要研究自然数集 N 上的算法可计算函数(算法可判定问题可转为它的特征函数的可计算性加以研究).具体地讲,一个半函数 f:N→N,当且仅当存在一个算法(亦称为能行过程),使得对任意给定的自然数 n,如果 n 在 f 的定义域中,则该算法必在有限步内停机并且输出函数值 $f(n)$,否则,它将永不停机(不给出任何输出)时,f:N→N 称为算法可计算.根据丘奇论题,这也就是可计算函数的

定义.类似地,一个判定问题常可归结为自然数集 N 的子集 S 的判定问题.因此,当且仅当集合 S 的特征函数 f_c 是一个可计算函数时,S 可判定.这里,特征函数 f_c 定义为 N 到 N 中的如下半函数:

$$f_c(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n\in S \text{ 时};\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

4.2 图灵机与图灵可计算

既然可计算性和可判定性都等价于图灵可计算性和图灵可判定性.因此,有必要介绍一下图灵机的概念.为简单起见,先介绍单带图灵机,仿此容易将其推广为多带图灵机.

一个单带图灵机 M 由一个有限控制器(含有限个状态),一条分成若干个单元的可向一边或两边无限延伸的工作带和每次至多只能在带上移动一个单元并能读写所指向的单元中的字符的读头所组成.通常将图灵机 M 描述为一个 6 元组,即

$$M=\langle Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F\rangle,$$

其中,Q 为状态的有限集合,Γ 为带符号的有限集合(包括空白符号'B'在内),$\Sigma\subseteq\Gamma$ 为输入符号集合(它不包括空白符号),δ 为移步函数(一般为半函数)

$$\delta: Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\},$$

其中,'×'表示集合之间的笛卡儿乘积,L 和 R 分别表示读头向左和向右移动一个单元,q_0 为 M 的初始状态(即 M 启动时的状态),F 为终结状态集合,它可以包括接受状态,拒绝状态,疑问状态等.

举一个简单的例子来说明图灵机的设计方法和工作原理.假定需要计算字母表 $\Sigma=\{0,1\}$ 上的双倍函数,即 $f(x)=2\cdot x$,则我们可设计如下的图灵机 M:

$$\begin{cases}q_0 0/1\to q_0 0/1R;\\ q_0 B\to q_a 0.\end{cases}\qquad (*)$$

这里仅使用了两个状态 q_0(初始状态)和 q_a(终结接受状态).图灵机 M 一开始应将其读头指向输入 x 的第一个字符(0 或 1)并且从初始状态 q_0 出发,按上述设计的 δ 函数(即(*))一步一步地进行,直到遇到终结状态 q_a 便停机(为了简单起见,不允许带上出现 0,1,B 以外的字符,即 $\Gamma=\{0,1,B\}$).此时,带上留下的值便为函数值,即 $2x$.例如,设初始输入 $x=110110$,则图灵机 M 将按(*)的第一条规则将读头不断向右移动,直到遇到空白 B,然后,它按(*)的第二条规则,将 B 改写成 0 而停机,此时,带上留下的值为 1101100,也就是说,M 将 110110(即 54)变成 1101100(即 108).因此,M 计算了函数 $2\cdot x$.按定义,函数 $2\cdot x$ 便是一个可计算函数.

那么究竟哪些自然数函数是可计算函数呢?粗略地讲,日常遇到的函数几乎都是可计算函数.例如,加,减,乘,除,乘方,开方,求最大公约数,求最小公倍数等等(这里,除法和开方均需取整,即$[n/m]$和$[\sqrt{n}]$,而减法 $x-y$、当 $x<y$ 时其值定义为零),为了证明这些函数皆为可计算函数,逐个去构造它们的图灵机是一件繁琐而乏味的差使.一个等价而有效的数学方法便是使用递归式.

4.3　原始递归式与原始递归函数

下面先定义几乎包括一切日常使用的可计算函数的原始递归函数.一切从本原函数出发经过有限次使用函数复合和原始递归式而得的函数皆称为**原始递归函数**.这里的本原函数是指以下三个简单的函数.

(1)后继函数:Sx,即 $x+1$.

(2)零函数:$0x$,即其值恒为零.

(3)广义么函数:$I_{n,m}(x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n)=x_m(1\leqslant m\leqslant n)$,即其值等同于它的某个变目.

函数复合即指通常的由函数 $f(n)$和 $g(n)$产生出新函数 $f(g(n))$,例如,由 $\sin x$,$\cos x$ 和除法,经过复合便可产生出新函数 $\tan x$(即 $\sin x/\cos x$).**原始递归式**通常指以下方程组:

$$\begin{cases}f(u,0)=g(u);\\f(u,sx)=h(u,x,f(u,x)),\end{cases}$$

其中,u 代表参数,它可以有若干个,而 x 称为递归变元.显然,原始递归式是由函数 g 和 h 产生出新函数 f 的另一种运算.因此,如果已知 g 和 h 为原始递归函数,则新函数 f 也是原始递归函数.例如,加法为原始递归函数,因为,它可定义为

$$\begin{cases}u+0=u;\\u+Sx=S(u+x),\end{cases}$$

其中,第一个等式右端的 u 可理解为广义么函数 $I(u)$,而第二个等式右端的 S 为后继函数,它们都是本原函数.因此,加法由本原函数 $I(u)$和 $S(v)$经一次使用原始递归式而得,故依定义,加法为原始递归函数.

现在易证,乘法也为原始递归函数,这是因为,它可以借助于加法、零函数和原始递归式而产生如下:

$$\begin{cases}u\times O=O;\\u\times Sx=u\times x+u.\end{cases}$$

这里,第一式右端的 O 可理解为零函数 $O(x)$.因此,乘法由本原函数 $O(x)$和原始递归函数 $u+x$ 经一次使用上述原始递归式而得,故依定义,它也为原始递归函数.

并非所有的原始递归函数都可以经一次使用递归式而得,例如,减法 $u\dot{-}x$ 需先用一次原始递归式定义一个中间函数 $\mathrm{D}x$(当然,它也是一个原始递归函数):

$$\begin{cases}\mathrm{D}0=0;\\\mathrm{D}Sx=x.\end{cases}$$

然后,利用 $\mathrm{D}x$ 再使用一次原始递归式才得到函数 $u\dot{-}x$:

$$\begin{cases}u\dot{-}0=x;\\u\dot{-}Sx=\mathrm{D}(u\dot{-}x).\end{cases}$$

仿此也可作出其它常用的原始递归函数,如 x^2,$[x/y]$和$[\sqrt{x}]$等.

4.4 变异原始递归式

除了上述标准的原始递归式外,还有许多其它形式的递归式,它们在数学的论著中常可发现,例如

(1)串值递归式

$$\begin{cases} f(u,0)=g(u); \\ f(u,Sx)=h(u,x,f(u,x_1),\cdots,f(u,x_k)), \end{cases}$$

其中,$0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_k\leqslant x$.

(2)参数变异的递归式

$$\begin{cases} f(u,0)=g(u); \\ f(u,Sx)=h(u,x,f(p(u),x)), \end{cases}$$

其中,$p(u)$为与递归变元 x 无关的函数.

(3)多重递归式(以三重为例)

$$\begin{cases} f(u,x_1,x_2,x_3)=0, \text{当 } x_1x_2x_3=0 \text{ 时}; \\ f(u,Sx_1,Sx_2,Sx_3) \\ =g(u,x_1,x_2,x_3,f(u',x_1,v,v),f(u',Sx_1,x_2,v),f(u',Sx_1,Sx_2,x_3)), \text{其它}. \end{cases}$$

其中,u'和v均为u,x_1,x_2,x_3的已知函数.

4.5 非原始递归函数与一般递归函数

表面上看,上述这些递归式似乎比原始递归式更强.但是,容易证明,用这种递归式去代替原始递归函数定义中的原始递归式仍产生相同的函数类.那么,是否数学中出现的各式各样的可计算函数都是原始递归函数呢?答案是否定的,即存在非原始递归的可计算函数.阿克曼(W. Ackermann),彼德(R. Peter)和鲁滨逊相继给出了可计算的非原始递归函数的例子.

例如,以下式子定义的函数 f 便不是原始递归函数:

$$\begin{cases} f(0,n)=Sn; \\ f(Sm,n)=f(m,1); \\ f(Sm,Sn)=f(m,f(Sm,n)). \end{cases}$$

因此,虽然原始递归函数包括了几乎所有数学中常用的自然数函数,但是,由上述反例,它尚不能作为可计算函数的定义.因此,有必要引进更强的递归式,并且证明由此而得的更加一般的递归函数与用图灵机等模型产生的可计算函数相同,而且它包含了所有可计算的非原始递归函数的反例.这个更一般的递归式通常便称为一般递归式,即

$$\begin{cases} f(u,v,0)=v; \\ f(u,v,Sx)=h(u,x,f(u,v,g(u,x))). \end{cases}$$

4.6 计算复杂性

历史上，哥德尔为了证明他的不完全性定理而创造了递归函数等概念.随后，递归论得到了迅速的发展.但是，随着计算机的发展和推广使用，人们不但关心可计算性(能行性)，更重视可行性.这是因为，计算机的两大资源，即时间和空间，是有一定限制的．不可能让计算机计算1万年后才得出所需的结果，也不能使用上万亿个存储单元.那么，什么是可行可计算呢？我们说，能行可计算只强调计算的步数必须为有限步，而可行可计算进一步要求计算的步数不得超过输入长度的多项式次.更加精确地讲，当且仅当存在一个前面定义过的图灵机 M 和一个整系数的多项式 p，使得对任何输入 x，M 在 $p(|x|)$ 步内必停机并且在带上产生出函数值 $f(x)$ 时，函数 $f(x)$ 称为可行可计算的或多项式时间可计算的.这里，$|x|$ 表示输入 x 的长度(即 x 中出现的字符的个数).人们把多项式时间的算法称为好算法.事实上，能用计算机解决的实际问题大多有好算法，然而，迄今尚发现成百上千个实际问题未找到好算法，理论上也无法证明它们是否存在好算法.人们通常称这些问题为 NP 完全问题，并且证明，只要其中有一个问题有好算法，则一切 NP 完全问题便都有好算法，另一方面，如果能证明其中的任一个问题不存在好算法，则所有这些问题便都不存在好算法.那么，究竟这些问题有没有好算法呢？这个问题便是著名的 *P-NP* 问题.这个问题是由埃特蒙斯(Edmons)和哥勃哈姆(A. Cobham)于1965年首先提出来的，由于它的重要性，被人们称为计算机科学的核心问题.下面用具体的例子进一步阐明这个问题.

4.7 *P* 问题与 *NP* 完全问题

从离散数学等课程中得知，一个简单无向图 G 定义为一个非空的顶点集合 V 和一个不含自环和多重边的集合 $E\subseteq V\times V$ 的对偶 $\langle V, E\rangle$.如果在一个简单无向图 G 中存在经过每条边一次且仅一次的闭路，则称 G 为欧拉图且称这样的闭路为欧拉回路.类似地，如果在一个简单无向图 G' 中存在经过每个顶点一次且仅一次的闭路，则称 G' 为哈密顿图且称这样的闭路为哈密顿圈.现在，任给一个简单无向图 G，显然可问以下两个问题(即两个判定问题)：

(1) G 为哈密顿图吗？

(2) G 为欧拉图吗？

从递归论中的能行可判定性看，这两个问题都是能行可判定的，即，当给定 G 后，无论是(1)还是(2)，都可以在有限步内(顶点数 n 的全排列 $n!$ 步内)回答"是"或"否".但是，如果我们进一步要求可行性判定，那么，问题(2)是可行的，即它有好算法．这个算法是200多年前由欧拉(Euler)得到的.他证明了一条定理：一个连通图当且仅当它的每个顶点连接的边数皆为偶数时，它为欧拉图.因此，判定 G 是否为欧拉图的算法很简单，只需逐个检查 G 的每个顶点是否都连接了偶数多条边.容易看出，如果 G 的顶点数为 n，则该算法的判定次数至多为 $O(n^2)$ 次，因此，问题

(2)有好算法,即它是可行可判定的.那么问题(1)呢?答案尚不清楚,即既不知道它是否有好算法,又无法证明它一定不存在好算法.事实上,人们已经证明它是一个 NP 完全问题.对于这类问题,我们只能找到不确定的可行算法,即对输入 G 而言,首先需设法"猜"得一个闭路,然后在多项式步内验证它是否确为 G 的哈密顿圈.这种证法相当于使用了递归论中的多项式有界存在量词.显然,有好算法的问题是有不确定可行算法的问题的特殊情况.因此,如果将前一种问题的集合记为 P,而将后一种问题的集合记为 NP,则显然有 $P\subseteq NP$.但是,这个包含关系是真包含还是假包含呢?即,究竟 P 是否等于 NP?这便是上面已提到的 P-NP 问题的更加精确的表述.

4.8 不可解度论

除了能行性和可行性等重要概念外,递归论中又一个重要概念是递归可枚举性及其相关的不可解度理论.一个集合 S,如果为半递归函数的值域,则它称为递归可枚举的.换句话说,如果存在一个枚举集合 S 的能行过程,则说 S 为递归可枚举集合.显然,每个递归集皆为递归可枚举集,但是,逆定理并不成立,这是因为一阶逻辑中的可证公式的集合是递归可枚举集合,但是,它却不是递归集合.

在讨论可行性问题时,常需涉及两个集合间的多项式时间多一归约 $\leqslant_m^P$ 的概念和性质.这里更需要图灵归约 $\leqslant_T$ 的概念和性质.说 $A\leqslant_T B$ 相当于说 A 的判定可递归于 B 的判定.也就是说,在 A 的能行判定过程中可借助于外加信息 B 的帮助.显然,$\leqslant_T$ 是自反的和可传的.如果集合 A 和 B 同时满足 $A\leqslant_T B$ 和 $B\leqslant_T A$,则说它们是图灵等价的并且记为 $A\equiv_T B$,此时又说 A 和 B 的度是相等的.因此,度便是由 $\equiv_T$ 划分的集合的等价类.容易证明,度所构成的集合是半序集并且存在最小度 $\underset{\sim}{0}$,它就是含有递归集的度.根据枚举定理,含递归枚举集的度中必有最大度 $\underset{\sim}{0}'$,而且任何两个递归枚举度 $\underset{\sim}{a}$ 和 $\underset{\sim}{b}$ 都有上确界 $\underset{\sim}{a}\cup\underset{\sim}{b}$.1944 年波斯特(E.L.Post)提出了一个著名的开问题:是否存在异于 $\underset{\sim}{0}$ 和 $\underset{\sim}{0}'$ 的其它度(后人称这个开问题为波斯特问题)?这个问题经过 12 年的研究,于 1956 年被慕尼克(A.A.Muchnik)和弗莱勃格(R.M.Friedberg)解决了.他们证明了不可比较的递归枚举度的存在.他们所采用的证明方法称为优先法.这个方法在解决其它开问题中也发挥了很强的威力.萨克斯(G.E.Sacks)用这个方法证明了每个非零的递归枚举度皆可分裂成两个较小的递归枚举度并且进一步证明了递归枚举度是稠密的.1965 年尚菲特(J.R.Shoenfield)猜想:一切异于 $\underset{\sim}{0}$ 和 $\underset{\sim}{0}'$ 的递归枚举度都具有相同的性质.但是,这个猜想后来被拉赫浪(A.H.Lachlan)和亚斯(C.E.M.Yates)所否证.事实上,他们证明了存在不可比较的递归枚举度 $\underset{\sim}{a}$ 和 $\underset{\sim}{b}$,使得它们的下确界 $\underset{\sim}{a}\cap\underset{\sim}{b}$ 并不存在.他们又证明了存在不可比较的递归枚举度的极小对$\langle\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\rangle$,使得它们的下确界 $\underset{\sim}{a}\cap\underset{\sim}{b}$

$=\underset{\sim}{0}$.雅奇西(C.G.Jockusch)又猜想:不可杯度的集合可能满足匈非特猜想.但是,这一猜想又被阿姆勃斯比士(K.Ambos-Spies)等人所否证.总之,在不可解度的研究上,虽然波斯特问题已经得到解决,但是,新的开问题还在不断地涌现.因此,对度的性质的研究仍在继续进行并且已成为现代递归论中的一个重要组成部分.1987年苏阿(R.I.Soare)撰写了一本综述该领域主要成果的专著《递归枚举集和度》(Recursively Enumerable Sets and Degrees),后来,中科院杨东屏教授又撰写出版了一本《递归论文选》(Selected Papers on Recursion Theory).这些材料都深刻全面地反映了该方向的理论和结果.

4.9　近代两方向的对比

将波斯特问题与 P-NP 问题联系起来加以研究是很有趣的.因为,一切有好算法的集合都是多项式时间等价的,因此,可称其为多项式度或 p 度.众所周知,一切 NP 完全集又都是多项式时间等价的,因此,又可称其为 p' 度.那么,P-NP 问题便有类似于波斯特问题的形式:在 p 度与 p' 度之间是否还存在其它的度.显然人们会自然地联想到解决波斯特问题的强有力的方法——优先法.但是,优先法所构造的递归过程中所借助的外部信息源是一个递归集.如果能够构造或证明该集合有好算法,即它属于 P,则便可证得 $P\neq NP$.但是,迄今无人能使优先法满足这样的要求.因此,运用优先法来讨论 P-NP 问题的最佳结果是 1975 年由贝克(T.Baker),吉尔(J.Gill)和苏洛凡(R.Solovay)得到的结果.他们用优先法证明存在相对世界 B(即 Oracle B)使得 $P(B)\neq NP(B)$.作个不恰当的比喻:P-NP 问题在地球上尚未得到解决,但是,在火星上解决了.那么究竟何时能在地球上解决这一难题呢? 这尚需计算机科学家、数学家们的艰苦奋斗和不断的创新!

5　证　明　论

证明论是数理逻辑的一个分支,它以证明(数学中的推理)本身作为研究对象.当然,对于证明的研究,一直可以追溯到亚里士多德,然而近代证明论的创始人却是希尔伯特(Hilbert).1904 年,希尔伯特在第三届国际数学家大会上作了题为"论逻辑和算术的基础"的学术讲演,他在该讲演中第一次提出了应该把证明本身作为研究对象的思想,刻画了创建证明论的总体目标,1922 年,希尔伯特又在另外两次讲演中进一步阐明了证明论的思想和基础.在这里,我们将介绍哥德尔不完全性定理、甘岑系统和艾尔伯朗定理.

5.1　哥德尔不完全性定理

哥德尔(K.Gödel)不完全性定理是数理逻辑发展史上的划时代成果,曾被誉为

“逻辑在现代所取得的最重要进展之一”,“数学与逻辑发展史中的一个里程碑.”本段介绍该定理内容.

下面以PA表示佩亚诺算术形式化系统.所谓算术形式化系统,简言之,就是以一阶逻辑的形式语言陈述自然数公理系统而得到的形式理论.

哥德尔不完全性定理有二个,下面陈述的定理称为哥德尔第一不完全性定理.

定理1 存在PA语句φ使得:

1° 若PA是相容的,则PA$\nvdash\varphi$;

2° 若PA是ω-相容的,则PA$\nvdash\neg\varphi$.

所谓PA是ω-相容的是指,对任何恰含一个自由变元的PA-公式$C(x)$,句子$C(\bar{0}),C(\bar{1}),\cdots,C(\bar{n})\cdots$和$\neg\forall xC(x)$不都是PA可证的.在上述定理中,$\omega$-相容条件其实是不必要的.罗塞(Rosser)构造了一个更为复杂的哥德尔句D,在PA相容性条件下证明了D与$\neg D$在PA中均不可证.即下述罗塞不完全性定理.

定理2(罗塞不完全性定理) 存在PA句子D,使得如果PA相容,则D与$\neg D$在PA中均不可证.

哥德尔不完全性定理的意义并不局限于PA系统,其证明方法具有普遍意义,对任何一个强于PA系统的形式系统,均可构造出一个哥德尔句φ使φ、$\neg\varphi$在该系统中均不可证.

定理3 对任何一个足够强(即包含形式数论作为其子系统)的形式理论S,如果S相容,则S不完全.

在哥德尔与罗塞不完全性定理的证明中构造了一些在PA中形式不可判定的命题,它们均是人为刻意制造出来的,显得极不自然.1931年以来,数学家们想在一阶佩亚诺算术中找一个严格数学的、不可证的真命题.1977年,帕里斯(J.Paris)与哈林顿(L.Harrington)在有限组合论中找到了一个定理,它在PA中是不可证的.

除了上述哥德尔第一不完全性定理外,哥德尔第二不完全性定理是一条意义更深远的定理,其表述如下.

定理4(哥德尔第二不完全性定理) 若T是包含算术系统的相容形式理论,则$T\nvdash\mathrm{Con}_T$.其中Con_T是断言T相容的语句.

该定理表明,不可能用可反映于形式系统内部的有穷方法证明系统的相容性.这就说明希尔伯特规划中要求元数学中只能用有穷方法的限制是行不通的.甘岑在1936年用超穷归纳法证明了不加限制的形式算术是相容的,进一步说明不完全性定理对希尔伯特规划的修改是科学的.

5.2 甘岑系统与切割消去定理

一阶逻辑有多种演算系统,本节介绍甘岑(G.Gentzen)系统G及G^+.

用Γ,Δ表示公式的有限集合,一个矢列就是形如$\Gamma\vdash\Delta$的对象,直观上表示Γ中公式的合取式产生出Δ中公式的析取式.另外,下文中用Γ,φ表示$\Gamma\cup\{\varphi\}$.

1.甘岑系统的公理

(1)$\Gamma,\varphi\vdash\Delta,\varphi$;

(2)$\Gamma \vdash \Delta, t \equiv t$;其中 t 为项.

2. 甘岑系统的推理规则

($\wedge \vdash$) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$; ($\vdash \wedge$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$;

($\vee \vdash$) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$; ($\vdash \vee$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$;

($\neg \vdash$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Delta}$; ($\vdash \neg$) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg \varphi}$;

($\rightarrow \vdash$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta}$; ($\vdash \rightarrow$) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$;

($\forall \vdash$) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall v \varphi(v) \vdash \Delta}$; ($\vdash \exists$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists v \varphi(v)}$.

下面两规则($\vdash \forall$)($\exists \vdash$)要求变元 v 不在 $\Gamma \cup \Delta$ 中自由出现.

($\vdash \forall$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(v)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall y \varphi(y)}$; ($\exists \vdash$) $\dfrac{\Gamma, \varphi(v) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}$.

(等式规则)若 E 是($t_1 \equiv t_2$)或($t_2 \equiv t_1$),则

$$\frac{\Gamma, \varphi(t_1) \vdash \Delta, \psi(t_1)}{\Gamma, E, \varphi(t_2) \vdash \Delta, \psi(t_2)}.$$

上述公理及推理规则构成了系统 G. 系统 G^+ 是在 G 基础上增加规则 cut,它是 MP(modus Ponens)规则的对应物.

$$(\text{cut}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta}.$$

给定语句集 Γ 及公式 φ,如果存在 Γ 的有限子集 T 使得矢列 $T \vdash \{\varphi\}$ 通过公理及 G^+ 中的规则可得到,就称 φ 可从 Γ 中推出.

定理 5(G^+ 的完备性定理) 当且仅当 $T \models \varphi$ 时,语句 φ 在 G^+ 中可由语句集 T 推出.

定理 6(切割消除定理) 任何矢列应用 cut 规则可推出,则不用 cut 规则亦可推出. 即 G 与 G^+ 系统有相同的可推出矢列.

5.3 艾尔伯朗定理

艾尔伯朗(J. Herbrand)定理是数理逻辑中一条重要定理. 该定理包含了一种从谓词逻辑到命题逻辑(在某种意义下的)归约. 当然,这种归约不会完全,因为前一个理论是不可判定,后一个理论却是可判定的. 该定理为机械定理证明建立了一种重要方法,从而奠定了机械定理证明的基础.

在陈述艾尔伯朗定理前,先介绍艾尔伯朗形式的概念. 对一个呈前束范式的公式 Φ,我们用下述方法使其对应某个 $\exists$-公式 Φ_H,称 Φ_H 为 Φ 的艾尔伯朗型. 若 Φ 是 $\exists$-公式,则 $\Phi_H = \Phi$;若 Φ 呈形 $\exists x_1 \cdots x_n \forall y \psi(x, y, z)$,且 g 是不在 Φ 中出现的 n 元函数符号,则

$$\Phi_H = (\exists x_1 \cdots x_n \psi(\vec{x}, g(\vec{x}), \vec{z}))_H.$$

定理 7(艾尔伯朗定理) 令 Φ 是呈前束范式的公式，$\Phi_H = \exists_{x_1 x_2 \cdots x_n} \psi(\vec{x}, \vec{z})$ 是 Φ 的艾尔伯朗形式，其中 ψ 是无量词公式，则当且仅当有项的序列 $\vec{t}^1 = t_1^1, t_2^1, \cdots, t_n^1; \cdots; \vec{t}^k = t_1^k, t_2^k, \cdots, t_n^k$ 使公式 $\psi(\vec{t}^1, z) \vee \cdots \vee \psi(\vec{t}^k, \vec{z})$ 可证时，公式 Φ 可证.

6 非经典逻辑演算

下面按“多值逻辑”、“模态逻辑”和“非单调推理”等三大块分别论述.

6.1 多值逻辑

由本篇第 2 章中所论之经典二值逻辑演算可知，命题只有真假两个值，即任一命题非真即假. 然而对此的异议一直可以追溯到亚里士多德. 他指出，有如“明天发生海战”这类命题的真值当前无法决定，因而它应具有介于真假之间的某个中间值. 然而亚里士多德的这一思想长期没有得到发展，直到 20 世纪 20 年代，卢卡西维兹(Lukasiewicz)和波斯特(Post)才各自提出和发展了多值逻辑系统. 如果命题值取 $n(3 \leqslant n < \omega)$ 个值，则称为 n 值或有穷值逻辑系统，如果命题值取无穷多个值则叫做无穷值逻辑系统.

6.1.1 传统三值逻辑

1. 卢卡西维兹三值逻辑系统 L_3

卢卡西维兹将命题的第三值解释为“未决定的”或“可能的”. 该系统的原始命题联结词有否定词 $\neg$ 和蕴涵词 $\rightarrow$ 两个，分别读为“非”和“如果…，那么…”，其真值表为

p	$\neg p$
0	2
1	1
2	0

$p \rightarrow q$ (行 p，列 q)	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

其中 0 表示假，2 表示真，1 表示第三值. 该系统中的析取词、合取词和等值词均作为定义符号引入如下：

$$A \vee B \stackrel{\text{def}}{=\!=} (A \rightarrow B) \rightarrow B;$$

$$A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \neg(\neg A \vee \neg B);$$

$$A \leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=\!=} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

1931 年，瓦斯布格(Wajsberg)建立了卢卡西维兹三值逻辑 L_3 的形式公理系统.

(1)形式公理:

A1　$A \to (B \to A)$;

A2　$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

A3　$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

A4　$((A \to \neg A) \to A) \to A$.

(2)推理规则:

RD　$A, A \to B \vdash B$.

但是该三值系统 L_3 的命题联结词的含量是不完全的,直到1936年,斯勒别克(Slupecki)再引入一个新的命题联结词 T,将 L_3 扩充为一个命题联结词含量完全的三值逻辑系统,记为 LS_3. 关于 T 的真值表为:

p	Tp
0	1
1	1
2	1

另外,还要在 L_3 系统中增添两条公理而形成 LS_3 形式系统.

A5　$TA \to \neg TA$

A6　$\neg TA \to TA$

2. 克林(Kleene)三值逻辑系统

1952年,克林建立了一个三值逻辑系统,用以解决部分递归函数中无定义点问题,他将第三值解释为"未定义的"或"未知的",该系统记为 K_3,包含5个命题联结词,即 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$,其真值表为:

p	$\neg p$
0	2
1	1
2	0

$p \vee q$ (p \ q)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$p \wedge q$ (p \ q)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$p \to q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

$p \leftrightarrow q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

3. 波茨瓦尔(Bochvar)三值逻辑系统

1939年,波茨瓦尔建立一种三值逻辑,记为 B_3,试图以 B_3 作为配套于集合论的推理工具,进而解决集合论中的悖论问题,所以她将第三值解释为"无意义"或"悖论". B_3 系统会有 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ 等5个命题联结词,其真值表为

p	$\neg p$
0	2
1	1
2	0

$p \vee q$ (p \ q)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$p \wedge q$ (p \ q)	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$p \to q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	1	2
1	1	1	1
2	0	1	2

$p \leftrightarrow q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

6.1.2 中介逻辑

中介逻辑是20世纪80年代开始，由朱梧槚、肖奚安在中介原则(详见第3章)观点下，经过长期合作研究而建立、发展起来的一个逻辑系统，但在这里所陈述的中介逻辑，仅指狭义中介逻辑，即中介逻辑演算，记为ML．而ML也是一种三值逻辑系统，其中第三值被解释为反对对立面(P, ╕P)的中介对象，该中介对象部分地具有性质P，同时又部分地具有性质╕P，亦即$\sim P(x)\&\sim$╕$P(x)$．应当指出，ML只是广义中介逻辑的基础部分，也是中介公理集合论MS的配套的逻辑工具．而广义中介逻辑，则除了它的基础部分ML之外，还应包括近15年来所建立和发展起来的如下诸研究方向：

1．我国专家研究的部分方向

(1)中介代数系统(吴望名、潘吟、张东摩)．

(2)中介公理集合论系统(肖奚安、朱梧槚)．

(3)中介模型论(钱磊、朱朝晖)．

(4)中介证明论(钱磊等)．

(5)中介模态逻辑(邹晶、张东摩)．

(6)中介不完全信息推理系统(邓国彩)．

(7)中介模型力迫论(朱朝晖)．

(8)中介程序设计语言MILL及其解释系统(宋云波、徐宝文)．

(9)中介自动推理的理论与实现(张东摩)．

(10)中介直觉主义系统(钱磊)．

注意如上括号内所列姓名为相应研究方向的率先研究者或创建者．

中介逻辑演算ML，即狭义中介逻辑是一种有其自身特色的三值逻辑系统，它由中介命题逻辑演算系统MP及其扩张系统MP*，中介谓词逻辑演算系统MF及其扩张系统MF*，带等词的谓词演算系统ME*等5个系统构成．

2．MP&MP*

MP含有╕、～、→三个命题联结词，其名称依次为"对立否定词"、"模糊否定词"、"蕴涵词"，依次解释并读为"对立于"、"部分地"、"如果…，那么…"．其真值表为：

p	╕p	$\sim p$
0	2	1
1	1	2
2	0	1

$p \to q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

在MP中，命题连结词¬，∨，∧，↔均作为定义符号引入如下：

$D(\neg)$　$\neg A \overset{\text{def}}{=\!=} A \to \sim A$；

$D(\vee)$　$A \vee B \overset{\text{def}}{=\!=}$ ╕$A \to B$；

$D(\wedge)$　$A \wedge B \overset{\text{def}}{=\!=}$ ╕$(A \to$ ╕ $B)$;

$D(\leftrightarrow)$　$A \leftrightarrow B \overset{\text{def}}{=\!=} (A \to B) \wedge (B \to A)$.

MP 有如下形式推理规则：

$(\in): A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$;

$(\tau): \Gamma \vdash \Delta \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$;

$(\neg): \Gamma, \neg A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A$;

$(\to_-): A \to B, A \vdash B, A \to B, \sim A \vdash B$;

$(\to_+): \Gamma, A \vdash B \ \& \ \Gamma, \sim A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$;

$(Y): A \dashv\vdash \neg$ ╕ $A, \neg \sim A$;

$(Y_\sim): \sim A \dashv\vdash \neg A, \neg$ ╕ A;

$(Y_{╕})$: ╕ $A \dashv\vdash \neg A, \neg \sim A$;

(╕╕$_+$): $A \vdash$ ╕╕ A;

(∃ ╕$_-$): ╕∃ $A \vdash A$;

(∃ $_\to$): A, ╕ $B \dashv\vdash$ ╕$(A \to B)$;

$(\sim\sim): A \to A \dashv\vdash \sim\sim A$.

此外还须声明指出，在(τ)中没有规定 Δ 为非空，若当 Δ 为空时，则指承认下述推理规则：

$(\tau_0): \vdash A \Rightarrow \Delta_1 \vdash A(\Delta_1$ 非空).

MP 系统是一个命题联结词含量不完全的演算系统，若在 MP 中再引入真值程度词 $\prec$，而将 MP 扩张为含╕，$\sim$，$\to$，$\prec$ 的中介命题逻辑系统 MP*，则 MP* 是一个命题联结词含量完全的系统，关于 $\prec$ 的真值表为

$p \prec q$ (p \ q)	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

在 MP* 中，除包含 MP 的全部推理规则外，再增添如下三条推理规则：

$(\prec)$:　$A \prec B \dashv\vdash (A \to B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$;

$(\sim\prec)$:　$\sim(A \prec B) \dashv\vdash (\sim A \wedge$ ╕ $B) \vee (A \wedge \sim B)$;

(╕$\prec$):　╕$(A \prec B) \dashv\vdash A \wedge$ ╕ B.

3. MF&MF*

MF 与 MF* 是分别在 MP 及 MP* 中引入量词 $\forall$、$\exists$ 而构成，MF 与 MF* 的推理规则分别在 MP 与 MP* 之推理规则基础上增添如下推理规则而组成，它们都是关于量词的推理规则.

$(\forall_-)$:　$\forall X A(X) \vdash A(a)$;

$(\forall_+)$:　$\Gamma \vdash A(a)$(a 不在 Γ 中出现)$\Rightarrow \Gamma \vdash \forall X A(X)$;

$(\exists_-)$:　$A(a) \vdash B$(a 不在 B 中出现)$\Rightarrow \exists X A(X) \vdash B$;

$(\exists_+)$: $A(a) \vdash \exists XA(X)$, $A(X)$是由 $A(a)$中某些 a 的出现替换为 X 而得；
$(\urcorner\forall)$: $\urcorner\forall XA(X) \dashv\vdash \exists X \urcorner A(X)$;
$(\urcorner\exists)$: $\urcorner\exists XA(X) \dashv\vdash \forall X \urcorner A(X)$.

4.ME*

ME* 是在 MF* 中再引入等词"="扩充而成，因此，ME* 的推理规则，除保留 MF* 的所有推理规则外，再增添如下三条关于等词的公理：

Ax1 $a = a$;
Ax2 $a = b \prec (a = c \prec b = c)$;
Ax3 $a = b \Rightarrow [A(a) \prec A(b)]$.

此处应注意 Ax3 中之形式等号⇒指 MP* 中之定义符号，其定义如下：

$D(\Rightarrow)$: $A \Rightarrow B \overset{\text{def}}{=\!=} A \prec (A \prec B)$.

有关 ML(MP,MP*,MF,MF*,ME*)的语义研究已由许多中青年逻辑工作者完成，即其相容性、可靠性和完备性均已被严格证明．而且严格证明了任何一个经典二值逻辑演算系统都是 ML 的子系统．

6.1.3 n 值逻辑

下面先给出多值逻辑的一般框架结构，然后陈述两个最著名的 n 值($3 \leqslant n < \omega$)命题逻辑系统．

1．多值逻辑的一般框架

设 $M = \langle U, T, C\rangle$为一代数系统，其中 $U = \{0, 1, \cdots, n-1\}$表示命题的真值，其中 $n \geqslant 3$，而 T 为 U 的子集，用以表示 U 中被考虑为"真"的那些值，C 为系统内的联结词所构成的集合．通常称 M 为一个 n 值结构，而每个联结词均可视为 U 上的一元或多元函数．

一个 n 值命题逻辑系统 L_n 为一个三元组，记为$\langle M, \varphi, V\rangle$，其中 M 为一个 n 值结构，φ 为原子命题集，V 为真值函数．

在 L_n 中的语义后承定义如下：

若 Γ 为一合式公式集，A 为任意合式公式，若对 Γ 中之任何合式公式 B 而言，总有

$$V(B) \in T \Rightarrow V(A) \in T,$$

则称 A 为Γ 的语义后承，记为 $\Gamma \models A$.

2．卢卡西维兹 n 值逻辑系统

卢卡西维兹 n 值逻辑系统是一个三元组，记为 $L_n = \langle M, \varphi, V\rangle$，其中

$M = \langle U, T, C\rangle = \langle \{0, 1, \cdots, n-1\}, \{n-1\}, \{\urcorner, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\rangle$,

而 C 中之命题联结词的真值表示如下：

对任何 $m, m_1, m_2 < n$ 而言，均有

$\urcorner m = n - m - 1$;

$m_1 \vee m_2 = \max\{m_1, m_2\}$;

$m_1 \wedge m_2 = \min\{m_1, m_2\}$;

$$m_1 \to m_2 = \begin{cases} n-1, \text{当 } m_1 \leqslant m_2 \text{ 时}, \\ (n-1) - m_1 + m_2, \text{当 } m_1 > m_2 \text{ 时}; \end{cases}$$

$m_1 \leftrightarrow m_2 = \min\{m_1 \to m_2, m_2 \to m_1\}$.

利用如上真值表示,可定义 L_n 中任意合式公式的真值指派如下:

(1) 对原子命题 $p \in \varphi, 0 \leqslant V(p) < n$;

(2) $V(\neg A) = n - V(A) - 1$;

(3) $V(A \vee B) = \max\{V(A), V(B)\}$;

(4) $V(A \wedge B) = \min\{V(A), V(B)\}$;

(5) $V(A \to B) = \begin{cases} n-1, \text{当 } V(A) \leqslant V(B) \text{时}, \\ V(B), \text{当 } V(A) > V(B) \text{时}; \end{cases}$

(6) $V(A \leftrightarrow B) = \min\{V(A \to B), V(B \to A)\}$.

3. 波斯特 n 值逻辑系统

波斯特从扩充二值逻辑真值的角度去给出多值逻辑系统,1921 年,他给出了一个 n 值逻辑系统,记为 P_n. 而 P_n 中之 n 值结构为

$$M = \langle\{0,1,\cdots,n-1\},\{n-1\},\{\neg, \vee, \wedge, \to, d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}\}\rangle;$$

而其中诸命题联结词的真值表示为

对任何 $m, m_1, m_2 < n$ 而言,

$$\neg m = \begin{cases} n-1, & \text{当 } m = 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{否则}; \end{cases}$$

$$m_1 \vee m_2 = \max\{m_1, m_2\};$$

$$m_1 \wedge m_2 = \min\{m_1, m_2\};$$

$$m_1 \to m_2 = \begin{cases} n-1, & \text{当 } m_1 \leqslant m_2 \text{ 时}, \\ m_2, & \text{否则}; \end{cases}$$

$$dm_1(m_2) = \begin{cases} n-1, & \text{若 } m_1 \leqslant m_2, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

6.2 模态逻辑

模态逻辑是用以刻画含"必然"、"可能"一类模态概念的推理规律的逻辑系统. 关于模态概念,同样可以追溯到亚里士多德,他曾指出"必然"与"可能"这两个模态词有别于其它一般的逻辑概念. 然而,直到 20 世纪初,才由马克尔(Mcloll)和刘易斯(Lewis)给出一个完整的模态逻辑系统. 20 世纪 60 年代,克里普克(Kripke)为模态逻辑构造了一种完善的语义模型. 近 20 年来,由于计算机科学的发展,人们发现模态逻辑在人工智能研究领域中有着诸多应用,从而受到广泛重视.

6.2.1 模态命题逻辑

1. 模态命题逻辑的形式语言

形式符号□与◇的名称均为模态词,依次解释并读为"必然"与"可能". 因此,

$\Box A$ 表示"A 必然为真"，$\Diamond A$ 表示"A 可能为真".

用 L_P 来表示模态命题逻辑的形式语言，L_P 的符号库是

(1) 原子命题集 $\varphi=\{p_1,p_2,\cdots\}$；

(2) 命题连结词：$\neg$，$\rightarrow$；

(3) 模态词：$\Box$；

(4) 技术符号：(，'，).

关于模态命题逻辑之形式语言 L_P 的 Wff 的形成规则是

1° 单个原子命题是 Wff；

2° A，B 是 Wff$\Rightarrow\neg A$，$\Box A$，$A\rightarrow B$ 均为 Wff.

定义 1 L_P 中之公式 A 为 Wff$\Leftrightarrow A$ 由上述形成规则生成.

在 L_P 中，模态词$\Diamond$作为定义符号引入如下：

$$D(\Diamond) \qquad \Diamond A \overset{\text{def}}{=\!=} \neg\Box\neg A.$$

此外，有如$\vee$，$\wedge$，$\leftrightarrow$均可按经典方式作为定义符号引入，意义也完全相同.

2. 模态命题逻辑演算系统

可把基于模态命题逻辑形式语言 L_P 上的最基本的模态逻辑系统叫做模态命题逻辑演算系统，记为 K^{LP}. 作为 K^{LP}的推理工具，除要保留经典二值命题逻辑之全部推理规则外，再增添如下两条推理规则模式：

(K) $\qquad \Box(A\rightarrow B),\Box A\vdash\Box B$；

$(\Box_+)$ $\qquad \vdash A\Rightarrow\ \vdash\Box A$.

关于 K^{LP}的严格的语义研究已完成，可以证明 K^{LP}具有可靠性($\Gamma\vdash A\Rightarrow\Gamma\models A$)和完备性($\Gamma\models A\Rightarrow\Gamma\vdash A$).

6.2.2 模态谓词逻辑

1. 模态谓词逻辑的形式语言

用 L_F 来表示模态谓词逻辑的形式语言，L_F 的符号库可由经典二值谓词逻辑之形式语言的符号库中增添模态词$\Box$构成. 至于 L_F 中之合式公式的形成规则亦可类似地处理和定义.

2. 模态谓词逻辑演算系统

模态谓词逻辑演算系统的推理工具，可在承认经典二值谓词逻辑演算系统之所有推理规则基础上，再增添如下关于模态词的推理规则构成：

1° K 规则：$\Box(A\rightarrow B)\vdash\Box A\rightarrow\Box B$；

2° $(\Box_+)$规则：$\vdash A\Rightarrow\ \vdash\Box A$；

3° (BF)规则：$\forall x\Box A(X)\vdash\Box\forall xA(X)$.

模态谓词逻辑演算系统在前述语义模型下是可靠的和完备的.

6.2.3 多模态逻辑

传统的模态逻辑系统只含有$\Box$与$\Diamond$两个模态词，近年来，人们主张对模态词个数进行扩张，允许出现多个不同意义的模态词.

今设 I 为一非空集合,多模态逻辑形式语言记为 L_{PI},而 L_{PI}的符号库是

(1) 原子命题集:$\varphi=\{p_1,p_2,\cdots\}$;

(2) 命题联结词:$\neg$,$\rightarrow$;

(3) 模态算子:$[i]$,$i\in I$;

(4) 技术符号:[,],(,),'.

关于 L_{PI}中之 Wff 的形成规则均可类似地给出和定义.易见当 I 为单点集时L_{PI}就是 L_P.

对于每个模态词$[i](i\in I)$,均可引入相应的对偶模态词,定义如下:

$D(\langle i\rangle)\qquad \langle i\rangle A\overset{\text{def}}{=\!=}\neg[i]\neg A.$

对 L_{PI}配以推理工具,即可构造多模态逻辑演算系统,记为 K^{LPI}.配套于 L_{PI}的K^{LPI}的推理工具,除承认经典二值命题逻辑中的全部推理规则外,再增添如下推理规则:

对任意的 $i\in I$ 而言,我们有

(K_i):　$[i](A\rightarrow B),[i]A\vdash[i]B$;

$(\Box_i^*)$:　$\vdash A\Rightarrow\ \vdash[i]A$.

6.2.4 时态逻辑

时态概念在日常推理中有重要意义,许多时态概念有如:"将会"、"曾经"、"上一次"、"直到"等等均可在模态框架下得到描述.

今设 $I=\{P,F\}$,而 L_{PI}为相应的含模态词 P 及 F 的多模态形式语言.现将 P 解释为"过去一直",而 F 解释为"将来永远",则模态合式公式$[P]A$ 意指"A 过去一直为真",又$[F]A$ 则指"A 将来永远为真".相应的对偶算子$\langle P\rangle A$ 意为"A 过去曾经为真",$\langle F\rangle A$ 指"A 将会真".在如此的解释下,下列各式显然成立.

(1) $A\rightarrow[P]\langle F\rangle A$;

(2) $A\rightarrow[F]\langle P\rangle A$;

(3) $[P]A\rightarrow[P][P]A$;

(4) $[F]A\rightarrow[F][F]A$.

如所知,K^{LPI}表示基于L_{PI}的多模态演算系统,今在 K^{LPI}中增添如上之(1)~(4)为推理规则,那就得到所说的时态命题逻辑演算系统,记为 K^{TP},在 K^{TP}中之 $I=\{P,F\}$.

6.2.5 动态逻辑

动态逻辑是用于描述程序语义而建立的模态逻辑系统.它直接将程序作为形式对象引入,使之在描述程序行为方面具有更强的表达能力.

设 Π 为所有原子程序构成的集合.又 α_1,α_2 为两个程序,今用 $\alpha_1;\alpha_2$ 表示将 α_1 与 α_2 连接起来构成的新程序,其中 α_1 执行在前,α_2 执行在后,并称 $\alpha_1;\alpha_2$ 为 α_1 与 α_2 的串联.用 $\alpha_1\cup\alpha_2$ 表示一个不确定的新程序,它或者执行 α_1,或者执行 α_2,称 $\alpha_1\cup\alpha_2$ 为 α_1 与 α_2 的并联.又用 α^* 表示有限次地重复执行程序 α.若 A 为一 Wff,

我们用 $A?$ 表示测试 A 是否为真的程序，如果 A 为真，则程序继续向下执行，否则程序返回并终止.

一个合式的程序由下列规则生成：

1° 原子程序 $\pi\in\Pi$ 为合式程序；

2° α_1,α_2 为合式程序 $\Rightarrow\alpha_1;\alpha_2,\alpha_1\cup\alpha_2,\alpha^*$ 均为合式程序；

3° A 为 Wff $\Rightarrow A?$ 为合式程序.

定义 2 一个程序为合式程序 $\Leftrightarrow$ 该程序由上述1°、2°、3°生成.

我们将所有合式程序所构成的集合记为 Prog.

动态命题逻辑的形式语言实际上是一个多模态形式语言 L_{PI}，其中 $I=\{\alpha\mid\alpha\in \text{Prog}\}$，我们把动态命题逻辑的形式语言记为 L_{DP}. 而 L_{DP} 之 Wff 的形成规则为

1° 原子命题 $p\in\varphi$ 为 Wff；

2° A,B 为 Wff，α 为程序 $\Rightarrow\neg A, A\rightarrow B, [\alpha]A$ 均为 Wff.

应当指出，严格定义动态命题逻辑形式语言 L_{DP} 中之程序与 Wff 需要同时对两者进行递归定义，因为定义程序时用到 Wff，而定义 Wff 时又要用到程序.

动态命题逻辑演算系统中配套于 L_{DP} 的推理工具，首先承认多模态逻辑演算系统 K^{LPI} 的所有推理规则（此处 $I=\text{Prog}$），然后再增添下列推理规则构成.

1° $[\alpha;\beta]A \dashv\vdash [\alpha][\beta]A$；

2° $[\alpha\cup\beta]A \dashv\vdash [\alpha]A\wedge[\beta]A$；

3° $[A?]B \dashv\vdash A\rightarrow B$；

4° $[\alpha^*]A \vdash A\wedge[\alpha][\alpha^*]A$；

5° $[\alpha^*](A\rightarrow[\alpha]A)\vdash A\rightarrow[\alpha^*]A$.

在动态命题逻辑演算系统中，$[\alpha]A$ 表示执行程序 α 后的每个状态均使 A 为真. 对每个程序 α，$[\alpha]$ 的对偶算子 $\langle\alpha\rangle$ 定义为 $\neg[\alpha]\neg$，又 $\langle\alpha\rangle A$ 表示程序 α 执行后，存在一种状态使 A 为真.

6.3 非单调推理

在一个逻辑系统中，若将 Wff 集 Γ 在系统内所能推出之一切结论记为 $C_n(\Gamma)$，那么无论是本节前文所论之各种非经典逻辑，还是 2 中所述之各种经典二值逻辑，他们的一个共同特征是：

$$(*)\qquad \Gamma\subseteq\Gamma'\Rightarrow C_n(\Gamma)\subseteq C_n(\Gamma').$$

这种性质或共同特征叫做逻辑推理的单调性. 然而人工智能研究领域中的常识推理却往往不具有这种单调性.

如果 Γ 表示对某类事物已有的知识，这些知识部分来源于人们对该类事物的观察过程中所获得的事实，部分来源于常识或在信息不完全的情形下根据常识所作出之判断. 而当人们又获得关于这类事物的一组新事实 F 后，该组新信息很可能与 Γ 中的知识相矛盾，此时就要对原有知识加以适当修正，以使新旧知识能互相协调. 从而某些原有知识所推出之结论，在新知识体系中就未必能推出，亦即往往不具有上述（$*$）这种单调性，或者说常识推理往往是非单调的. 从而在 20 世纪

80年代以来,导致了各种用以刻画常识推理的非单调逻辑的兴起.

在各种非单调逻辑系统中,通常把某种特定语言下的一组公式称为理论或假设集,记为 T 或 Γ,又用 $C_{n\Sigma}(T)$ 表示 T 在逻辑系统 Σ 中所能导出的全部结论,C_n 称为推论算子.例如 $C_{nP}(T)$ 表示 T 在经典命题逻辑 P 中所能导出的全部结论,而 $C_{nF}(T)$ 则表示 T 在经典谓词逻辑中所能导出的全部结论.如果我们有

$$(*)\qquad T = C_{n\Sigma}(T),$$

则称理论 T 在逻辑系统 Σ 之下是封闭的.

6.3.1 缺省逻辑

1980年,利特(Reiter)给出一种非单调逻辑,称之曰缺省逻辑.他主张将人类知识分为两类,一类是硬知识,它包括已知的或公认的事实,另一类是软知识,即常识知识.他引入一种特殊的非经典公式来表示这种常识知识.例如,若用 Bird(X)表示"X 为鸟",又 Can-fly(X)表示"X 会飞",那么常识知识告诉我们"在一般情况下鸟都会飞",现用公式表述如下:

$$\frac{\text{Bird}(X):\text{Can-fly}(X)}{\text{Can-fly}(X)}.$$

在缺省逻辑中,上列公式的涵义为:"对任何个体 X,如果 X 是鸟,并假定 X 会飞并不导致矛盾,则就认为 X 会飞."这类公式称为缺省规则,它与经典公式的不同之处,在于含有这类规则的推理具有非单调性.例如就上例而言,如果我们知道鸵鸟是鸟,而在我们的知识体系中,又没有任何信息表明鸵鸟不会飞,如此由上述缺省规则可推出鸵鸟会飞.但若我们已获息鸵鸟不会飞,那么这一信息就会阻止我们使用这一缺省规则,从而不会有结论鸵鸟会飞.如果把上述缺省规则改为下述经典表达式:

$$\forall X(\text{Bird}(X)\rightarrow\text{Can-fly}(X)),$$

则不论有没有鸵鸟会飞的信息,结论鸵鸟会飞是必然的.

定义3 设 $A(\bar{X}), B_1(\bar{X}), B_2(\bar{X}), \cdots, B_k(\bar{X})$ 和 $C(\bar{X})$ 为经典形式语言 L_F 中的 Wff,而 $\bar{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为这些 Wff 中所出现之自由变元,则称

$$(*)\qquad \frac{A(\bar{X}):B_1(\bar{X}),B_2(\bar{X}),\cdots,B_k(\bar{X})}{C(\bar{X})}$$

为缺省规则,其中 $A(\bar{X})$ 叫做先决前提,而 $B_1(\bar{X}), B_2(\bar{X}), \cdots, B_k(\bar{X})$ 叫做缺省前提,$C(X)$ 称为结论.

直观上讲,上述表达式($*$)表示对任何个体 $\bar{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,如果已知 $A(X)$ 为真,并且假定 $B_1(\bar{X}), B_2(\bar{X}), \cdots, B_k(\bar{X})$ 成立不会导致矛盾,则就结论 $C(\bar{X})$.又若缺省规则中不含自由变元,则称之为封闭缺省规则,又若 $k=1$,且 $B_1(\bar{X}) = C(\bar{X})$,则称之为正规缺省规则.

6.3.2 模态非单调逻辑

美克台摩特(McDermott)和杜尔(Doyle)利用模态公式来表述常识知识.例如,"一般情况下鸟会飞"这一常识知识被表述为

$(*')$ $\forall X(\text{Bird}(X)\wedge M\text{Can-fly}(X)\rightarrow\text{Can-fly}(X))$,
其中 M 为模态算子. MA 表示"A 成立不会导致矛盾". 而上述$(*')$可解释为:"对任何个体 X,如果 X 为鸟,并且假定 X 会飞不致导出矛盾,则就认为 X 会飞."虽然从含义上讲,上述$(*')$与缺省规则完全相同,但由于$(*')$是模态语言中的 Wff,从而可用模态逻辑工具研究非单调推理. 又由于模态算子允许嵌套出现,按理在缺省规则中也可出现其它缺省规则,但这等情况在缺省逻辑中却是不允许的.

模态非单调逻辑采用模态谓词逻辑形式语言 L_F 作为描述语言,其中模态词记为 M. 利用含模态词的表达式来表述常识知识,用 L_F 中的 Wff 集 T 表示含常识知识的一个知识体系,并称之谓一个理论.

定义 4 设 T 为一个理论, S 为 L_F 中的一个语句集. 若 S 满足

$S=C_{nF}(T\cup\{MA: A$ 为 L_F 中之语句且$\neg A\bar{\in}S\})$,
则称 S 为 T 的一个扩充.

注意,此处 $C_{nF}(T)$是指 T 在经典谓词逻辑 F^N 之下所有推论所构成的集合. 当 T 中之表达式含模态词 M 时,则将形如 MA 的子公式视为经典谓词逻辑形式语言 L_F 中的原子公式.

事实上,模态非单调逻辑在语言方面已对缺省逻辑作了改进,其优点在于能用模态语言来表述常识知识,从而不必引入一类特别规则,并使得缺省规则可以嵌套使用.

6.3.3 自认知逻辑

莫尔(Moore)进一步认为,常识推理是关于认知者的知识或信念的推理,认知者所作出的推断是根据他对某类事物已有的信念和他自身的内省能力所作出的判断,若用 LA 表示"认知者相信 A 为真",则可将前述$(*')$改为

$(*'')$ $\forall X(L\text{Bird}(X)\wedge\neg L\neg\ \text{Can-fly}(X)\rightarrow L\text{Can-fly}(X))$.
上述$(*'')$被解释为"对任何个体 X,如果认知者相信 X 为鸟,并且不相信 X 不会飞,那它就相信 X 会飞."大家认为,此类解释更符合常识推理的特征.

基于这种直观背景,莫尔于 1983 年建立了一套较完善的非单调逻辑系统,称为自认知逻辑. 自认知逻辑与模态非单调逻辑相比,不仅又是一种改进,且在语形和语义方面均有更充分的研究.

自认知逻辑采用模态命题逻辑语言 L_P,并用 L 作为基本模态算子, LA 被解释为:"相信 A 为真". 又模态词 M 作为定义符号引入:

$D(M)$ $MA=df\neg L\neg A$,
并被解释为:"不相信 A 为假". 在自认知逻辑中,把不含模态词的形式语言叫做对象语言,即经典命题逻辑语言 L_0.

设 T 为一个认知者对某类事物的一组信息,它是 L_P 的一个 Wff 集,也称为一个理论. 对一个有充分推理能力的认知者,他会将他所有已经相信为真的命题作为正面证据,而将他所有不相信为真的命题作为反面的证据,并由此推出更多的关于这类事物的信念. 因此,认知者关于这类事物的信念可扩充为一个更大的集合 S. 我们可以形式地定义 T 的一个扩充 S 如下.

定义 5 设 T 为 L_P 中的一个理论，S 为 L_P 中的一个 Wff 集，若 S 满足

$$S = C_{nP}(T \cup LS \cup \neg \overline{LS}),$$

则称 S 为 T 的一个扩充. 此处注意：

$$LS = \{LA \mid A \in S\};$$

$$\neg \overline{LS} = \{\neg LB \mid B \bar{\in} S\}.$$

下述稳定集概念是自认知逻辑的一个中心概念.

定义 6 设 S 为 L_P 中的一个 Wff 集，如果 S 满足

1° $S = C_{nP}(S)$;

2° $A \in S \Rightarrow LA \in S$;

3° $A \bar{\in} S \Rightarrow \neg LA \in S$,

则称 S 为一个稳定集.

定理 1 设 T 为对象语言 La 的一个理论，则当且仅当 S 为包含 T 的一个稳定集时，S 为 T 的一个扩充.

6.3.4 限定论

美克卡瑞(McCarthy)基于人们"就事论事"的思维方式，给出了另一种非单调逻辑，称之曰限定论. 例如，我们已知鸵鸟不会飞、企鹅也不会飞，但不知道是否还有其它鸟也不会飞，这时我们就假定除了鸵鸟和企鹅之外，其它种类的鸟都会飞. 那么当获悉某个个体是鸟，并知它既不是鸵鸟，也不是企鹅时，我们就可暂时推知它会飞. 又若后来得知这种鸟也不会飞，则就将上述限制改为除鸵鸟、企鹅及这种鸟不会飞之外，其它鸟均会飞. 这种思维方式，显然是一种非单调推理.

美克卡瑞引入了一个特别的谓词 $Ab(X)$，叫做例外谓词，借以表述例外情形. 例如，若用 a 表示鸵鸟，b 表示企鹅，则可有 $Ab(a) \wedge Ab(b)$. 在这里常识"鸟一般都会飞"可表述为

(Δ_1) $\forall X(\mathrm{Bird}(X) \wedge \neg Ab(X) \to \mathrm{Can\text{-}fly}(X))$.

又若系统中有下述公理：

(Δ_2) $\forall X(Ab(X) \to X = a \vee X = b)$.

那么只要已知某种鸟既不是 a，也不是 b，则可推知这种鸟会飞.

限定论的中心问题就是如何使系统能自动生成类似于上述(Δ_2)那样的限定前提.

定义 7 设 T 为经典谓词逻辑语言 L_e 中的一个 Wff 集，F 为 T 中所出现的一个 n 元谓词. 通常将 T 记为 $T(F)$. 令 $\overline{CS}(T, F)$ 为下列所有 Wff 所构成的集合：

$(T(\varphi) \wedge \forall \bar{X}(\varphi(\bar{X}) \to F(\bar{X})) \to \forall \bar{X}(F(\bar{X}) \to \varphi(\bar{X}))$,

其中 $\bar{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$，又 φ 为任意 n 元谓词，$T(\varphi)$则表示将 T 中每个 Wff 中的 F 的出现替换为 φ 所得. 我们称 $T \cup \overline{CS}(T, F)$ 为 T 对谓词 F 的限定，记为 $CIRC_{FR}(T, F)$.

6.3.5 信念修正

信念修正也叫做理论改变的逻辑，这是卡电福斯(Gärdenfors)等人于 20 世纪 80

年代初期所发展起来的一个非经典逻辑分支,这是一种处理新旧知识发生冲突时,如何修正旧知识体系,使之获得一个协调的新知识体系的系统.由于在协调性维护过程中,某些旧知识可能被删除,从而某些能由旧知识体系能推出的结论在新知识体系下可能推不出,所以信念修正也是对非单调推理的一种形式化理论.

AGM 假设 设 K 为一个命题公式集,若 K 在命题逻辑下封闭,即 $K=C_n(K)$,此处 C_n 为 C_{nP} 的简写,则称 K 为一个信念集.它用以描述一个知识体系.为了刻画知识体系的修正过程,卡屯福斯等人引入如下三种对信念集的操作.

(1) 扩充 将公式 A 直接加到信念集 K 中,从而获得一个新的信念集.这一过程称为用 A 扩充 K,记为 $K+A$.

(2) 修正 将公式 A 加到信念集 K 中,同时去掉能导出 $\neg A$ 的语句,并使新的语句集协调且封闭.这一过程叫做用 A 修正 K,记为 $K*A$.

(3) 收缩 将 K 中能导出公式 A 的语句去掉,并使新的语句集封闭,该过程叫做用 A 收缩 K,记为 $K-A$.

显然,对扩充操作而言,可定义

$$K+A=C_n(K\cup\{A\}).$$

然而其余两个操作难以形式化.卡屯福斯等人于 1985 年为这两种操作各引入 8 条假设,借以刻画其特征.

1994 年,为了刻画一个信念集能被多条语句甚至无穷多条语句进行修正、收缩的操作,张东摩对信念修正理论进行了扩充,称为广义信念修正理论.

6.3.6 开放逻辑

1991 年,李未给出了一个可以刻画知识增长、更新和假说之进化的逻辑理论,由于该理论是针对经典形式系统的某种封闭性而提出的,所以称之曰开放逻辑.

如所知,着眼于经典逻辑形式系统,一旦该系统的公理和推理规则给定后,人们所关心的问题是该系统能推出那些定理和怎样推出这些定理,以及讨论该系统的相容、可靠与完备性.但在形式系统内部是无法讨论假说(公理)如何增加或修改,更无法刻画公理集的进化过程.对于这类问题的探索必须来自系统之外部的实践,以及通过系统与外部环境之交互作用.从而就这一意义上而言,经典逻辑系统是封闭的.开放逻辑就是针对这种封闭性的不足而提出来的.

开放逻辑的两个基本概念是新假设和事实反驳.分述如下:

定义 8 对于给定的假说 Γ(闭公式集),如果存在两个模型 M 和 M',能使有 $M\models\Gamma\&M\models A$ 和 $M'\models\Gamma\&M'\models\neg A$ 同时成立,我们就称 A 是关于 Γ 的新假设.

实际上,上述定义 1 指出,当 A 是关于 Γ 的新假设时,A 在逻辑上是独立于 Γ 的.

定义 9 设 A 是 Γ 的逻辑结论($\Gamma\models A$),如果存在一模型 M 能使有 $M\models\neg A$ 成立,则称 A 受到事实反驳.

令 $\Gamma_{M(A)}$ 代表全体在模型 M 下为真的 Γ 中的公式组成的集合,即

$$\Gamma_{M(A)}=\{A_i\mid A_i\in\Gamma\&M\models A_i,M\models\neg A\}.$$

如果模型 M 给出 A 的一个事实反驳(即有 $M\models\neg A$),并且不存在另一个模型

M'给出A的另一个事实反驳能使有$\Gamma_{M(A)} \subset \Gamma_{M'(A)}$，则称模型$M$所给出的$A$的事实反驳是理想的，亦即此时使得$\Gamma_{M(A)}$是极大的事实反驳.

通俗地说，假说是否成立，取决于从它所推出之每一结论是否与人们的实践一致，如果某一结论与实践不一致（相当于定义中$\Gamma \models A$又存在模型M使有$M \models \neg A$），这就出现事实反驳.

如果A是关于Γ的新假设，则称$\Gamma \cup \{A\}$为Γ关于A的N-重构. 又若$\Gamma \models A$且A受到事实反驳，则称$\Gamma_{M(a)} \cup \{\neg A\}$为假说的$R$-重构. 一般地，称$\Gamma$的$M$-重构或$R$-重构为$\Gamma$的重构. 重构这一概念描述了假说遇到新假设或事实反驳后的再构造.

在开放逻辑中，假说的进化可由认识进程刻画. 我们说假说序列$\{\Gamma_n\}$为一认识进程，如果对任意的$n(n \geqslant 1)$，Γ_{n+1}是Γ_n的一个重构. 认识进程是单调的，即对任意$n \geqslant 1$有$\Gamma_{n+1} \supset \Gamma_n$.

可以证明如下事实：

(1) 一个认识进程是单调的，其充分必要条件是对任意$n \geqslant 1$，Γ_{n+1}是Γ_n的N-重构，亦即此时假说总是在不断增加新假设；

(2) 一个认识进程是非单调的，其充分必要条件是存在$n \geqslant 1$，使有Γ_{n+1}为Γ_n的R-重构，亦即此时由Γ_n所推出的某一结论受到了事实反驳.

参考文献

1 朱梧檟，肖奚安. 数理逻辑引论. 南京：南京大学出版社，1995.
2 朱梧檟，肖奚安. 集合论导引. 南京：南京大学出版社，1991.
3 朱梧檟，肖奚安. 数学基础概论. 南京：南京大学出版社，1996.
4 王世强. 模型论基础. 北京：科学出版社，1997.
5 Cheng C C, Keisler J K. Model theory. Berlin: North-Holland Publ Co, 1976.
6 J. Barwise. Handbook of mathematical logic. Berlin: North-Holland Publ Co, 1977.
7 莫斯托夫斯基著. 郭世铭译. 数学基础三十年. 武汉：华中工学院出版社，1983.
8 张家龙. 数理逻辑发展史. 北京：社会科学文献出版社，1993.
9 Donald Monk J. Mathematical logic. New York: Springer-Verlag, 1976.

·近代数学卷·

第2篇

组合数学

编　者　卢华明
审校者　刘振宏

目　　录

引　言

近若干年来发展最为迅速的数学分支，当推组合数学了．这是受计算机科学蓬勃发展刺激的结果．组合数学与计算机科学相结合，争得了发展的空间．

什么是计算机科学呢？有人定义它是研究算法的一门科学．研究算法无疑是计算机科学的核心内容．

组合分析与算法的关系，犹如数值分析与计算方法．组合数学是算法复杂性分析的理论基础．它研究的内容十分广阔，图论、算法复杂性理论等本来都是组合数学研究的范畴，由于它们已成长壮大而独立出去了．

本篇仅限于介绍组合分析的内容，主要是研究计数、枚举的算法．

顺便提一提的是研究组合数学的有效方法，甚至于可以说诀窍是，要研究某一问题的一般规律，先从它的规模小的子问题开始，从中获得带规律性的东西．这个办法将贯穿本篇始终．

1　排列与组合

1.1　加法法则与乘法法则

以下假设 A 与 B 是彼此无关的两事件．

1.1.1　加法法则

设事件 A 有 m 种可能，事件 B 有 n 种可能，则事件 A 和事件 B 的事件有 $m+n$ 种可能．

例1　小于10而大于零的偶数有4个：2,4,6,8；小于10而大于零的奇数有5个：1,3,5,7,9，则小于10而大于零的整数有 $4+5=9$. 其结论是显而易见的．

1.1.2　乘法法则

若事件 A 有 m 种可能，事件 B 有 n 种可能，则同时有事件 A 与事件 B 的事件有 mn 种可能．

例2　设一标识符由两个字符组成，第一个字符为英文字母，第二个字母为英文字母或数字．

第一个字符为事件 A，有26种可能．第二个字符为事件 B，为英文字母或数字，根据加法法则，事件 B 有 $26+10=36$ 种可能．则同时有事件 A 与事件 B 的事件共有 $26\times36=936$ 种可能．即

$AA, AB, \cdots, AZ, A0, A1, \cdots, A9,$
$BA, BB, \cdots, BZ, B0, B1, \cdots, B9,$
……
$ZA, ZB, \cdots, ZZ, Z0, Z1, \cdots, Z9.$

例3 设从 A 到 B 有三条路径，从 B 到 C 有两条路径．则从 A 到 C 有 $3\times 2 = 6$ 条路径，如图1-1.

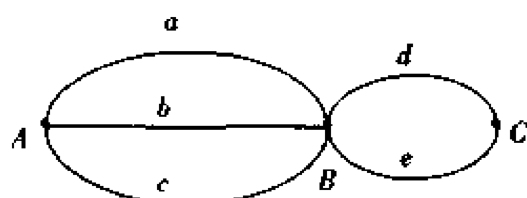


图 1-1

1.2 排列与组合

1.2.1 定义

定义1 从 n 个不同的元素中取 r 个按顺序排列，称为从 n 中取 r 个排列，其排列数用 $P(n,r)$ 表示它．

定义2 从 n 个不同的元素中取 r 个而不考虑它的顺序时，称为从 n 中取 r 个组合，其组合数用 $C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$ 表示它．

从 n 个不同元素中取 r 个排列，最典型的模型为：将 n 个有标志的球，取 r 个放到 r 个有区别的盒子里，每盒一个，如图1-2.

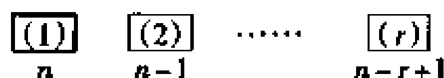


图 1-2

(　) 里的数是盒子的序号．第1个盒子有 n 种可能，第2个盒子有 $n-1$ 种可能…，第 r 个盒子有 $n-r+1$ 种可能．根据乘法法则应有

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

从 n 个不同元素中取 r 个进行组合的典型模型是：n 个球有标志，r 个盒子没有区别，取 r 个球放到无区别的 r 个盒子里，每盒一个．也可以看作是取 r 个无标志的球，放在 n 个有区别的盒子里，每盒1个球．这里不考虑盒子的顺序．对于这样的每一个方案再考虑盒子的排列顺序，可得从 n 个中取 r 个的排列，其排列数有

$$P(n,r) = r!\,C(n,r).$$

所以

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}.$$

或

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

1.2.2 例

例4 从1—300间任取3个不同的数，使它们之和正好被3除尽，问共有几种方案？

1—300 间的数可分成以下三组：

$$A=\{1,4,7,\cdots,298\},B=\{2,5,8,\cdots,299\},C=\{3,6,9,\cdots,300\}.$$

集合 A 各数除以 3 余数为 1；集合 B 的数除以 3 余数为 2，集合 C 的数除以 3 余数为 0. 取 3 个数，它们的和除以 3 余数为 0，有以下几种情况

1) 3 个数同在集合 A；

2) 3 个数同在集合 B；

3) 3 个数同在集合 C；

4) 3 个数分别属于 A,B,C.

根据乘法法则和加法法则，问题的方案数应为

$$N=3C(100,3)+100^3=1\,485\,100.$$

例 5　一组9 位成员，从 1—6 六个入口处进场，每入口处每次只能进一人，问有多少种方案？

为了了解得更准确起见，先引进 ○ 表示两入口间的间隔，• 表示成员．比如

• ○ • • ○ • • ○ • • ○ ○ • •

分别表示第一入口处一人，第二、三、四入口处两人，第五入口处空，第六入口处两人的入场方案．○ 称之为隔离符．

9 位成员和 5 个隔离符共 14 个符号，9 位成员是有标志的，5 个隔离符是没有区别的．

$\bullet\ \bullet\ \underset{\overset{\uparrow}{3}}{\bigcirc}\ \bullet\ \underset{\overset{\uparrow}{5}}{\bigcirc}\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \underset{\overset{\uparrow}{9}}{\bigcirc}\ \bullet\ \underset{\overset{\uparrow}{11}}{\bigcirc}\ \bullet\ \underset{\overset{\uparrow}{13}}{\bigcirc}\ \bullet$

表示前两位从第 1 入口处依次进场，第 3 位从第 2 入口处进场，第 4、5、6 三位从第 3 入口处依次入场，等等．由于隔离符是没有区别的，所以问题的方案数应为

$$N=\frac{14!}{5!}=726\,485\,760.$$

还可以直接利用乘法法则得出相同结果：第 1 个成员有 6 种选择方案；第 2 个成员则有 7 种可能，他可以选择与第 1 个成员同一入口处进场，且可考虑在第 1 成员的前面或后面进场．第 3 个成员则有 8 种可能供选择，依此类推．所以异途同归得

$$N=\underbrace{6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14}_{9位}=\frac{14!}{5!}$$

例6　求能整除1 400 的正整数数目(1 除外)．

$1\,400=2^3\times5^2\times7$，能除尽 1 400 的数应为

$$2^l\times5^m\times7^n,$$

其中 $0\leqslant l\leqslant3,0\leqslant m\leqslant2,0\leqslant n\leqslant1$，其个数为

$$(4+1)\times(3+1)\times(1+1)=60.$$

由于 $l=m=n=0$ 除外，故问题的解应为 59.

1.3 一一对应

在组合数学的研究中,一一对应的办法经常用到它．一个难于思索的问题若能和容易解决的问题一一对应,则前面看似困难的问题也就获得了解决．

例7 100名乒乓球选手进行淘汰赛,最后产生一名冠军,试问要进行多少场比赛?

如若考虑到每场对抗赛和淘汰一名选手对应起来,最后产生的一名冠军是在淘汰99名选手后产生的．故应进行99场比赛．

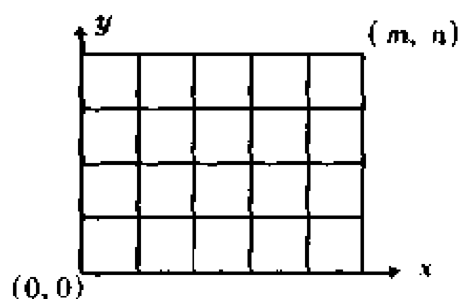


图 1-3

例8 如图1-3所示的坐标网格,试问从(0,0)点到(m,n)点有多少条道路．作为一种约定不允许向x轴或y轴的负方向移动,即不允许后退．

设沿x轴正方向每走一步对应于一个x,沿y轴正方向每走一步对应一个y,则从(0,0)出发到达(m,n)点的道路和m个x,n个y构成的序列一一对应．相当于一列$m+n$个格子取m个写上x,余下的n个格子为y,其数目为

$$C(m+n,m).$$

凯莱(Cayley)定理 n个有标号的顶点的树的数目等于n^{n-2}.

证明 这相当于对n个城市,建一条无回路的公路将n个城联结起来的方案数为n^{n-2}.

假定这n个顶点为$1,2,\cdots,n$,T是过这n个顶点的一棵树．T的树叶中标号最小设为a_1,其相邻顶点为b_1,移去a_1点和(a_1,b_1)边;在剩下的$n-1$个顶点中再寻找标号最小的树叶,设为a_2,b_2是其相邻的点,移去a_2点和(a_2,b_2)边;继续以上的步骤,直到剩下一条边为止．由于树T的边数为$n-1$,故对应一序列

$$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}.$$

通过上述规则,每一棵树T对应一$n-2$个数的序列,显然这$n-2$个数不一定是不相同的．最极端的例子是由$n-2$个n组成的序列:$n,n,\cdots,n$,是由n引向$1,2,\cdots,n-1$的$n-1$条放射形的图．

反之,给了$n-2$个数的序列

$$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}, \tag{1-1}$$

可以找到一棵树与之对应,办法如下:先从序列

$$1,2,\cdots,n \tag{1-2}$$

中找出最小的一个不在序列(1-1)中的数,它显然就是a_1．建立边

$$(a_1,b_1).$$

从序列(1-1)中消去b_1,从序列(1-2)中消去a_1.在余下的序列(1-1)和(1-2)中继续以上的过程,直到序列(1-1)变空为止．这时序列(1-2)中留下两个数,设为a和b．连a和b便得一棵树T.

举一实例以加深理解,见图 1-4.

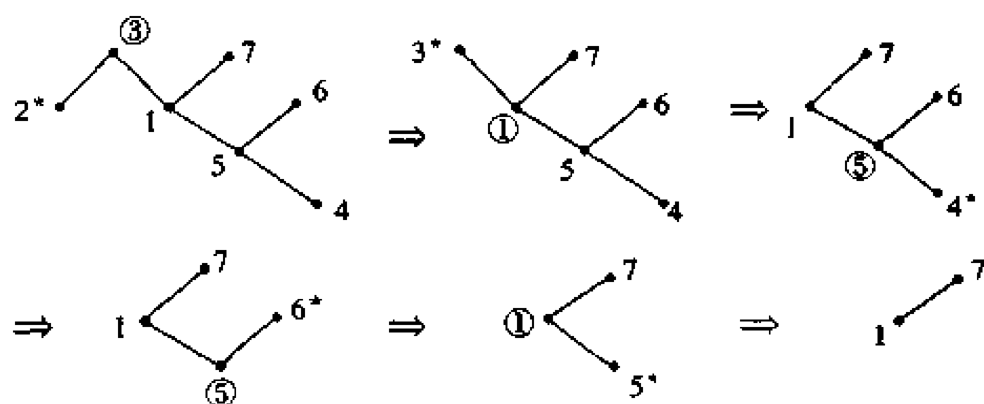


图 1-4

故得一序列

$$3,1,5,5,1.$$

图 1-4 中, * 表示序号最小叶子,○ 为其邻点.

反过来,从序列

$$1,2,3,4,5,6,7$$

中找出不在序列

$$3,1,5,5,1$$

中最小的数 2,故(2,3) 是一条边. 又从

$$1,3,4,5,6,7$$

中找到不在

$$1,5,5,1$$

中的最小数 3,故(1,3) 是另一条边. 以此类推有,从

$$1,4,5,6,7$$
$$5,5,1$$

可得(4,5) 边. 从

$$1,5,6,7$$
$$5,1$$

可得(5,6) 边. 从余下的

$$1,5,7$$
$$1$$

中可得(1,5) 边,余下得(1,7). 全过程见图 1-5.

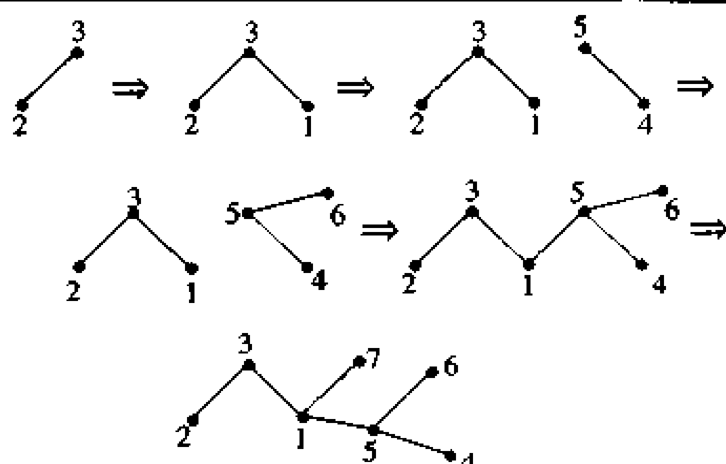


图 1-5

1.4　排列与组合的生成

1.4.1　排列生成算法之一

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! = (n-1+1)(n-1)! \\ &= (n-1)(n-1)! + (n-1)!. \end{aligned}$$

同理

$$(n-1)! = (n-2)(n-2)! + (n-2)!,$$
$$(n-2)! = (n-3)(n-3)! + (n-3)!,$$
$$\cdots$$

所以

$$\begin{aligned} n! &= (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + \\ &\quad (n-3)(n-3)! + \cdots + 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + 0! \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot k! + 1. \end{aligned}$$

可以证明,若数 m 满足 $0 \leqslant m \leqslant n!-1$,则 m 可以表示为

$$m = a_{n-1}(n-1)! + a_{n-2}(n-2)! + \cdots + a_2\cdot 2! + a_1\cdot 1!,$$
$$0 \leqslant a_k \leqslant k,\quad k = 1,2,\cdots,n-1.$$

$$n_2 = \lceil \frac{m}{2} \rceil = a_{n-1}\frac{(n-1)!}{2} + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{2} + \cdots + a_2,$$
$$\text{余数 } r_1 = a_1.$$

$$n_3 = \lceil \frac{n_2}{3} \rceil = a_{n-1}\frac{(n-1)!}{3!} + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{3!} + \cdots + a_3,$$
$$\text{余数 } r_2 = a_2.$$

令 $n_1 = m$,有

$$n_{i+1} = \lceil \frac{n_i}{i+1} \rceil,\quad r_i = n_i - (i+1)n_{i+1} = a_i,$$

$$i = 1,2,\cdots,n-1.$$

例 9 $m = 4\,000, n_1 = m$,

$$n_2 = \lceil \frac{n_1}{2} \rceil = 2\,000, \quad a_1 = r_1 = 0.$$

$$n_3 = \lceil \frac{n_2}{3} \rceil = 666, \quad a_2 = r_2 = 2.$$

$$n_4 = \lceil \frac{n_3}{4} \rceil = 166, \quad a_3 = r_3 = 2.$$

$$n_5 = \lceil \frac{n_4}{5} \rceil = 33, \quad a_4 = r_4 = 1.$$

$$n_6 = \lceil \frac{33}{6} \rceil = 5, \quad a_5 = r_5 = 3.$$

$$n_7 = \lceil \frac{5}{7} \rceil = 0, \quad a_6 = r_6 = 5.$$

所以 $$4\,000 = 5 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2!.$$

$0 \leqslant m \leqslant n! - 1$ 和 $(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1)$ 一一对应，其中 $0 \leqslant a_k \leqslant k, k = 1, 2, \cdots, n-1$. 比如

$$4\,000 \Leftrightarrow (5\ 3\ 1\ 2\ 2\ 0)$$

下面建立 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列

$$p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$$

和 $(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_3, a_2, a_1)$ 的一一对应关系. a_k 可以理解为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中数 $k+1$ 右方比 $k+1$ 小的数的个数，$k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 以排列 4 213 为例，4 右方比 4 小的数的个数为 3，即 $a_3 = 3$；3 右方比 3 小的数的个数为 0，故 $a_2 = 0$；2 右方比 2 小的数的个数为 1，即 $a_1 = 1$. 故得

$$4\ 2\ 1\ 3 \Leftrightarrow (3\ 0\ 1)$$

以 $n = 4$ 为例，$(a_3a_2a_1)$ 从 (000), (001), (010), (011), (020), (021), (100), …, (3 2 1) 依次得出全体排列 $\{p_1p_2p_3p_4\}$ 如下：

N	a_3	a_2	a_1	p_1	p_2	p_3	p_4	N	a_3	a_2	a_1	p_1	p_2	p_3	p_4
0	0	0	0	1	2	3	4	12	2	0	0	1	4	2	3
1	0	0	1	2	1	3	4	13	2	0	1	2	4	1	3
2	0	1	0	1	3	2	4	14	2	1	0	1	4	3	2
3	0	1	1	2	3	1	4	15	2	1	1	2	4	3	1
4	0	2	0	3	1	2	4	16	2	2	0	3	4	1	2
5	0	2	1	3	2	1	4	17	2	2	1	3	4	2	1
6	1	0	0	1	2	4	3	18	3	0	0	4	1	2	3
7	1	0	1	2	1	4	3	19	3	0	1	4	2	1	3
8	1	1	0	1	3	4	2	20	3	1	0	4	1	3	2
9	1	1	1	2	3	4	1	21	3	1	1	4	2	3	1
10	1	2	0	3	1	4	2	22	3	2	0	4	3	1	2
11	1	2	1	3	2	4	1	23	3	2	1	4	3	2	1

以 $a_3a_2a_1$ 为 021 为例，$a_3 = 0$，说明 4 的右方不存在比 4 小的数，故最后一位为

4,即排列必为

$$\times\times\times 4$$

又 $a_2=2$,说明3的右方有两个比3小的数,即

$$3\times\times 4$$

$a_1=1$,故1在2的右方,故得排列

$$3\quad 2\quad 1\quad 4$$

上面 a_k 理解为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中 $k+1$ 数右方比 $k+1$ 小的数的个数,将右改为左也可以得一生成法,留给读者自己来完成.

1.4.2　排列生成算法之二

通常排列可从下面(图1-6)的树状构造中得出的.

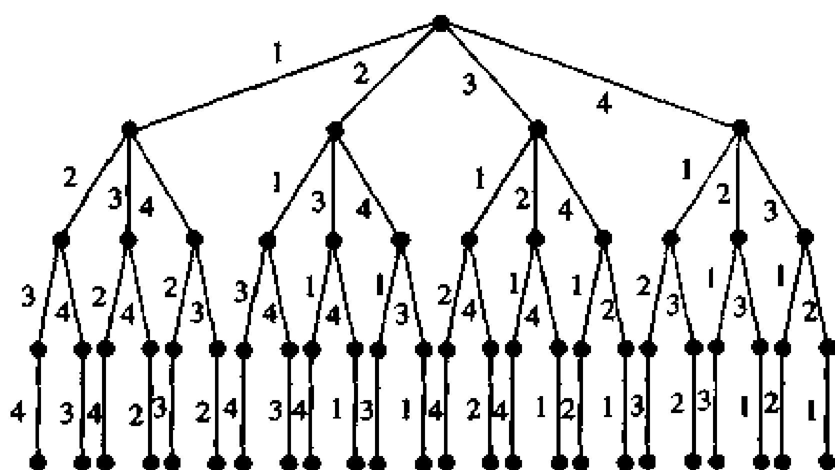


图1-6

假定 $n=4$,树高为4,24个叶片节点对应于24种排列.从树根到叶片结点经过4条边给出一个排列.比如从左到右依次为

1 2 3 4　　1 2 4 3　　1 3 2 4　　1 3 4 2　　1 4 2 3　　1 4 3 2
2 1 3 4　　2 1 4 3　　2 3 1 4　　2 3 4 1　　2 4 1 3　　2 4 3 1
3 1 2 4　　3 1 4 2　　3 2 1 4　　3 2 4 1　　3 4 1 2　　3 4 2 1
4 1 2 3　　4 1 3 2　　4 2 1 3　　4 2 3 1　　4 3 1 2　　4 3 2 1

下面的算法是从已知的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 生成下面排列.

步1　求满足 $p_{i-1}<p_j$ 关系的 j 的最大值,设为 i,即

$$i=\max\{j \mid p_{j-1}<p_j\}.$$

步2　求满足 $p_{j-1}<p_k$ 的 k 的最大值,设为 h,即

$$h=\max\{k \mid p_{i-1}<p_k\}.$$

步3　p_{i-1} 与 p_h 互换得排列,设为

$$\bar p_1\bar p_2\cdots\bar p_i\bar p_i\bar p_{i+1}\cdots\bar p_n.$$

步4　$\bar p_1\bar p_2\cdots\bar p_{i-1}\bar p_i\bar p_{i+1}\cdots\bar p_n$ 中的 $\bar p_i\bar p_{i+1}\cdots\bar p_n$ 顺序逆转,得

$$\bar p_1\bar p_2\cdots\bar p_{i-1}\ \bar p_n\bar p_{n-1}\cdots\bar p_{i+1}\bar p_i.$$

这便是下一个排列．

设 $p_1p_2p_3p_4 = 3421$，

步 1 $i = \max\{j \mid p_{j-1} < p_j\} = 2$.

步 2 $h = \max\{k \mid p_{i-1} < p_k\} = \max\{k \mid p_1 < p_k\} = 2$.

步 3 p_1 和 p_2 互换得 4321.

步 4 将 321 顺序逆转得 4123.

若不存在 j 使 $p_{j-1} < p_j$ 时，则到达最后一个排列．

1.4.3 排列生成算法之三

下面介绍一种十分有趣的生成算法，以 1234 为例．开始时在各数上方给一箭头，得

$$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$$

当数的箭头所指一侧，相邻的数比该数小时，称该数处于活动状态．以 $\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$ 为例，$\overleftarrow{2}$、$\overleftarrow{3}$、$\overleftarrow{4}$ 都处于活动状态．下面是给出下一个排列的算法．

步 1 求处于活动状态的数中的最大者，设为 m，m 和箭头所指一侧的相邻数互换位置．

步 2 令比 m 大的所有数的箭头改变方向．

步 3 若不存在处于活动状态的数，则结束；否则转步 1.

从 $\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$ 开始可得所有的排列如下：

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$ $\overleftarrow{4}$ 是活动状态数中最大者．

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{3}$

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}$

$\overleftarrow{4}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}$ $\overleftarrow{3}$ 是活动状态数中最大者．

$\overrightarrow{4}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{2}$ 4 的箭头改变方向．

$\overleftarrow{1}\ \overrightarrow{4}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{2}$

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{3}\ \overrightarrow{4}\ \overleftarrow{2}$

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{2}\ \overrightarrow{4}$ $\overleftarrow{3}$ 是活动状态数中最大者．

$\overleftarrow{3}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overrightarrow{4}$ 4 的箭头改变方向．

$\overleftarrow{3}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{2}$

$\overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}$

$\overleftarrow{4}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}$　　$\overleftarrow{2}$ 是活动状态数中最大者.

$\overrightarrow{4}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}$　　3 和 4 的箭头改变方向.

$\overrightarrow{3}\ \overrightarrow{4}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}$

$\overrightarrow{3}\ \overleftarrow{2}\ \overrightarrow{4}\ \overleftarrow{1}$

$\overrightarrow{3}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{4}$　　$\overrightarrow{3}$ 是活动状态数中最大者.

$\overleftarrow{2}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{1}\ \overleftarrow{4}$　　$\overleftarrow{4}$ 是活动状态数中最大者.

$\overleftarrow{2}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{1}$

$\overleftarrow{2}\ \overleftarrow{4}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{1}$

$\overleftarrow{4}\ \overleftarrow{2}\ \overrightarrow{3}\ \overleftarrow{1}$　　$\overrightarrow{3}$ 是活动状态数中最大者.

$\overrightarrow{4}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{3}$　　4 的箭头改变方向,且是活动状态数中的最大者.

$\overleftarrow{2}\ \overrightarrow{4}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{3}$

$\overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{4}\ \overrightarrow{3}$

$\overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}\ \overrightarrow{3}\ \overrightarrow{4}$　　没有活动状态中的数,结束.

1.4.4　组合的生成

举一个由 1,2,3,4,5,6 中取 3 个数进行组合的例,从中不难得出生成组合的规律性来.

123	124	125	126	134	135	136
145	146	156	234	235	236	245
246	256	345	346	356	456	

从上面组合的生成过程可见:

(1) 最后一数最大可达到 n,上面例子中 $n=6$. 倒数第 2 位最大可达 $n-1$,…第 k 位最大可达 $n-k+1$. n 取 r 组合表以

$$c_1c_2\cdots c_r,$$

且

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_r,$$

$$c_r \leqslant n, c_{r-1} \leqslant n-1, \cdots, c_1 \leqslant n-r+1,$$

或

$$c_i \leqslant n-r+i, \quad i=1,2,\cdots,r.$$

(2) 当存在 $c_j < n-r+j$ 时,令

$$i = \max\{j \mid c_j < n-r+j\},$$

则作

$$c_{i+1} \leftarrow c_{i+1}, c_{i+2} \leftarrow c_{i+1} + 1, \cdots, c_r \leftarrow c_{r-1} + 1.$$

综上分析可得如下求下一组合的算法．

步1　求 $i = \max\{j \mid c_j < n - r + j\}$.

步2　$c_i \leftarrow c_{i+1}$.

步3　j 从 $i+1$ 到 r 作 $c_j \leftarrow c_{j-1} + 1$.

1.5　允许重复的组合

从 n 个不同元素中取 r 个进行组合，每个元素允许重复，则组合数为

$$C(n + r - 1, r).$$

证明　只要证明从 n 个不同元素中取 r 个作允许重复的组合，与从 $n + r - 1$ 个不同元素中取 r 个作不重复组合一一对应即可．

不失一般性，假定 n 个元素为数 $1,2,\cdots,n$. 取 r 个作允许重复的组合，设为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$，不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$. 作

$$a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \cdots, a_r + r - 1.$$

显然有
$$a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \cdots < a_r + r - 1.$$
故 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 对应于从 $n + r - 1$ 个不同元素中取 r 个不同元素的组合

$$a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \cdots, a_r + r - 1.$$

反过来，从 $1,2,\cdots,n + r - 1$ 中取 r 个作不重复的组合，设为 $b_1, b_2, \cdots, b_r$，且 $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$. 构造

$$b_1, b_2 - 1, b_3 - 2, \cdots, b_r - r + 1.$$

显然有
$$b_1 \leqslant b_2 - 1 \leqslant b_3 - 2 \leqslant \cdots \leqslant b_r - r + 1 \leqslant n.$$
令
$$a_k = b_k - k + 1, \quad k = 1,2,\cdots,r,$$
则 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$，是从 n 个数中取 r 个作允许重复的组合．

允许重复的组合的典型模型是：取 r 个无区别的球放进 n 个有标志的盒子中，每盒的球数不加限制．

例 10　试问 $(x + y + z)^4$ 有多少不同的项．

$(x + y + z)^4$ 展开式都是 4 次方项：

$$x^l y^m z^n, \quad l + m + n = 4.$$

相当于 4 个无区别的球放进有标志 x、y、z 的盒子，每盒的球数无限制．故项数应为

$$C(4 + 3 - 1, 4) = C(6,4) = 15.$$

这 15 项是

$$x^4 \quad x^3y \quad x^3z \quad x^2yz \quad x^2y^2 \quad x^2z^2 \quad xy^3 \quad xz^3$$
$$xy^2z \quad xyz^2 \quad y^2z^2 \quad y^3z \quad yz^3 \quad z^4 \quad y^4$$

x^4 看作 4 个无区别的球全部放进有标志 x 的盒子；x^3y 相当于有 3 个球放进标志 x 的盒子，一个球放进标志 y 的盒子．

1.6 若干公式的组合意义

有些等式有着十分直观的组合意义，这一节将不通过形式推理而从直观上理解它的实际含义，饶有趣味．

1．$C(n,r)=C(n,n-r)$

从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个组合，与余下的 $n-r$ 个构成的组合一一对应，得证．

2．$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$

从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个进行组合，就其中某一元素设为 a_1 来说，无非有两种情况，一是不在其中，这样的组合数等于 $C(n-1,r)$，另一种情况是 a_1 在其中，这样的组合相当于将 a_1 取出，在余下的 $n-1$ 个元素中取 $r-1$ 个进行组合，再加上 a_1 元素构成 r 个元素的组合，其组合数为 $C(n-1,r-1)$．根据加法法则

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1).$$

这个公式的另一种形式是

$$C(m+n,m)=C(m+n-1,m)+C(m+n-1,m-1).$$

又有新的含义．如图 1-7，

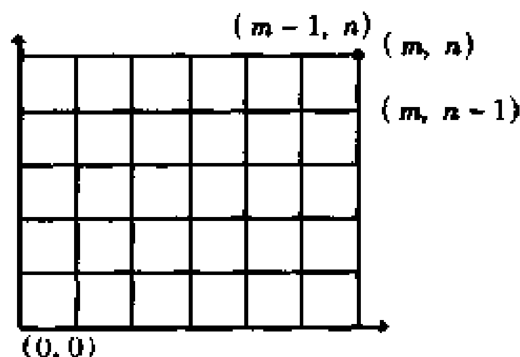


图 1-7

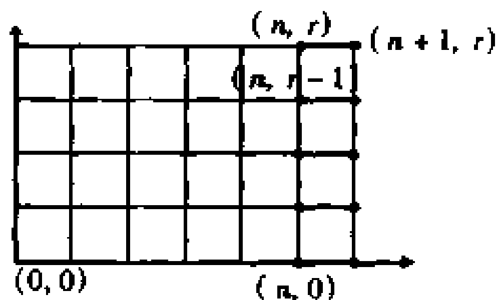


图 1-8

$C(m+n,m)$ 等于从 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的路径数．就其到达 (m,n) 点的途径无非是从 $(m-1,n)$ 进入 (m,n)，和从 $(m,n-1)$ 进入 (m,n) 两种．故依据加法法则得

$$C(m+n,m)=C(m+n-1,m)+C(m+n-1,m-1).$$

3．$C(n+r+1,r)=C(n+r,r)+C(n+r-1,r-1)+\cdots+$
$C(n+1,1)+C(n,0)$

如图 1-8，等式左端看作是从 $(0,0)$ 点到 $(n+1,r)$ 点的路径数．等式右端各项分别表示从 $(0,0)$ 点到 (n,r)，$(n,r-1)$，$\cdots$，$(n,0)$ 点的路径数．$(0,0)$ 点到 $(n+1,r)$ 点的路径数无非是后面各种路径之和．以 $(0,0)$ 点到 $(n,r-1)$ 点的路径为例，表示到了 $(n,r-1)$ 点后沿粗线所示的走一步到 $(n+1,r-1)$ 再到 $(n+1,r)$ 点．其余同理类推．从 $(0,0)$ 到 $(n+1,r)$ 点的路径，无非是其中之一．根据加法法则，上式成立．

4. $\binom{n}{l}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}\ (l\geqslant r)$

等式左端可以看作是从 n 个元素中取 l 个组合，再从每一 l 个组合中取 r 个组合，所得组合必有重复的，这相当于直接从 n 个中取 r 个组合的组合数乘以重复数，其重复数为 $\binom{n-r}{l-r}$. 例如从 1,2,3,4,5 中取 4 个组合，有

$$1234 \quad 1235 \quad 1245 \quad 1345 \quad 2345$$

再从每一个组合中取 2 个组合，从表 1-1 可以很明显地说明了这个道理.

表 1-1

4组合 \ 2组合	12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
1 2 3 4	12	13	14		23	24		34		
1 2 3 5	12	13		15	23		25		35	
1 2 4 5	12		14	15		24	25			45
1 3 4 5		13	14	15				34	35	45
2 3 4 5					23	24	25	34	35	45

12345 取 2 个组合有 12,13,14,15,23,24,25,34,35,45 共 10 个；1234 取 2 个组合则有 12,13,14,23,24,25,34,35. 以 12 为例，除去 12 外，345 中取 2 个组合有 34,35,45 分别与 12 结合得 1234,1235,1245. 从它们中取两个组合都能产生 12. 12 重复度由此产生.

5. $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0},$

$$r\leqslant \min\{m,n\}$$

设有 $m+n$ 个有标志的球，其中 m 个是红的，n 个是白的. 从中取 r 个组合，不外乎是：全是白的，1 个红的 $r-1$ 个白的，2 个红的，$r-2$ 个白的，… 全是红的等这几种可能. k 个红的 $r-k$ 个白的的组合数是 $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ (乘法法则). 根据加法法则，等式成立.

6. $\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m},m\leqslant n$

如图 1-9 所示，等式左端可以看作是从(0,0) 点到 (n,m) 点的路径数目.

从(0,0) 点到 $(k,m-k)$ 点的路径数为 $\binom{m}{k}$. 从 $(k,m-k)$ 点到 (n,m) 点的路径数相当于从(0,0) 点到 $(n-k,k)$ 点的路径数，即为 $\binom{n}{k}$. 所以根据乘法法则，从(0,0) 点经过 $(k,m-k)$ 点到

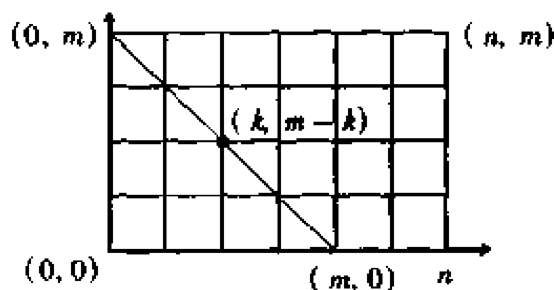


图 1-9

(n,m) 点的路径数为$\binom{m}{k}\binom{n}{k}$. 从$(0,0)$ 点到(n,m) 点的路径必通过$(k,m-k)$中某一点, $k=0,1,2,\cdots,m$. 依据加法法则,等式成立.

1.7 应用举例

例11 4个全同的质点,总能量为$4E_0$, E_0是个常数. 每个质点的能级可能为kE_0, $k=0,1,2,3,4$.

若能级为kE_0的质点服从布什-爱因斯坦(Bose-Einstein)分布,可以有k^2+1种状态,同能级的质点可以处于相同的状态,试问有多少种不同的图像?

总能量为$4E_0$的4个质点可能有以下5种分布:

1) $0,0,0,4E_0$;

2) $0,0,E_0,3E_0$;

3) $0,0,2E_0,2E_0$;

4) $0,E_0,E_0,2E_0$;

5) E_0,E_0,E_0,E_0.

由于kE_0能级的质点可以有$1+k^2$种状态.

k	0	1	2	3	4
$1+k^2$	1	2	5	10	17

由于具有相同能级的不同质点可以处于相同的状态,故分别就上面5种分布分析可能的图像数.

1) 有1×17种图像.

2) 有$1\times 2\times 10=20$种图像.

3) 由于$2E_0$有5种状态,两个$2E_0$的质点可以处于相同的状态,相当于从5种状态中取2作允许重复的组合,组合数为$C(5+2-1,2)=C(6,2)=6\times 5/2!=15$. 根据乘法法则有$1\times 15=15$种不同的图像.

4) 两个E_0的质点,可能有$C(2+2-1,2)=C(3,2)=3$种情况,故根据乘法法则应有$3\times 5=15$种图像.

5) 4个E_0的质点,应有$C(2+4-1,4)=C(5,4)=5$种图像.

依据加法法则总图像数为

$$N=17+20+15+15+5=72.$$

例12 若上面例子中的4个质点服从费米-狄拉克(Fermi-Dirac)分布, kE_0的质点可以有$2(1+k^2)$种状态,

k	0	1	2	3	4
$2(1+k^2)$	2	4	10	20	34

但不允许两个相同能级的质点在同一种状态. 问有多少种图像?

由$k=0$时只有两种状态,故$0,0,0,4E_0$这种分布是不可能存在. 其它分布的图像数分别为

2) $n_1 = 4 \times 20 = 80$,

3) $n_2 = 2C(4,2) \times 10 = 120$,

4) $n_3 = C(10,2) = 45$,

5) $n_4 = 1$.

根据加法法则总图像数 $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 246$.

例 13 a 和 b 是用 n 位 2 进制数表达的码:

$$a = a_1 a_2 \cdots a_n, \qquad a_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n;$$

$$b = b_1 b_2 \cdots b_n, \qquad b_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n;$$

$a_i \neq b_i$ 的个数称为 a 和 b 的汉明距离,用 $d(a,b)$ 表示．关于汉明距离,下面三角不等式成立．

$$d(a,b) + d(b,c) \geqslant d(a,c).$$

其理由是十分明显的．设 $c = c_1 c_2 \cdots c_n, c_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n$. 由于是 0,1 符号串,所以若 $a_i \neq b_i, b_i \neq c_i$,则 $a_i = c_i$.

反过来,若 $a_i \neq c_i$,不可能 $a_i = b_i, c_i = b_i$ 同时成立．.

若 a 和 a_1 的汉明距离小于 r,则将 a_1 当作 a 的错误作为 a 而认可．这样两个码字之间的距离不得小于 $2r+1$. 若 $d(a,b) \leqslant 2r$,可构造 c 使

$$d(a,c) \leqslant r, \quad d(b,c) \leqslant r.$$

结果 c 无法确定是 a 还是 b 的错误而给予纠正．

若有一组汉明距离不小于 $2r+1$ 的码字

$$a_1, a_2, \cdots, a_M,$$

显然有

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{r}\right] M \leqslant 2^n,$$

所以

$$M \leqslant 2^n \Big/ \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}.$$

这个不等式叫做汉明不等式,它建立了码长 n、码字数目 M 和 r 间的不等式关系．

2 逆推关系与母函数

2.1 母 函 数

母函数是组合数学中最有效的方法之一．它是形式地用代数方法巧妙地解决计数、枚举等问题．举例说明如下:

$$(1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \cdots (1 + a_n x)$$

$$= 1 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)x^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_nx^n.$$

x^k项的系数是$a_1, a_2, \cdots, a_n$中取k个组合的全体.比如x^2项系数为$a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n$便是一例.

若令$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$,可得

$$(1 + x)^n = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n.$$

另一方面由于

$$(1 + x)^n(1 + x)^m = (1 + x)^{n+m},$$

所以

$$\left[1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]\cdot\left[1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m}x^m\right]$$

$$= 1 + \binom{n+m}{1}x + \binom{n+m}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+m}{n+m}x^{n+m}. \tag{2-1}$$

对于$k \leqslant \min\{m, n\}$,比较等号两端x^k项系数可得

$$\binom{n+m}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0},\quad k \leqslant \min\{m, n\}. \tag{2-2}$$

这个结果前面已给出,而且给了它的组合解释.

若$m \leqslant k \leqslant n$有

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{m}\binom{n}{k-m}. \tag{2-3}$$

若$m < n \leqslant k \leqslant m + n$,有

$$\binom{m+n}{k} = \binom{n}{n}\binom{m}{k-n} + \binom{n}{n-1}\binom{m}{k-n+1} + \cdots + \binom{n}{k-m}\binom{m}{m}. \tag{2-4}$$

又

$$(1 + x)^n\left(1 + \frac{1}{x}\right)^m = x^{-m}(1 + x)^{m+n}, m \leqslant n.$$

所以

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x^{-1} + \binom{m}{2}x^{-2} + \cdots + \binom{m}{m}x^{-m}\right]$$

$$= x^{-m}\left[\binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}x + \cdots + \binom{m+n}{m+n}x^{m+n}\right].$$

比较等号两端常数项可得

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m}{0}\binom{n}{0} + \binom{m}{1}\binom{n}{r} + \cdots + \binom{m}{m}\binom{n}{m}. \tag{2-5}$$

从(2-1)式,令$x = 1$代入可得

$$C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n. \tag{2-6}$$

对(2-1)式,等号两端求x的导数可得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1},$$

令 $x=1$ 代入得

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}. \tag{2-7}$$

类似可得

$$\binom{n}{1}x+2\binom{n}{2}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^n=nx(1+x)^{n-1},$$

$$\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n}=n(n+1)2^{n-2}. \tag{2-8}$$

从(2-1)式还可以类似地推出一系列的等式．可见序列 $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…，$\binom{n}{n}$ 和多项式 $(1+x)^n$ 有着极密切的联系．从后者可推出 $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…，$\binom{n}{n}$ 许多性质．研究 $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…，$\binom{n}{n}$ 序列可借助于 $(1+x)^n$.

定义 1 对应于序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，构造一多项式

$$G(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

称 $G(x)$ 是序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的**母函数**．

2.2 递推关系

和母函数密切相关的有**递推关系**，它们构成了组合数学的重要组成部分．在作算法复杂性分析时，一起扮演着重要的角色．举一典型的汉诺(Hanoi)塔问题如下．

汉诺塔问题 有 n 个半径不同的圆盘和三根柱子 A、B、C，依其半径的大小，从大到小自下而上套在 A 柱上(图 2-1)，每次只允许转移一个盘套在 B 或 C 柱上，而且不允许大盘套在小盘上．若要将 A 柱上的 n 个盘转移到 C 柱上，请设计一方案，并估计要转移多少盘次？首先是设计算法，进一步作算法的复杂性分析．

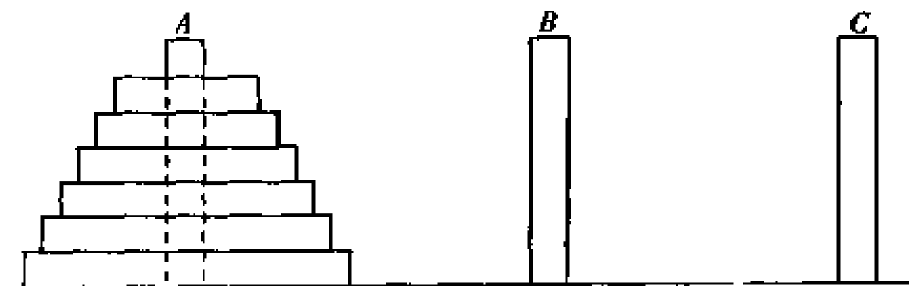


图 2-1

开始时已强调过，组合数学问题研究的有效办法是从最简单的问题分析起，从中找到一般规律性的东西．

先从 $n=2$ 开始，先将最上面的一个盘移到 B 柱上，接着将下面一块盘移到 C 柱上，再将刚移到 B 柱上的一块盘移到 C 柱上．两块盘的转移问题结束，共移动盘子 3 次．

再考虑 $n=3$ 的情形．与 $n=2$ 的类似，先将最上面两块盘用上面介绍的方法移到 B 柱上，再将最下面一块盘移到 C 柱上，再将 B 柱上两盘移到 C 柱上．可将上述办法推及一般．如数学归纳法一样，$n=2$ 可以解决，则 $n=3$ 也获得解决．假定 $n-1$ 块盘子问题获得解决．进而考虑 n 块盘子问题．先将上面 $n-1$ 块盘子转移到 B 柱上，再将最后一块盘子转移到 C 柱上，再将 B 柱上的 $n-1$ 块盘子转移到 C 柱上来．转移完毕．

下面对移动的盘次进行分析．令 h_n 为 n 块盘子的汉诺塔所需移动的盘次，则有

$$h_n = 2h_{n-1}+1, \qquad (2\text{-}9)$$
$$h_1 = 1,$$

(2-9) 式称为递推关系，$h_1=1$ 是初始条件．

$$h_2 = 2h_1+1 = 2+1 = 3,$$
$$h_3 = 2h_2+1 = 2(2+1)+1 = 2^2+2+1 = 7,$$
$$\cdots\cdots$$

不难发现

$$h_{n-1} = 2^{n-2}+2^{n-1}+\cdots+2+1 = 2^{n-1}-1.$$
$$h_n = 2h_{n-1}+1 = 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n-2+1 = 2^n-1.$$

下面介绍一种一般的母函数法．令

$$G(x) = h_1+h_2x+h_3x^2+\cdots,$$

其中 $h_2=2h_1+1, h_3=2h_2+1,\cdots$. 因为

$$h_2x+h_3x^2+\cdots = G(x)-h_1,$$

所以

$$G(x)-1 = 2xG(x)+x+x^2+\cdots,$$
$$(1-2x)G(x) = 1+\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

令

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x},$$
$$A(1-2x)+B(1-x) = (A+B)-(2A+B)x = 1,$$

解得

$$A+B=1,\quad 2A+B=0,$$

代入得

$$A=-1,\quad B=2.$$
$$G(x) = \frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x},$$
$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)+2(1+2x+2^2x^2+\cdots).$$

比较 x^{n-1} 项系数：$h_n = 2^n-1$.

例 1 求 n 位 10 进制数中出现偶数个 5 的数的个数．

设 n 位 10 进制数为 $a_1a_2\cdots a_n$．令 A_n 为含有偶数个 5 的 n 位 10 进制数的集合；B_n 为含有奇数个 5 的 n 位 10 进制数的集合．于是有

$$
\begin{aligned}
A_n &= 9A_{n-1} + B_{n-1}, \\
B_n &= A_{n-1} + 9B_{n-1}, \\
A_1 &= 8, \quad B_1 = 1.
\end{aligned} \tag{2-10}
$$

$A_n = 9A_{n-1} + B_{n-1}$ 表明的是 n 位 10 进制数中含偶数个 5 的数的构成：$n-1$ 位 10 进制数中含偶数个 5 的数，最后一位加上 0,1,2,3,4,6,7,8,9 中某一个数和 $n-1$ 位 10 进制数中含奇数个 5 的数，最后一位加上 5．同理证明

$$B_n = A_{n-1} + 9B_{n-1}.$$

$A_1 = 8$ 是指不含 5 的 1 位数有 8 个数．

(2-10) 式是关于序列 A_n 和 B_n 的联立递推关系．令

$$G(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \cdots,$$

$$H(x) = B_1 + B_2x + B_3x^2 + \cdots,$$

其中 $A_2 = 9A_1 + B_1, A_3 = 9A_2 + B_2, \cdots$

所以

$$G(x) - 8 = 9xG(x) + xH(x)$$

或

$$(1-9x)G(x) - xH(x) = 8. \tag{2-11}$$

同理可得

$$-xG(x) + (1-9x)H(x) = 1. \tag{2-12}$$

联立方程(2-11) 和(2-12)，得关于 $G(x)$ 和 $H(x)$ 的方程组

$$\begin{cases}(1-9x)G(x) - xH(x) = 8, \\ -xG(x) + (1-9x)H(x) = 1.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-9x & -x \\ -x & 1-9x \end{vmatrix} = (1-9x)^2 - x^2 = (1-10x)(1-8x),$$

得

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -x \\ 1 & 1-9x \end{vmatrix}}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{-71x+8}{(1-8x)(1-10x)} \\
&= \frac{D}{1-8x} + \frac{E}{1-10x} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x} + \frac{9}{1-10x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k + 9\cdot 10^k)x^k,
\end{aligned}
$$

得

$$A_n = \frac{7}{2}\times 8^{n-1} + \frac{9}{2}\times 10^{n-1}.$$

如若令 $A_n = 9A_{n-1} + B_{n-1}$，但 $B_{n-1} = 9\times 10^{n-2} - A_{n-1}$，可得

$$A_n = 8A_{n-1} + 9\times 10^{n-2}, \quad A_1 = 8.$$

结果也是一样．

例 2 从 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取 r 个作允许重复的组合．其结果可以分为以下两种：

(1) 不出现某特定元素，比如 a_1，这相当于从 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 中取 r 个作允许重复的组合．

(2) 出现某特定元素，比如 a_1．这相当于从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中取 $r-1$ 个元素作允许重复的组合，然后再加上 a_1．

从 n 个元素中取 r 作允许重复组合的组合数用 $\bar{C}(n,r)$ 表示它．于是有

$$\bar{C}(n,r) = \bar{C}(n-1,r) + \bar{C}(n,r-1), \tag{2-13}$$

$$\bar{C}(n,1) = n, \quad \bar{C}(n-1,1) = n-1.$$

从(2-13)式可推出 $\bar{C}(n,0) = 1$ 作为补充定义．(2-13)式是两个变元的递推关系．

令

$$G_n(x) = \bar{C}(n,0) + \bar{C}(n,1)x + \bar{C}(n,2)x^2 + \cdots,$$

$$G_{n-1}(x) = \bar{C}(n-1,0) + \bar{C}(n-1,1)x + \bar{C}(n-1,2)x^2 + \cdots,$$

其中

$$\bar{C}(n,1) = \bar{C}(n-1,1) + \bar{C}(n,0),$$

$$\bar{C}(n,2) = \bar{C}(n-1,2) + \bar{C}(n-1,1),$$

$$\vdots$$

所以

$$G_n(x) - 1 = G_{n-1}(x) - 1 + xG_n(x),$$

$$(1-x)G_n(x) = G_{n-1}(x). \tag{2-14}$$

(2-14)式是关于 $G_n(x)$ 的递推关系．得

$$G_n(x) = \frac{1}{1-x}G_{n-1}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x)$$

$$= \cdots = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x),$$

$$G_1(x) = \bar{C}(1,0) + \bar{C}(1,1)x + \bar{C}(1,2)x^2 + \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

所以有

$$G_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

由二项式定理知

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

于是得

$$\bar{C}(n,r) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = C(n+r-1,r).$$

前面举了3个例子，三种类型．有多元的，也有联立的．

2.3　斐波那契序列

问题是这样提出的：有雌雄一对兔子，假定两个月后可生下雌雄一对兔子，按

这样的速度繁殖下去，试问第 n 个月后可有几对兔子？

第1个月一对兔子；第2个月仍是老的一对；第3个月有新生一对，连同老的一对共两对；第4个月又新生一对，两对是老的，共3对；第5个月新生的两对，共5对；…

凡是新生的下个月不能繁殖，老的则可以繁殖新生的兔子．设第 n 个月兔子的对数为 F_n，其中新生的对数为 N_n，老的对数为 O_n，则有

$$F_n = N_n + O_n,$$

$$N_n = O_{n-1},\quad O_n = F_{n-1}.$$

由上得

$$N_n = F_{n-2},$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad F_1 = 1, F_2 = 1.$$

即 F_n：1，1，2，3，5，8，13，21，… 称为斐波那契(Fibonacci)序列．

令

$$G(x) = F_1x + F_2x^2 + \cdots,$$

则

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1 - \alpha x} + \frac{1}{1 - \beta x}\right],$$

其中

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

斐波那契数可用来求单峰极值的极值点，即所谓的优选法．若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上只有一极值点 ξ，使得 x 与 ξ 的偏离越大，则 $|f(x) - f(\xi)|$ 也越大，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有**单峰极值**．

不妨假定求的是极大点．实际工作中 ξ 点需要通过实验来求得，关键是要求实验次数尽可能少．可将 (a, b) 区间分成 F_n 个等分(图 2-2)．第一次在第 F_{n-2} 和第 F_{n-1} 等分点作两次实验．假定 $f(F_{n-2}) > f(F_{n-1})$，由于是求单峰极大点，故 ξ 必然在 $(0, F_{n-1})$ 区间上，(F_{n-1}, F_n) 区间可以去掉不再考虑．又由于 $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$，故 F_{n-1} 点的试验继续有效，只要在 F_{n-3} 点再做一次试验．

图 2-2

如若 $f(F_{n-1}) > f(F_{n-2})$，去掉的应是 $(0, F_{n-2})$ 区间．F_{n-1} 点的试验依然有效．

上面 $f(F_{n-1})$ 实际应是 $f(x)$ 在 x 等于第 F_{n-1} 个等分点的坐标时的函数值．为了简单起见就记为 $f(F_{n-1})$．余此类推．

2.4　指数型母函数

设有 n 个元素，其中 a_1 重复了 n_1 次，a_2 重复了 n_2 次，…，a_k 重复了 n_k 次，

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

如若 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1, k = n$，则就是一般的排列问题．这样有重复的全排列的排列数应为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

其中 $n_1!n_2!\cdots n_k!$是重复数．

以 a_1 重复3次，a_2 重复2次，a_3 重复3次为例．设 c_k 为从中取k个元素进行组合的组合数．则序列 $c_0,c_1,\cdots,c_8$ 的母函数为

$$G(x)=(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3).$$

以4次方项为例，有

$$x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+$$
$$x_1^3x_3+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2,$$

这给出了3个元素组合的全体．$x_1x_3^3$ 表示 a_1 取1个 a_3 取3个，其它依此类推．

若进而考虑取4个元素的排列，求总排列数．以 $x_1^2x_2^2$ 项为例，表达了 a_1、a_2 各取两个的排列，排列数应为

$$\frac{4!}{2!2!}=6.$$

所以本例取4个元素的总排列数应为

$$4!\Big(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!2!}+$$
$$\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!2!}\Big)=70.$$

为了便于讨论有重复的取 r 个作排列的问题，引进指数型母函数．

定义2 对于序列 $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots$，令

$$G_e(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots,$$

称 $G_e(x)$ 为该序列的**指数型母函数**．

前面 a_1 重复3次，a_2 重复2次，a_3 重复3次，则取 k 个元素进行排列的排列数序列的指数型母函数为

$$\begin{aligned}G_e(x)&=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{1!})^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})\\&=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\\&\quad\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8=1+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^3+\frac{28}{3!}x^4+\\&\quad\frac{170}{5!}x^5+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8.\end{aligned}$$

从而可知取1个元素排列的排列数为3；取2个元素排列的排列数为9；取3个元素排列的排列数为28；取4个元素排列的排列数为70，…，取8个元素排列的排列数为560.

例3 求由 a、b、c、d 4个字母取5个进行排列，要求 a 出现的是偶数次，b 出现的次数可达到3次，也可以不出现，c 不超过1次，d 不超过2次，但不能不出现．求上述条件的排列数．

令

$$G_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right),$$

取 x^5 项的系数：

$$\frac{43}{24}=\frac{215}{5!}.$$

故满足条件的排列数为 215 个．

例4　由 a、b、c、d、e 5个字母取 n 个作允许重复的排列，但 a 和 e 出现的次数为偶数，其它的字母没有限制．

构造指数型母函数

$$\begin{aligned}G_e(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\\&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(5^k+2\cdot 3^k+1)\frac{x^k}{k!},\end{aligned}$$

故取 k 个字母进行排列的排列数为

$$a_k=\frac{1}{4}(5^k+2\cdot 3^k+1).$$

2.5　应用举例

例5　有红球2个，白球1个，黄球1个，试问有多少种不同的组合方案．

用 r、y、w 分别代表红，黄，白色球．

$$\begin{aligned}(1+r+r^2)(1+w)(1+y)&=1+(r+y+w)+(r^2+ry+rw+yw)+\\&\quad(r^2y+r^2w+ryw)+r^2yw.\end{aligned}$$

以2次方项为例，$r^2+ry+rw+yw$ 表达有4种组合方案，r^2 表两个红球，ry 表一为红一为黄．

例6　n 个完全一样的球放到 m 个有标志的盒子，不允许有空盒，问有多少种不同的方案？设 $n>m$．

令 $G(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1+x_1{}^2+\cdots)(x_2+x_2{}^2+\cdots)\cdots(x_m+x_m{}^2+\cdots)$，

若 $x_1=x_2=\cdots=x_m=x$，则有

$$G(x)=x^m(1+x)^{-m}.$$

所求即为 $(1+x)^{-m}$ 中 x^{n-m} 项系数 $C(n-1,m-1)$，即

$$\frac{m(m-1)\cdots(n-1)}{(n-m)!}.$$

例7　由0—9的10数字及 $+,-,\times,\div$ 四个运算符构成长度为 n 位的算法表达式，试求它的个数．

令 A_n 表示 n 位长度的表达式数目，则

$$A_n=10A_{n-1}+40A_{n-2},$$

$$A_1 = 10, \quad A_2 = 120.$$

n 位算术表达的构造可以看作由 $n-1$ 位算术表达式的最后一位加上数字，或 $n-1$ 位不是算术表达式，但 $n-2$ 位必是算术表达式，后两位是运算符和数字构成的．$A_2 = 120$，除了 0—99 的 100 个数外，还有 $\pm k, k = 0,1,2,\cdots,9$．令

$$G(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

可得

$$G(x) = \frac{10x(1+2x)}{1-10x-40x^2},$$

$$A_k = 10(A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1}),$$

其中

$$\alpha = 5 + \sqrt{55}, \quad \beta = 5 - \sqrt{55},$$

$$A = \frac{\sqrt{65}-7}{2\sqrt{65}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{65}+7}{2\sqrt{65}}.$$

例 8　n 条椭圆曲线，两两相交于2点．不存在3条曲线交于一点．试问它们将平面分成多少互相不交叠的区域？

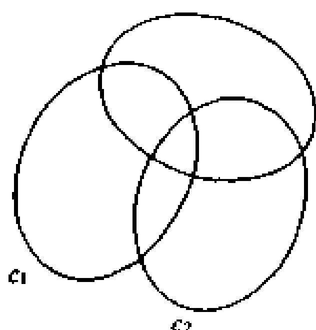


图 2-3

先从 $n = 2,3$ 看看有什么规律性的东西．

一条椭圆曲线时，分成内外两个区域．两条曲线时，新加的一条被原来的曲线分割成 2 部分，恰好是新分割出来的区域的边界．第 3 条曲线被前面两条曲线分成 4 部分，故又增了 4 个区域(图 2-3)．

令 A_n 为 n 条椭圆曲线将平面分割的区域的数目，则

$$A_n = A_{n-1} + 2(n-1),$$

$$A_1 = 2.$$

一般有　　$A_n = 2 + n(n-1)$.

例 9　一圆形，从圆心被分成 n 等分(图 2-4)，现用 k 种颜色对 n 个域着色，要求相邻域不同色，试问有多少种不同方案？

着色方案分为：①D_1 和 D_{n-1} 着的色相同；②D_1 和 D_{n-1} 着的色不同，两种情况．D_1 和 D_{n-1} 着相同颜色的方案相当于 $n-2$ 等分的着色方案；D_1 和 D_{n-1} 着不同颜色的方案相当于 $n-1$ 等分的着色方案．前者 D_n 可有 $k-1$ 种颜色选择，后者 D_n 可有 $k-2$ 种颜色选择．根据乘法法则和加法法则有

$$A_n = (k-1)A_{n-2} + (k-2)D_{n-1}, n \geqslant 4$$

$$A_2 = k(k-1), A_3 = k(k-1)(k-2),$$

其中 A_n 为等分数为 n 时的着色方案数．

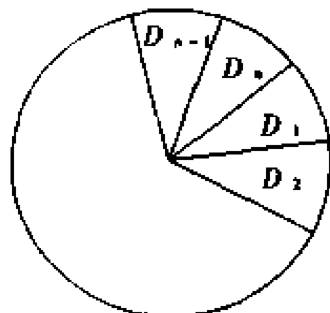


图 2-4

必须特别指出的是，为什么初始条件不是

$$A_1 = k,\quad A_2 = k(k-1).$$

首先它不满足递推关系．仔细推敲不难发现，递推关系是在 $n \geqslant 4$ 时得到的．

令
$$G(x) = A_2x^2 + A_2x^3 + \cdots,$$

可得
$$G(x) = \frac{k(k-1)x^2}{1-(k-2)x-(k-1)x^2}$$
$$= x^2\left[\frac{k-1}{1-x} + \frac{(k-1)^2}{1-(k-1)x}\right],$$

所以
$$A_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1),\quad n = 2,3,\cdots.$$

例 10

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n},$$

$$D_n = D_{n-1} - D_{n-2},\quad d_1 = 1, d_2 = 0.$$

令
$$G(x) = D_1x + D_2x^2 + \cdots,$$

可得
$$G(x) = \frac{x(1-x)}{1-x+x^2},\quad D_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1}-\beta)^{n+1}$$

其中
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

例 11 解图 2-5 电路问题，图中 □ 表示电阻，其上数字为电阻的单位数，v 表示电压．

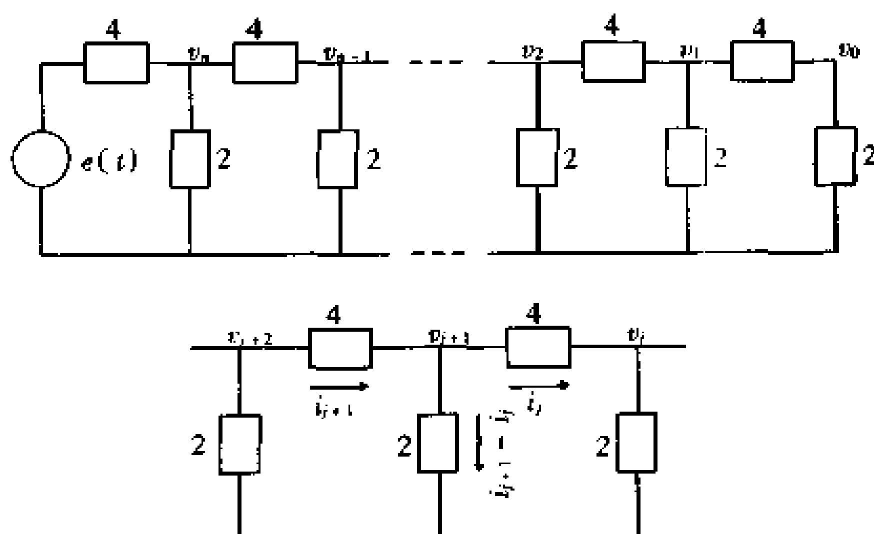


图 2-5

$$\begin{cases}4i_{j+1}=v_{j+2}-v_{j+1},\\4i_j=v_{j+1}-v_j.\end{cases}\tag{2-15}$$

另一方面

$$2(i_{j+1}-i_j)=v_{j+1}.\tag{2-16}$$

将(2-15)式代入(2-16)式得

$$\frac{1}{2}(v_{j+2}-v_{j+1}-v_{j+1}+v_j)=v_{j+1},$$

$$v_{j+2}-4v_{j+1}+v_j=0,$$

$$\frac{1}{4}(v_1-v_0)=\frac{1}{2}v_0,\text{所以 }v_1=3v_0.$$

令

$$V(x)=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots,$$

可得

$$V(x)=\frac{v_0(1-x)}{1-4x+x^2},$$

$$v_k=\frac{v_0}{2\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{k+1}-(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{k+1}].$$

2.6 线性常系数递推关系

对于线性常系数递推关系

$$a_{n+1}+c_1a_n+c_2a_{n-1}+\cdots+c_ka_{n-k+1}=b,\tag{2-17}$$

$$a_0=d_0,\quad a_1=d_2,\quad\cdots,\quad a_{k-1}=d_{k-1},\quad a_k=d_k,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k,d_0,d_1,\cdots,d_{k-1}$ 和 b 都是常数，它的求解有更成熟的办法，不必要像上一节例子中那样处理．

$b=0$，称(2-17)式为齐次的．

与(2-17)式对应的有代数方程

$$r^k+c_1r^{k+1}+\cdots+c_kr+c_{k+1}=0,\tag{2-18}$$

(1) 若特征方程(2-18)的 $k+1$ 个根

$$r_1,r_2,\cdots,r_{k+1}$$

是互不相同的实根，则(2-17)式的齐次方解为

$$a_l=h_1r_1^l+h_2r_2^l+\cdots+h_kr_k^l,\quad l=0,1,2,\cdots,$$

其中 $h_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数，由初始条件来确定．

例 12 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2},F_1=F_2=1,F_0=0.$

解 特征方程

$$r^2-r+1=0,$$

解得

$$r=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}),$$

所以

$$F_n=h_1r_1^n+h_2r_2^n.$$

由

$$F_0=h_1+h_2=0,\quad F_1=h_1r_1+h_2r_2=1,$$

得

$$\begin{cases}h_1+h_2=0,\\\frac{1}{2}(l_1+l_2)+\frac{1}{2}(h_1-h_2)\sqrt{5}=1\end{cases}$$

$$l_1=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad l_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

于是有
$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

例 13　$h_n=2h_{n-1}+1, h_1=1.$

这是非齐次的递推关系,可化为齐次递推关系如下:

$$h_{n+1}=2h_n+1,$$
$$h_n=2h_{n-1}+1,$$

于是有
$$h_{n+1}-3h_n+2h_{n-1}=0, h_0=0, h_1=1.$$

特征方程

$$r^2-3r+2=(r-2)(r-1)=0,$$

解得
$$r_1=1,\quad r_2=2.$$
$$h_n=l_1+l_2 2^n$$

由
$$h_0=l_1+l_2=0,\quad h_1=l_1+2l_2=1.$$

得
$$l_1=-1,\quad l_2=1.$$

所以得
$$h_h=2^n-1.$$

另法:设非齐次递推关系　$h_n=2h_{n-1}+1$ 的解为

$$h_n=g_n+r.$$

其中 g_n 满足
$$g_n=2g_{n-1}.$$

令
$$g_n=A2^n,$$

由上可得
$$g_n+r=2g_{n-1}+2r+1,$$

得
$$r=-1,$$
$$h_n=g_n-1=A2^n-1.$$

因为 $h_1=1$,所以 $A=1$,所以 $h_n=2^n-1$.

(2) 特征方程(2-18)有不同的复根. 设一个根为 $\rho e^{i\theta}$,另一为 $\rho e^{-i\theta}$,则 a_n 对应有

$$A\rho^n\sin n\theta+B\rho_n\cos n\theta.$$

例 14　$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}, a_1=1, a_2=0.$

解　特征方程　$r^2-r+1=0,$

$$r_1=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\quad r_2=e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

$$a_n=A\cos\frac{n\pi}{3}+B\sin\frac{n\pi}{3}.$$

由 $a_1=1, a_2=0$,得

$$\begin{cases}A\cos\dfrac{\pi}{3}+B\sin\dfrac{\pi}{3}=1,\\ A\cos\dfrac{2\pi}{3}+B\sin\dfrac{2\pi}{3}=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B=1,\\ -\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B=0.\end{cases}$$

解得 $A=1, B=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.代入得

$$a_n=\cos\frac{n}{3}\pi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n}{3}\pi.$$

(3) 特征方程(2-17)有重根的情况．设有 l 重根 r_1,则对应 r_1 有

$$(h_0+h_1n+h_2n^2+\cdots+h_{n-1}n^{l-1})r_1^n$$

项, $h_0,h_1,\cdots,h_{l-1}$ 是待定常数．

例 15
$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&0&\cdots&0&0\\0&1&2&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{n\times n}.$$

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2},\quad D_1=2,\quad D_2=3.$$

解 特征方程 $r^2-2r+1=(r-1)^2=0$,

$$r=1\quad(2\text{重根}).$$

所以
$$D_n=(A+Bn)1^n=A+Bn.$$

根据 $D_1=2, D_2=3$ 得

$$A+B=2,\quad A+2B=3.$$
$$A=B=1.$$

所以得
$$D_n=n+1.$$

例 16 求 $\sum_{k=0}^{n}k^2$.

解 记
$$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$
$$S_{n+1}=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2,$$

则
$$S_{n+1}-S_n=(n+1)^2.$$

同理
$$S_n-S_{n-1}=n^2.$$

于是得
$$S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}=2n+1,$$
$$S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=2(n-1)+1;$$
$$S_{n+1}-3S_n+3S_{n-1}-S_{n-2}=2,$$
$$S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=2;$$
$$S_{n+1}-4S_n+6S_{n-1}-4S_{n-2}+S_{n-3}=0.$$
$$S_0=0,\quad S_1=1,\quad S_2=5,\quad S_3=14.$$

特征方程
$$r^4-4r^3+br^2-4r+1=(r-1)^4=0,$$

所以有
$$S_n=(a+bn+cn^2+dn^3)1^n.$$

利用初始条件可确定常数 a,b,c,d,最后得

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$\sum_{k=0}^{n} k$、$\sum_{k=0}^{n} k^3$ 和 $\sum_{k=0}^{n} k^4$ 等可用类似办法求得．

2.7　卡特朗数

一个凸的 n 边形,通过不相交于凸 n 边形内部的对角线,将凸 n 边形拆分成若干三角形,拆分数目用 C_n 表示,

$$C_{n+1} = C_2C_n + C_3C_{n-1} + \cdots + C_nC_2, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 2.$$

如图 2-6 所示的凸 $n+1$ 边形,v_k 对 v_1、v_{n+1} 所张的三角形将凸 $n+1$ 边形分成一边为凸 k 边形,另一边为凸 $n-k+2$ 边形,k 从 $2,3,\cdots,n$.根据加法法则可得上面递推关系．这个递推关系不是线性的.

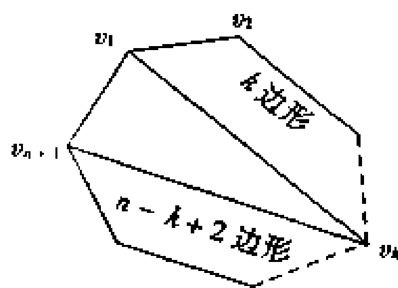


图 2-6

类似的理由可证,C_n 满足递推关系:

$$(n-3)C_n = \frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3),$$

证明从略．

令

$$G(x) = h_2 + h_3x + h_4x^2 + \cdots,$$

可得

$$x(G(x))^2 - G(x) + 1 = 0,$$

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},$$

$$G_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

例 17　$P = A_1A_2\cdots A_n$ 是 n 个矩阵连乘积,其中 $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{r_k\times r_{k+1}}, k = 1,2,\cdots,n$, r_k 是整数．$k = 1,2,\cdots,n$.乘法的结合律成立．不改变顺序．只引进括号表示乘积的先后顺序．试问有多少种乘积的方案?

令 p_n 表示 n 个连乘积的不同求乘方案数,则有

$$p_n = p_1p_{n-1} + p_2p_{n-2} + \cdots + p_{n-1}p_1,$$

$$p_1 = p_2 = 1,$$

所以

$$C_{n+1} = p_n.$$

卡特朗(Catalan)数的递推关系是一个非线性的典型例子．

3 容斥原理与鸽巢原理

3.1 容斥原理

基本定理 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$（图3-1）.

定理1 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

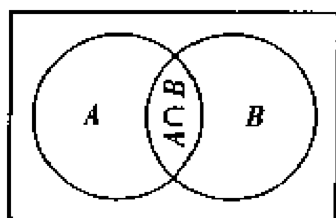


图3-1

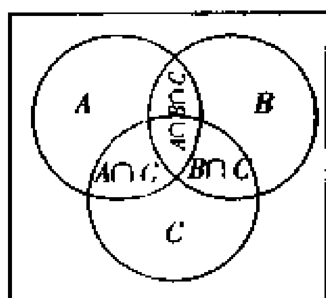


图3-2

证明
$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\
&= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\
&\quad |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$
见图3-2.

例1 一个班的同学，修课程A的有172人，修课程B的有132人，修课程C的有130人；其中同时修A和B两门课的有48人，同时修A和C两门课的有30人，同时修B和C两门课的有21人；同时修A、B、C三门课的5人．问全班共有多少人？

解 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 340.$

容斥定理1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限集合，则

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \\
&\quad (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

可用数学归纳法证明，这里从略．

容斥定理2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限集合，则

$$
\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| &= N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| -
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+$$
$$(-1)^n\quad|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.\qquad(3\text{-}2)$$

其中 N 是集合的全体的数目，A_i 是 U 的子集，$i=1,2,\cdots,n$.

容斥原理主要是这两个基本定理．

例2 从1到500的整数中，求能被3和5除尽的数的个数．

用 A_1 和 A_2 分别表示1到500中被3和5除尽的数的集合．根据容斥定理1有

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$
$$=\lceil\frac{500}{3}\rceil+\lceil\frac{500}{5}\rceil-\lceil\frac{500}{15}\rceil=233.$$

例3 求不超过120的素数个数．

$11^2=121$，故不超过120的合数必然是2,3,5,7的倍数．记

A_1 为不超过120且为2的倍数的数，

A_2 为不超过120且为3的倍数的数，

A_3 为不超过120且为5的倍数的数，

A_4 为不超过120且为7的倍数的数，

问题是求 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4|$.

根据容斥定理2有

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4|=120-|A_1|-|A_2|-|A_3|-|A_4|+$$
$$|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+$$
$$|A_2\cap A_4|+|A_2\cap A_4|-|A_1\cap A_2\cap A_3|-$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_4|-|A_1\cap A_3\cap A_4|-$$
$$|A_2\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$
$$=120-(\lceil\frac{120}{2}\rceil+\lceil\frac{120}{3}\rceil+\lceil\frac{120}{5}\rceil+\lceil\frac{120}{7}\rceil)+$$
$$(\lceil\frac{120}{2\times3}\rceil+\lceil\frac{120}{2\times5}\rceil+\lceil\frac{120}{2\times7}\rceil+\lceil\frac{120}{3\times5}\rceil+$$
$$\lceil\frac{120}{3\times7}\rceil+\lceil\frac{120}{5\times7}\rceil)-(\lceil\frac{120}{2\times3\times5}\rceil+\lceil\frac{120}{2\times3\times7}\rceil+$$
$$\lceil\frac{120}{2\times5\times7}\rceil+\lceil\frac{120}{3\times5\times7}\rceil)+\lceil\frac{120}{2\times3\times5\times7}\rceil=27.$$

例4 求完整地出现 n 个布尔变量的布尔函数数目．

记 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中不出 x_i 变量的布尔函数集合为 A_i，$i=1,2,\cdots,n$. 问题是求 $|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|$.

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=2^{2n}-C(n,1)2^{2n-1}+C(n,2)2^{2n-2}-\cdots+$$
$$(-1)^kC(n,k)2^{2n-k}+\cdots+k(-1)^nC(n,n)2.$$

注：n 个布尔变量的域对应于点

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad x_i=0,1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

故有 2^n 个点，每一个布尔函数对于每个点的值有0或1两种可能，故全体为 2^{2^n}.

例5 欧拉函数 $\varphi(n)$ 为小于 n 且与 n 互素的数的个数．求 $\varphi(n)$.

设

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 p_i 是 n 的素因子，$i = 1,2,\cdots,k$，A_i 为小于 n 且为 p_i 倍数的数的集合，$i = 1,2,\cdots,k$，则

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k| \\ &= n - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \cdots \pm |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) + \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

3.2 错排问题

$1,2,\cdots,n$ 的全排列，共 $n!$ 个，求其中1不在第1位，2不在第2位，……n 不在第 n 位的排列数．

设 A_i 为数 i 在第 i 位上的排列，$i = 1,2,\cdots,n$，则

$$|A_i| = (n-1)!, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!, \quad i,j = 1,2,\cdots,n, i \neq j,$$

……

$$\begin{aligned}|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| &= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \\ &\quad C(n,3)(n-3)! - \cdots \pm C(n,n)1! \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

例6 在数 $1,2,\cdots,9$ 的全排列中，求偶数在原来位置上，其余全不在原来位置上的数的数目．

总数为

$$5! - C(5,1)4! + C(5,2)3! - C(5,3)2! + C(5,4)1! - C(5,5) = 44.$$

例7 在1,2,3,4,5,6,7,8的全排列中，求1,3,5,7四个数不在自己位置上的排列数．

总数为

$$8! - C(4,1)7! + C(4,2)6! - C(4,3)5! + C(4,4)4! = 24\,024.$$

3.3 有限制的排列

1．棋子多项式

n 个元素的排列可以看作是 n 个棋子在 $n \times n$ 的棋盘上的一种布局，每行、每列有一棋子也仅有一棋子．

例如，图3-3对应一排列2 4 1 3 5：第1行棋子布在第2格，第2行棋子布在第4格，

等等.

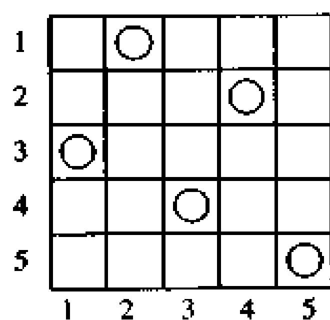


图 3-3

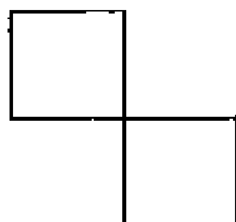


图 3-4

下面考虑更一般的形状．例如棋盘 C 如图 3-4 所示，$r_k(C)$ 表示 k 个棋子布在棋盘 C 上的可能方案数．则

$$r_1(\quad) = 2, \qquad r_2(\quad) = 1.$$

引进棋盘多项式

$$R(x,C) = \sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k.$$

对于棋盘 C 及 C 上的某一格子，关于该格子是否布上棋子，因而有 $C_{(i)}$ 和 $C_{(e)}$ 两种结果：$C_{(i)}$ 是该格子布上棋子，而且这格子所在的行和列消去后余下的棋盘．$C_{(e)}$ 是排除该格子布棋子，而仅将该格子从 C 中消去余下的棋盘．例如图 3-5.

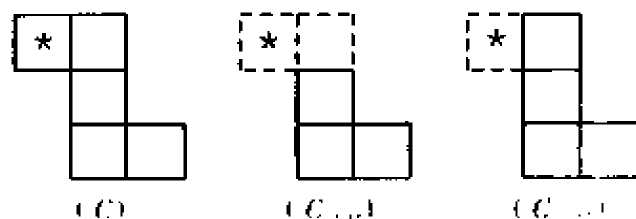


图 3-5

其上 * 表示 C 上考虑的格子，虚线为消去的部分．不同的点对应的 $C_{(i)}$ 和 $C_{(e)}$ 不一样，见图 3-6.

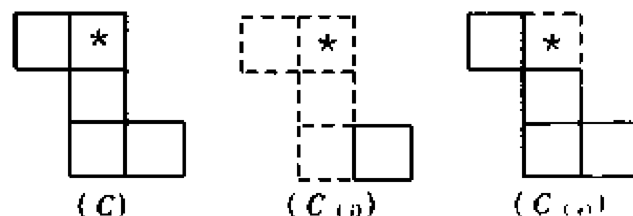


图 3-6

显然有

$$r_k(C) = r_k(C_{(e)}) + r_{k-1}(C_{(i)}),$$
$$R(x,C) = xR(x,C_{(i)}) + R(x,C_{(e)}).$$

例如

$R(x,\varnothing)=1,R(x,\square)=1+x,$

$R(x,\square\square)=xR(x,\varnothing)+R(\square)=x+1+x=1+2x,$

$R(x,\square\square\square)=xR(\square)+R(\square)=x(1+x)+1+x=1+2x+x^2,$

$R(x,\square\square\square)=xR(x,\varnothing)+R(x,\square\square\square)=x+1+2x+x^2=1+3x+x^2,$

$R(x,\square\square\square\square)=xR(\quad)+R(x,\square\square\square)=x(1+2x)+1+3x+x^2=1+4x+3x^2.$

若 C 由互相脱离的两部分棋盘组成,所谓互相脱离,指的是 C_1 和 C_2 没有属于同一行或同一列的格子．如图 3-7C 便可分解成互相脱离的 C_1 和 C_2. 对于 C 有

$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k}r_i(C_1)r_{k-i}(C_2),$$

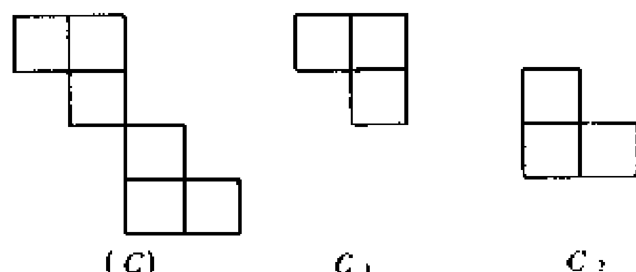


图 3-7

$$\begin{aligned}R(x,C)&=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)x^k\\&=\Big(\sum_{i=0}^{n}r_i(C_1)x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}r_j(C_2)x^j\Big)\\&=R(x,C_1)R(x,C_2).\end{aligned}$$

例 8　$R(x,\quad)=R(x,\square)R(x,\square)=(1+x)^2=1+2x+x^2.$

下面讨论在 $n\times n$ 的棋盘上有禁区的排列问题. 例如6×6棋盘图3-8中的影线部分便为禁区,不允许棋子布人,求在禁区之外布子有多少种排列．

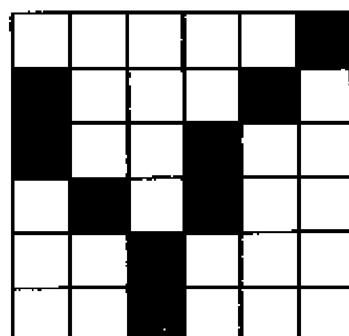


图 3-8

如若 r_i 是 i 个棋子布入禁区的方案数,令 $p_1p_2\cdots p_n$ 为所得的排列,A_i 为第 i 棋子落入禁区的事件,即 p_i 在禁区的事件,则问题导致求

$$\begin{aligned}&|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|\\&=n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n.\end{aligned}$$

例9　A、B、C、D 四位工人从事 J_1、J_2、J_3、J_4 四项工作,每人一项,但 A 不能做 J_2 工作,B 不能做 J_2、J_3 工作,C 不能做 J_3、J_4 工作,D 不能做 J_4 工作．在以上的限制条件下,试问有多少种不同的分配方案?

问题导致如图 3-9 所示的有禁区的排列问题. 如图 3-10 所示.

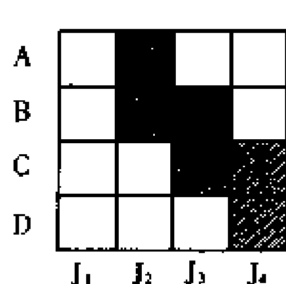
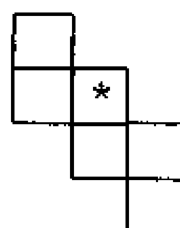
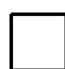
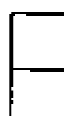


图 3-9

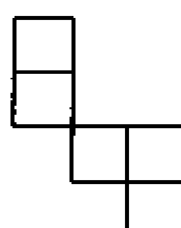


(C)





$(C_{(i)})$



$(C_{(e)})$

图 3-10

$$R(x, C_{(i)}) = (1 + x)(1 + 2x),$$

$$R(x, C_{(e)}) = 1 + 3x + x^2,$$

$$R(x, C) = x(1 + x)(1 + 2x) + (1 + x)(1 + 3x + x^2)$$
$$= 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

方案数

$$N = 4! - 6 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 4 = 4.$$

例 10　错排问题. 有禁区 C 如图 3-11 所示.

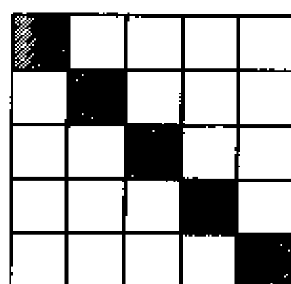


图 3-11

$$R(x, C) = (1 + x)^n$$
$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n.$$

错排问题的排列数为

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \cdots \pm C(n,n).$$

3.4　容斥原理的一般公式

可以将容斥原理的公式(3-1) 和(3-2) 拓广为一般的结果. 例如

$$|A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |A| - |A \cap B| - |A \cap \bar{C}| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|\bar{A} \cap B \cap \bar{C}| = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap C| = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

所以

$$|A \cap \bar{B} \cap C| + |\bar{A} \cap B \cap \bar{C}| + |\bar{A} \cap \bar{B} \cap C|$$
$$= (|A| + |B| + |C|) - 2(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3|A \cap B \cap C|).$$

$$|A \cap B \cap \bar{C}| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \cap \bar{B} \cap C| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \cap B \cap C| = |B \cap C| - |A \cap B \cap C|,$$

所以

$$|A \cap B \cap \bar{C}| + |A \cap \bar{B} \cap C| + |\bar{A} \cap B \cap C|$$
$$= |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3|A \cap B \cap C|.$$

类似可推出

$$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|=|A|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|)+(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|,$$

$$|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|=|B|-(|A\cap B|+|B\cap C|+|B\cap D|)+(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|,$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|=|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|+|C\cap D|)+(|A\cap B\cap C|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|,$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|=|D|-(|A\cap D|+|B\cap D|+|C\cap D|)+(|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|,$$

所以

$$\begin{aligned}&|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|\\&=|A|+|B|+|C|+|D|-2(|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|)+\\&\quad 3(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|)-4|A\cap B\cap C\cap D|.\end{aligned}$$

类似理由可得

$$\begin{aligned}&|A\cap B\cap\bar{C}\cap\bar{D}|+|A\cap\bar{B}\cap C\cap\bar{D}|+|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap D|+|\bar{A}\cap B\cap C\cap\bar{D}|+|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cap D|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cap D|\\&=|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|-3(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+\\&\quad|B\cap C\cap D|)+6|A\cap B\cap C\cap D|.\end{aligned}$$

和导出 $n=3$ 和 $n=4$ 相类似的办法还可以推出比较一般的公式.

例11　有一单位,已知有 J_1,J_2,J_3 三项任务.且从事 J_1 任务的有8人,从事 J_2 任务的有4人,从事 J_3 任务的有5人,同时从事 J_1 和 J_2 任务的有5人.同时从事 J_1 和 J_3 任务的有4人,同时从事 J_2 和 J_3 任务的有3人,同时从事3项任务的3人.试问

(1) 只从事一项任务的几人?

(2) 正好从事两项任务的几人?

令 A_i 表示从事 J_i 任务的人员集合,$i=1,2,3$.

$$|A_1|=8,\qquad |A_2|=6,\qquad |A_3|=5,$$

$$|A_1\cap A_2|=5,\qquad |A_1\cap A_3|=4,\qquad |A_2\cap A_3|=3,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3.$$

$$\begin{aligned}&|A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|+|\bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3|+|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3|\\&=(|A_1|+|A_2|+|A_3|)-2(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)+3|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=4.\end{aligned}$$

$|A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3| + |A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3| + |\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$\quad = (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$\quad = 3.$

3.5 鸽巢原理

鸽巢原理是组合数学关于存在性问题的常见到的一个原理.也叫做**抽屉原理**.即有 n 个鸽巢,$n+1$ 只鸽子,则至少有一鸽巢至少有两只鸽子.

从这样一个显而易见的原理可以推出许多十分有意思并不显见的结论.

(1) 一年 365 天,现有 366 人,则其中至少有两人生日相同.

(2) 抽屉里有 10 只手套.从中任意取出 6 只,其中至少有两只手套是配对的.

(3) 出席会议的 n 个代表,每人至少认识其余 $n-1$ 位中的一位,则 n 位代表中至少有两位认识的人数相等.

n 位代表认识其它代表的人数有 $1,2,\cdots,n-1$,看作是鸽巢.n 个鸽子,$n-1$ 个鸽巢,所以结论正确,即至少有二人认识的人相同.

(4) 从 1 到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个数,其中至少有两个数,一个是另一个的倍数.

设取的 $n+1$ 个数为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1},$$

对每一个数去掉所有的 2 的因子,最后余下一个奇数为止.因此有 $n+1$ 个奇数.

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}.$$

1 到 $2n$ 的所有整数最多只有 n 个不同的奇数,故必然存在 i 和 j,使

$$r_i = r_j = r, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n+1,$$

$$a_i = 2^{\alpha_i} r, \quad a_j = 2^{\alpha_j} r.$$

(5) $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是正整数序列,至少存在一对整数 k 和 l,$0 \leqslant k < l \leqslant m$,使

$$S = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l,$$

S 是 m 的倍数.作

$$S_h = \sum_{i=1}^{h} a_i, \quad h = 1,2,\cdots,m.$$

若 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 中有一个是 m 的倍数,则问题已解决.否则

$$S_h \equiv r_h \mod m, \quad h = 1,2,\cdots,m,$$

$$0 < r_h < m.$$

m 只鸽子,$m-1$ 个鸽巢,故必存在 l 和 k 使得 $0 \leqslant l < k \leqslant m$,$S_l \equiv S_k \equiv r \mod m$.

(6) m 只鸽子,n 个巢,至少有一鸽巢至少有 $\lceil \frac{m-1}{n} \rceil + 1$ 只鸽子.

如若不然,每个鸽巢最多 $\lceil \frac{m-1}{n} \rceil$ 只鸽子,将导致矛盾.

(7) $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 中的元素是互不相等的实数,则从中可选出 $n+1$ 个元素的子序列或为单调增或为单调减.

从每个元素 a_i 开始往后可找到一长度最大的单调减序列，设长度为 l_i，同样可找到一长度最大的单调增序列，设长度为 L_i，故有数偶

$$(l_1,L_1),(l_2,L_2),\cdots,(l_{n^2+1},L_{n^2+1}).$$

若 $1\leqslant l_i\leqslant n, 1\leqslant L_i\leqslant n, i=1,2,\cdots,n^2+1$，满足这条件的数偶最多只有 n^2 个，故必存在 i 和 j，使

$$(l_i,L_i)=(l_j,L_j).$$

不妨设 $i<j$，若 $a_j<a_i$，则与 $l_i=l_j$ 的假定矛盾．若 $a_i>a_j$，则与 $L_i=L_j$ 的假定相矛盾．所以推翻了 $l_i\leqslant n, L_i\leqslant n$ 的假定．

例12　将1到67的正整数任意分成4部分，其中至少有一部分有一元素是它的两元素之差．

这个问题是国际奥林匹克数学竞赛问题的缩影、即题目的规模缩小一些，道理是一样的．设将1到67的整数分成了 A_1,A_2,A_3,A_4 4部分，假定无一具有所述性质，最后将导出矛盾．

(1) 67只鸽子，4个巢，至少有一巢，设为 A_1，至少有 $\lceil\frac{67-1}{4}\rceil+1$ 只鸽子．所以1－67的整数中至少有

$$\lceil\frac{67-1}{4}\rceil+1=16+1=17.$$

个元素属于 A_1，假定是

$$a_1<a_2<\cdots<a_{17}.$$

令 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_{17}\}$，若 B 存在1数为某两数之差，则问题已证．如若不然，令

$$b_i=a_{i+1}-a_1<67,\quad i=1,2,\cdots,16,$$

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{16}\}.$$

显然 $b_i\overline{\in}A_1$，否则与假定 A_1 不存在一元素为某两元素之差相矛盾．所以 B 的元素只能属于 A_2、A_3 和 A_4．

(2) 和(1)的讨论类似，16只鸽子3个巢，至少有一鸽巢，设为 A_2，至少有 B 中元素的数目为

$$\lceil\frac{16-1}{3}\rceil+1=5+1=6.$$

假定是

$$c_1<c_2<c_3<c_4<c_5<c_6.$$

令 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_6\}$，假定 C 中不存在一元素为某两元素之差．否则将与假定 B 不具此性质相矛盾．

令

$$d_j=c_{j+1}-c_1<67,\quad j=1,2,3,4,5,$$

$$D=\{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\}.$$

实际上存在 l 和 m，使得

$$d_j=(a_l-a_1)-(a_m-a_1)=a_l-a_m.$$

所以 $d_j \overline{\in} A_1$,同时也不属于 A_2,所以 D 的元素必然有

$$\lceil\frac{5-1}{2}\rceil + 1 = 3$$

个元素在 A_3 或 A_4.

假定是

$$f_1 < f_2 < f_3$$

属于 A_3. 令 $F = \{f_1, f_2, f_3\}$,根据假定 F 不存在一元素为某两元素之差.

令

$$g_1 = f_2 - f_1 < 67, \quad g_2 = f_3 - f_1 < 67.$$

类似证 $G = \{g_1, g_2\}$ 不属于 A_1、A_2、A_3. 只能属于 A_4.

$$g_2 - g_1 = h < 67, \quad h \in A_1, A_2, A_3.$$

若 $h \in A_4$,这跟假定 1—67 的整数分属于 A_1、A_2、A_3、A_4 相矛盾,若 $h = g_1$,则

$$g_1 = g_2 - g_1.$$

3.6 拉蒙塞问题

最典型的**拉蒙塞**(Ramsey) 问题是"六个人在一起,至少存在三个人是相互认识,或互不相识". 六个人分别用 $v_1, v_2, \cdots, v_6$ 表示. 过六点作完全图. 相互认识的二人,对应顶点的连线边着以红色,不相识对应的边着以白色,问题相当于不论如何,用红、白两种颜色对六个顶点的完全图的边着色,必然存在一同色三角形.

与 v_1 点相关联的 5 条边(图 3-12),根据鸽巢原理至少有 $\lceil\frac{5-1}{2}\rceil + 1 = 3$ 条边同色,设为红色. 不妨假定 (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4) 边着红色. 三角形 $v_1v_2v_3$ 的边若存在红色边,设为 (v_2, v_3) 着红色,则至少存在一 $\triangle v_1v_2v_3$ 着红色. 如若 $\triangle v_1v_2v_3$ 的边无一着红色,至少存在 $\triangle v_1v_2v_3$ 着白色.

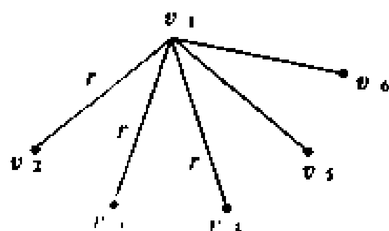


图 3-12

其实这个结论还可以推广为"对六个顶点的完全图的边用红、白两种颜色着色,至少存在两个同色的三角形". 这个结论由读者自己来证明.

类似的讨论可得:

9 个顶点的完全图,用红、白两颜色对边着色,若不存在红色四边形,必至少存在一个白色的三角形. 红色和白色交换,结论还是对的.

一对常数 a 和 b 对应有一最小的常数 r,使得 r 个顶点的完全图的边用红和白两种颜色任意着色时,至少存在 a 个顶点的完全图着红色或 b 个顶点的完全图着白色;或 a 个顶点的完全图着白色或 b 个顶点的完全图着红色. 用 $r(a, b)$ 表示,称为**拉蒙塞数**.

例 13 $r(3,3) = 6, r(3,4) = 9, r(4,4) = 18.$

已经确定了的拉蒙塞数 $r(a, b)$ 的数目非常有限.

4 伯恩赛德引理与波利亚定理

4.1 解的准备知识

定义1 已知集合 $G=\{a,b,\cdots\}$，及 G 上的二元运算“·”，并满足以下四个条件：

1° 封闭性．设 a、$b\in G$，则存在 $c\in G$，使得

$$a\cdot b=c.$$

2° 结合律．对于 a、b、$c\in G$，恒有

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

3° 存在单位元．G 中存在元素 e，使得对 $\forall a\in G$，恒有

$$a\cdot e=e\cdot a=a.$$

称 e 为 G 的单位元素．

4° 存在逆元素．任一元素 $a\in G$，恒存在 $b\in G$ 使得

$$a\cdot b=b\cdot a=e.$$

元素 b 记以 a^{-1}，称为 a 的逆元．

n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 间的置换全体构成，称为 n 阶的对称群，用 S_n 表示之．比如 S_3 和 S_4 分别罗列如下：

S_3:(1)(2)(3),(12),(13),(23),(123),(132).

S_4:(1)(2)(3)(4),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432),(12)(34),(13)(24),(14)(23).

S_3 共有6个元素，S_4 共有24个元素．其中 S_3 中的(1)(2)(3)表

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},$$

即1被1取代，2被2取代，3被3取代．(23)即为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

其它依此类推．

还应特别指出，任何置换都可以写成换位之积，例如(123)可以写成(12)(13)：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(123).$$

可以写成偶数换位之积的置换称为**偶置换**．

S_n 中偶置换的全体构成 S_n 的子群，用 A_n 表示之，称为 n 阶**交代群**．例如

A_3:(1)(2)(3),(123),(132),

A_4:(1)(2)(3)(4),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23).

S_n 群的元素和 n 个元素全排列一样多,即 $|S_n| = n!$. A_n 群的元素数目即 $|A_n| = \frac{1}{2}n!$,正好是 S_n 的一半.

4.2 伯恩赛德引理

1. 共轭类

置换群的每一个元素总可以写成循环的乘积,以 S_4 中元素(123)为例,实际上

$$(123) = (123)(4),$$
$$(12) = (12)(3)(4).$$

对于 S_n 的元素,按其写成循环积的格式可分解成如下格式:

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n},$$

其中$(j)^{c_j}$ 表示长度为 j 的循环节有 c_j 个.例如 S_4 中的(1)(2)(3)(4)属于

$$(1)^4(2)^0(3)^0(4)^0;$$

又如 S_4 中的(12)属于(12)(3)(4),故属于格式

$$(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0.$$

S_n 中同属于一个格式$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$ 的置换称为属于同一共轭类.显然

$$c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n = n.$$

而同一共轭类的置换数目等于

$$\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!2^{c_2}3^{c_3}\cdots n^{c_n}}.$$

例如 S_4 中属于$(2)^2$ 格式的共轭类的置换数目为

$$\frac{4!}{2!2^2} = 3,$$

即(12)(34),(13)(24),(14)(23);属于$(1)^1(3)^1$ 格式的共轭类的置换数目为

$$\frac{4!}{3} = 8,$$

即(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243).

2. k 不动置换类

置换群中使数 k 变为 k 的置换全体,称为 **k 不动置换类**. 例如 S_4 中使 1 保持不动的置换有(1)(2)(3)(4),(23),(24),(34),(234),(243),其中(23)实际上是(1)(4)(23)的缩写.

置换群中 k 不动置换类构成一子群用 Z_k 表类,如 S_4 中

$$Z_1 = \{(1)(2)(3)(4),(23),(24),(34),(234),(243)\}$$

3. 等价类

在 $1,2,\cdots,n$ 的置换群中,某一置换将 i 转换为 j,则称 i 和 j 是**同一等价类**.元素 i 所属的等价类用 E_i 表示它.如

$$G = \{(1)(2)(3)(4),(12),(34),(12)(34)\}$$

在群的作用下,1 被 2 置换,3 被 4 置换.则 1 和 2 属于同一等价类,3 和 4 则属于另一

等价类，即 $E_1 = \{1,2\} = E_2, E_3 = \{3,4\} = E_4$.

在置换群 G 的作用下，$1,2,\cdots,n$ 被分成若干个等价类.

使元素保持不动的 k 不动置换 Z_k 和 k 等价类 E_k，恒有

定理 1　$|E_k||Z_k| = |G|, k = 1,2,\cdots,n$.

若 $E_k = \{a_1(=k), a_2, \cdots, a_l\}, a_1, a_2, \cdots, a_l$ 是不超过 n 的正整数，而且互不相等，即存在 p_i 使

$$k \xrightarrow{p_i} a_i, \quad i = 1,2,\cdots,l.$$

设 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_l\}$，作 $G_j = Z_k p_j, j = 1,2,\cdots,l$. 由于

$$k \xrightarrow{p \in Z_k} k \xrightarrow{p_j} a_j$$

所以

$$k \xrightarrow{pp_j \in Z_k p_k} a_j, \quad j = 1,2,\cdots,l,$$

即 k 在 $Z_k p_j$ 元素作用下变为 a_j. $G_j = Z_k p_j \subseteq G$,

$$G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \cdots \dot{+} G_l \subseteq G,$$

其中符号 $\dot{+}$ 是集合的并.

另一方面凡是 $p \in G$, k 在 p 的作用下有

$$k \xrightarrow{p} a_j \xrightarrow{p_j^{-1}} k$$

所以

$$pp_j^{-1} \in Z_k,$$

即

$$p \in Z_k p_j.$$

因 p 是 G 的任一元素，这又证明了

$$G \subseteq Z_k p_1 \dot{+} Z_k p_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Z_k p_l,$$

所以

$$G = Z_k p_1 \dot{+} Z_k p_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Z_k p_l,$$

$$|G| = |Z_k||E_k|.$$

4. 贝恩塞(Burnside)引理

引理　G 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的置换群，G 在 N 上引出不同的等价类，不同等价类的数目为

$$m = \frac{1}{|G|}[c_1(a_1) + c_1(a_2) + \cdots + c_1(a_g)],$$

其中 $g = |G|$，$c_1(a_i)$ 为 a_i 元素的长度为 1 的循环节的数目.

下面举一实例叙述引理的原理.

$$G = \{(1)(2)(3)(4), (12), (34), (12)(34)\}$$

作 s_{jk} 表 4-1，其中 s_{jk} 是

$$s_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{若 } k \text{ 在 } a_j \text{ 作用下不动;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

表 4-1

a_j	k					
	1	2	3	4	$C_1(a)$	格　　式
(1)(2)(3)(4)	1	1	1	1	4	$(1)^4(2)^0(3)^0(4)^0$
(1 2)(3)(4)	0	0	1	1	2	$(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$
(1)(2)(3 4)	1	1	0	0	2	$(1)^2(2)^1(3)^0(4)^0$
(12)(34)	0	0	0	0	0	$(1)^0(2)^2(3)^0(4)^0$
$\lvert Z_k \rvert$	2	2	2	2	8	

$[s_{ij}]$矩阵的非零元素按行求和后最后求和，与按列求和然后求和的结果相等. 推及一般有

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ik} = c_1(a_j), \quad \sum_{j=1}^{g} s_{jk} = |Z_k|,$$

$$\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n} s_{ik} = \sum_{j=1}^{g} c_1(a_j) = \sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{g} s_{jk}.$$

若 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 分成 m 个等价类，即

$$N = E_1 + E_2 + \cdots + E_m.$$

当 j 和 k 同属一个等价类，则 $|Z_k| = |E_j||Z_j| = |G|$.

$$\sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in E_i} |Z_k| = \sum_{i=1}^{m} |E_i||Z_i| = m|G|,$$

则

$$m = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g} c_1(a_j).$$

例1　一正方形分成4方格，用两种颜色：红和白对 4 格子进行着色，问有多少种不同方案？旋转使之一致的方案作一种方案.

由于每个格子有两种选择，故有 16 种可能（见图 4-1）.

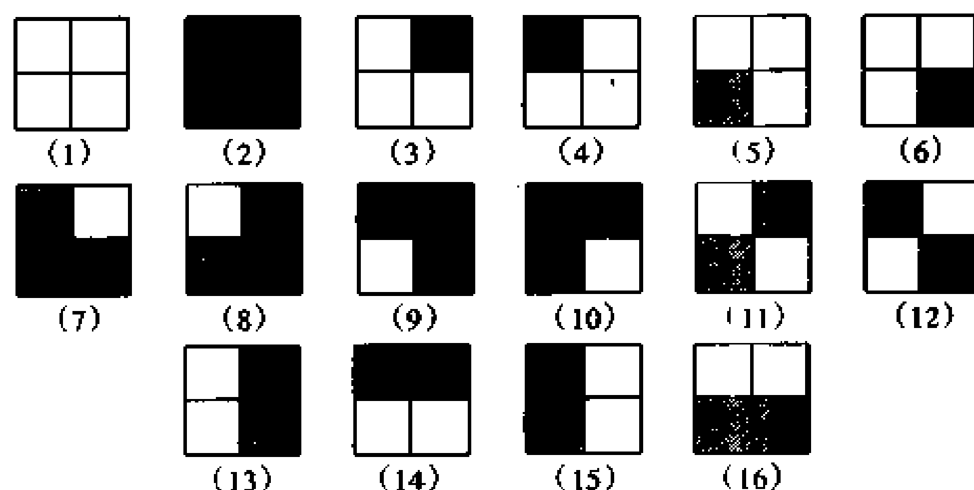


图 4-1

若对16种图像分别反时针旋转90°、180°、270°分别得关于16种图像的一种置换．若

$$p_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(\bar{0})(\bar{1})(\bar{2})(\bar{3})(\bar{4})(\bar{5})(\bar{6})$$

代表单位元，即不动置换，其中$\bar{0}$表10，$\bar{1}$表11，余类推．

$$p_2=(1)(2)(3456)(789\bar{0})(\bar{1}\bar{2})(\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}),$$

$$p_3=(1)(2)(35)(46)(79)(8\bar{0})(\bar{1}\bar{2})(\bar{3}\bar{5})(\bar{4}\bar{6}),$$

$$p_4=(1)(2)(6543)(\bar{0}987)(\bar{1}\bar{2})(\bar{6}\bar{5}\bar{4}\bar{3}).$$

根据贝恩塞引理，不同的等价类数目为

$$m=\frac{1}{4}(16+2+4+2)=6,$$

其中

$$c_1(p_1)=16,\quad c_1(p_2)=c_1(p_3)=2,\quad c_1(p_3)=4.$$

六个不相同的图像如图4-2.

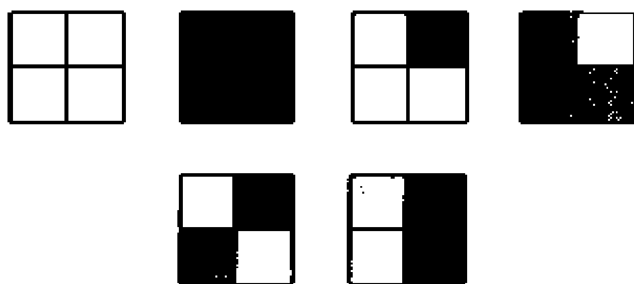


图 4-2

4.3　波利亚定理

若有n个对象，$\bar{G}$是n个对象的置换群．今用m种颜色对n个对象着色．问有多少不同的着色方案?下面的波利亚(Polya)定理回答这问题．在G群下作用一致的方案作为相同．以4.2节四方格二着色为例，这里的对象就是四方格．它的置换群$\bar{G}$是

$$\bar{p}_1=(1)(2)(3)(4),\quad \bar{p}_2=(1234),$$

$$\bar{p}_3=(13)(24),\quad \bar{p}_4=(4321).$$

定理2　(波利亚定理)　设$\bar{G}$是n个对象的一个置换群，用m种颜色对n个对象进行着色，则不同的着色方案数为

$$m=\frac{1}{|\bar{G}|}\left[m^{c(\bar{a}_1)}+m^{c(\bar{a}_2)}+\cdots+m^{c(\bar{a}_g)}\right],$$

其中$g=|\bar{G}|$，$c(\bar{a}_k)$为置换$\bar{a}_k$的循环节数．

看一看前面的例子，道理便自明了．比如

$$\bar{p}_1=(1)(2)(3)(4),$$

对各对象任意着色，在 $\overline{p}_1$ 作用下着色后的图像在 p_1 作用下不变，故

$$c_1(a_1) = 2^4 = 16.$$

再看 $\overline{p}_1 = (1\,2\,3\,4)$，即当对象 1、2、3、4 着相同颜色时，图像在 p_1 作用下不变，故 $c_1(a_2) = 2^{c(p_2)} = 2.\overline{p}_3 = (13)(24)$，即当对象 1 和 3，2 和 4 着相同颜色时，图像在 p_2 作用下不变，故 $c_1(a_3) = 2^{c(p_3)} = 2^2 = 4$. 请读者看看图 4-1 便可明白．

同样道理 $c_1(a_4) = 2^{c(\overline{p}_4)} = 2^1 = 2$.

4.4 举　　例

例2　如图4-3 所示一项链，上装有三颗红、蓝、绿色珠子，问有多少不同的图像．凡是旋转使之重合的方案作同一种方案．

$$\overline{G}:(1)(2)(3),(1)(2\,3),(2)(1\,3),(3)(1\,2),(1\,2\,3),(3\,2\,1).$$

故

$$m = \frac{1}{6}[3^3 + 3\cdot 2^2 + 2.3] = 10.$$

这 10 种方案：蓝蓝蓝，红红红，绿绿绿，红红蓝，红红绿，蓝蓝红，蓝蓝绿，绿绿红，绿绿蓝，红蓝绿．

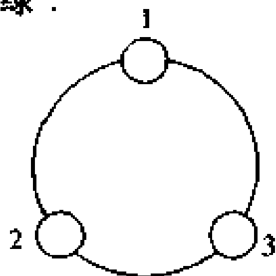


图 4-3

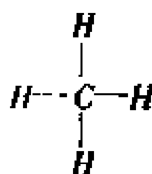


图 4-4

例4　甲烷 CH_4 的枝链如图 4-4 所示，若 4 个 H 键分别用 H，Cl，CH_3，CH_5 之一取代，问得几种不同的化学结构？

问题相当于用 4 种颜色对正四面体（图 4-5）的四个顶点着色．使四面体重合的刚体运动有置换群 $\overline{G}$：

$(1)(2)(3)(4)$，　$(1)(2\,3\,4)$，
$(2)(1\,3\,4)$，　$(3)(1\,2\,4)$，
$(4)(1\,2\,3)$，　$(1)(4\,3\,2)$，
$(2)(4\,3\,1)$，　$(3)(4\,2\,1)$，
$(4)(3\,2\,1)$，　$(1\,2)(3\,4)$，
$(13)(2\,4)$，　$(1\,4)(2\,3)$，

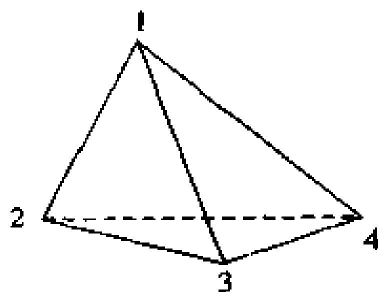


图 4-5

故不同的化学结构数目为

$$m = \frac{1}{12}[4^4 + 8\cdot 4^2 + 3\cdot 4^2] = 36.$$

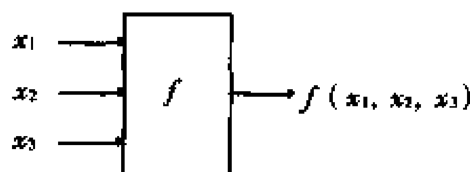


图 4-6

例 4　求三个布尔变量的布尔函数装置有多少种不同的结构?

如图 4-6 所示的输入端的变换群 H:

$(x_1)(x_2)(x_3),(x_1x_2x_3),(x_3x_2x_1),$

$(x_1)(x_2x_3),\quad (x_2)(x_1x_3),(x_3)(x_2x_1).$

以输入端置换$(x_1x_2x_3)$为例得 $\bar{G}$ 的置换:

$$\begin{pmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 000 & 010 & 100 & 110 & 001 & 011 & 101 & 111 \end{pmatrix}.$$

对应于输入端的置换群 H,有布尔变量的置换群 $\bar{G}$:

$$p_1 = (a_0)(a_1)(a_2)(a_3)(a_4)(a_5)(a_6)(a_7),$$
$$p_2 = (a_0)(a_1a_2a_4)(a_3a_6a_5)(a_7),$$
$$p_3 = (a_0)(a_1a_4a_2)(a_3a_5a_6)(a_7),$$
$$p_4 = (a_0)(a_1a_2)(a_3)(a_4)(a_5a_6)(a_7),$$
$$p_5 = (a_0)(a_1a_4)(a_2)(a_3a_6)(a_5)(a_7),$$
$$p_6 = (a_0)(a_1)(a_2a_4)(a_3a_5)(a_6)(a_7).$$

布尔函数装置相当于8个顶点 $a_0,a_1,\cdots,a_7$ 在 $\bar{G}$ 群的作用下,求用两种颜色着色的着色方案数,其中 a_0 代表000,a_1 代表001,$\cdots$,a_7 代表111. 根据波利亚定理,不同的方案数为

$$m = \frac{1}{6}[2^8 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4] = 80.$$

4.5　母函数型的波利亚定理

母函数型的波利亚定理的关键在于将 $m^{c(a_i)}$ 项代以所有颜色的清单. 还是举具体的例子容易说明问题.

例 5　有 r,b,g 三种不同颜色的珠子,用来装配四个珠子的项链,如图 4-7 所示,问有多少种不同的方案?

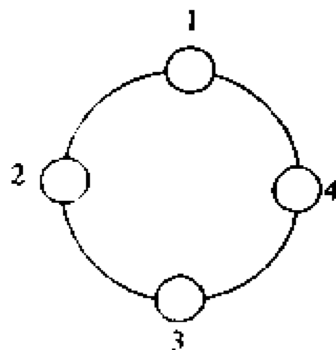


图 4-7

$\bar{G}$:(1)(2)(3)(4),(1 2 3 4),(1 3)(2 4),(4 3 2 1),(2 4),(1 3),(1 4)(2 3),(1 2)(3 4),

$$m = \frac{1}{8}[3^4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2].$$

对应于母函数有

$$P = \frac{1}{8}[(b+r+g)^4 + 2 \cdot (b^4 + r^4 + g^4) + 2(b+r+g)^2(b^2+r^2+g^2) + 3 \cdot (b^2+r^2+g^2)^2].$$

其中如对应于 $\bar{G}$ 的元素(1)(2)(3)(4),P 中有$(b+r+g)^4$项,对应于 $\bar{G}$ 的(1 2 3

4), P 中有 $b^4+r^4+g^4$ 项．对应于 $\overline{G}$ 的(2 4),实际上是(1)(2 4)(3), P 中有 $(b+r+g)^2(b^2+r^2+g^2)$,…… 目的在于对于 $\overline{G}$ 群元素 a_j 的每一个循环节里的对象着相同颜色,在 $\overline{G}$ 上元素作用下保持不变.即对于 $\overline{G}$ 的元素 $\overline{a}_j$,设其格式为

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n},$$

则 P 中对应地有

$$(b+r+g)^{c_1}(b^2+r^2+g^2)^{c_2}\cdots(b^n+r^n+g^n)^{c_n}$$

项．展开 P 得

$$P = b^4+r^4+g^4+b^3r+b^3g+br^3+gr^3+bg^3+rg^3+ \\ 2b^2r^2+2b^2g^2+2r^2g^2+2b^2rg+2br^2g+2brg^2,$$

其中 b^2rg 的系数为 2,即 2 个 b,1 个 r,1g 有两种格式,如图 4-8 所示．

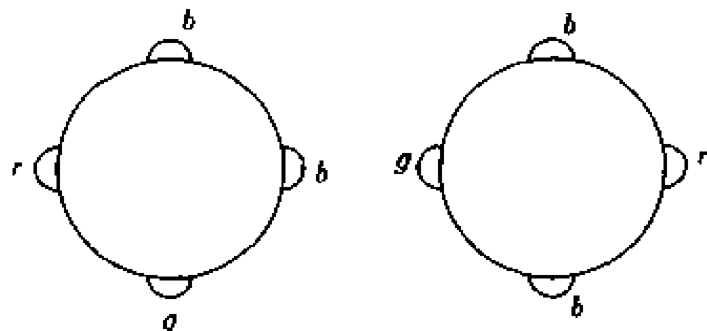


图 4-8

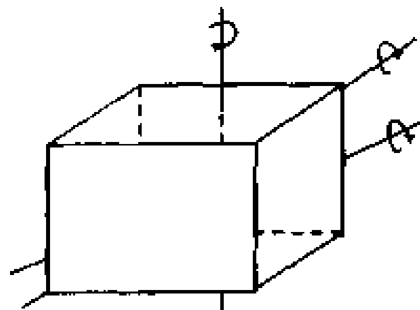


图 4-9

例 6　求骰子的方案数．

本问题相当于对正六面体(图 4-9)用 6 种颜色染色,要求各面染的色各异．

关于六个面的置换群 $\overline{G}$ 的格式有

1) $(1)^6$ 的 1 个;
2) $(1)^2(4)^1$ 的 6 个;
3) $(1)^2(2)^2$ 的 3 个;
4) $(3)^2$ 的 8 个;
5) $(2)^3$ 的 6 个．

$$P = \frac{1}{24}[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6 + \\ 6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+x_5^4+x_6^4) + \\ 3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^2 + \\ 8(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3)^2 + \\ 6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^3].$$

求 P 的展开式中 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 项系数,即 $\frac{1}{24}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6$ 中该项系数,

$$\frac{6!}{24} = 30.$$

5　区组设计

5.1　拉丁方

设有一块耕地，用作种三种作物 A、B、C，试验地若按图 5-1 所示划分，都可能由于自然条件的差异影响试验的准确性．若采用图 5-2 的格局较合理，因每行、每列都有 A、B、C 的试验地，机会较均等．

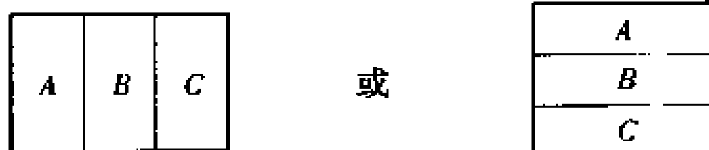


图 5-1

A	B	C
C	A	B
B	C	A

图 5-2

又如治某种病的 6 种药 $d_1,d_2,\cdots,d_6$，给 6 位病人 $m_1,m_2,\cdots,m_6$ 作试验．若采取第 1 天全体病人服 d_1，第 2 天全体病人服 d_2，…第 6 天全体病人服 d_6，这样的试验策略不很理想．有可能出现 d_6 效果显著，实际上是前面服药治疗的结果．最好构造一 6×6 的矩阵，使得每行每列都有 1,2,3,4,5,6. 第 i 行代表第 i 个病人；第 j 列表示服药的第 j 天，第 i 行第 j 列的数，设为 h，表示第 i 个病人第 j 天服 d_h 药．

由 $1,2,\cdots,n$ 构成的 $n\times n$ 方阵 $[a_{ij}]_{n\times n}$，每行每列 $1,2,\cdots,n$ 都各出现一次，称这样的方阵叫拉丁方．

5.2　正交拉丁方

从著名的 36 名军官问题谈起．分别由 6 个地区来的 6 种军阶的军官各一名，共 36 名．现将他们列成 6×6 的方阵，要求每行每列都有来自 6 个地区的军官，而且都有 6 种军阶中的每一种．每一名军官都有 (i,j) 两个数，i 表示他的军阶，j 表示他来自的地区．

如若只要求每行每列都有 6 种军阶，不问地区，则问题为求一 6×6 的拉丁方．如若要求每行每列都有来自 6 个地区的，不问军阶，则问题是求另一 6×6 的拉丁方．36 名军官问题是求数偶 (i,j) 构成的 6×6 方阵，其第 1 个数 i 构成一拉丁方，第 2 个数 j 构成另一拉丁方．而且 36 对数偶 (i,j) 都只出现一次．

定义 1　设 $\boldsymbol{A}_1=[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{A}_2=[a_{ij}^{(2)}]_{n\times n}$ 是两个 $n\times n$ 的拉丁方．如若方阵 $[(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)})]_{n\times n}$ 的 n^2 个数偶 $(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)})$ 互不相同，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是互相正交的拉丁方．例如

$$A_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix},$$

都是 3×3 的拉丁方,而且是正交的拉丁方,因

$$\begin{bmatrix}(1,1)&(2,3)&(3,2)\\(2,2)&(3,1)&(1,3)\\(3,3)&(1,2)&(2,1)\end{bmatrix}$$

中 9 对数偶全不相同.

正交的拉丁方的存在有其实际意义,比如有 3 种治感冒的药,3 种治咳嗽的药.通过 3 位病人作三天的试验.正交拉丁方便提供了实验的办法,使得每位病人对各种药都服过.可以检验如何配伍最佳.

定理 1 互相正交的 n 阶拉丁方不超过 $n-1$ 个.

证从略.

当 $n=p^\alpha$ 时,其中 p 是一个素数,α 是正整数,$n\geqslant3$,下面提供一种构造 $n-1$ 个正交拉丁方的办法.

设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是 $GF(p^\alpha)$ 的元素,其中 $\alpha_0=0,\alpha_{n-1}=1$.构造 $n\times n$ 的矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 如下:令

$$A_k=[a_{ij}^{(k)}]_{n\times n},\quad i,j=0,1,2,\cdots,n-1,$$
$$a_{ij}^{(k)}=\alpha_k\alpha_i+\alpha_j,\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

其中"+"和"·"运算都在 $GF(p^\alpha)$ 上进行.

可以证明 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 是拉丁方.如若不然,如果 A_k 的第 i 行有两个元素相等,设

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ih}^{(k)},$$

那么

$$\alpha_k\alpha_i+\alpha_j=\alpha_k\alpha_i+\alpha_h,$$
$$\alpha_j=\alpha_h,$$
$$j=h.$$

类似可证 A_k 的第 j 列没有相同元素.

最后证 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 两两正交.如若 A_g 和 A_h 不正交,则存在

$$(a_{ij}^{(g)},a_{ij}^{(h)})=(a_{fk}^{(g)},a_{fk}^{(h)}),$$
$$\alpha_g\alpha_i+\alpha_j=\alpha_g\alpha_f+\alpha_k,$$
$$\alpha_h\alpha_i+\alpha_j=\alpha_h\alpha_f+\alpha_k,$$
$$(\alpha_g-\alpha_h)\alpha_i=(\alpha_g-\alpha_h)\alpha_f.$$

由于 $\alpha_g\neq\alpha_h$,所以 $\alpha_i=\alpha_f,i=f$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是一组 n_1 阶正交拉丁方,$B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是另一组的正交拉丁方.构造

$$C_r = \begin{bmatrix} (a_{11}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & (a_{12}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & \cdots & (a_{1n_1}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) \\ (a_{21}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & (a_{22}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & \cdots & (a_{2n_1}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n_11}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & (a_{n_12}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) & \cdots & (a_{n_1n_1}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r) \end{bmatrix},$$

$$r = 1,2,\cdots,k,$$

其中$(a_{ij}^{(r)}, \boldsymbol{B}_r)$是$n_2 \times n_2$的矩阵,其$k$行$l$列元素为$(a_{ij}^{(r)}, b_{kl}^{(r)}), k, l = 1,2,\cdots,n_2$.

可以证明由此产生的$C_1, C_2, \cdots, C_k$是$n_1n_2 \times n_1n_2$阶的正交拉丁方.

5.3 均衡不完全的区组设计

令$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$, X的**均衡不完全的区组设计**,指的是由X的子集构成的集合:$\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$,每个$B_i$含有$X$的$k$个元素,$i = 1,2,\cdots,b$,并满足

1° X的每一元素在b组中正好出现r次;

2° 任意一对元素在b组中正好同时出现λ次;

3° $k < v$.

均衡不完全的区组设计以后简记为BIBD,它是Balanced Incomplete Block Design的缩写.

例1 $X = \{x_i \mid i = 1,2,\cdots,9\}, b = 12, k = 3, r = 4, \lambda = 1, v = 9.$

$B_1: x_1, x_2, x_3$; $B_2: x_4, x_5, x_6$; $B_3: x_7, x_8, x_9$;

$B_4: x_1, x_4, x_7$; $B_5: x_2, x_5, x_8$; $B_6: x_3, x_6, x_9$;

$B_7: x_1, x_5, x_9$; $B_8: x_2, x_6, x_7$; $B_9: x_3, x_4, x_8$;

$B_{10}: x_1, x_6, x_8$; $B_{11}: x_2, x_4, x_9$; $B_{12}: x_3, x_5, x_7$.

X的元素v个,从v个中取k个应该有$\binom{v}{k}$组,BIBD只有b组,所以说是不完全.

b、v、r、k、λ是一个BIBD的5个参数.简记为(b, v, r, k, λ)-设计.

定理2 $bk = vr, r(k-1) = \lambda(v-1)$.

每组k个元素,共b组,bk是元素出现的总数,X有v个元素,每个元素出现r次,故

$$bk = vr.$$

X的元素设为x_1,出现于r组中,$r(k-1)$是x_1以外的元素出现的次数,每对元素同时出现λ次.故$r(k-1) = \lambda(v-1)$.

$b = v$时称这BIBD为对称的.由于$bk = vr$,故$k = r$.例如

$B_1: x_1, x_2, x_3$; $B_2: x_2, x_3, x_5$; $B_3: x_3, x_4, x_6$;

$B_4: x_4, x_5, x_7$; $B_5: x_5, x_6, x_1$; $B_6: x_6, x_7, x_2$;

$B_7: x_7, x_1, x_3$.

其中$b = v = 7, r = k = 3, \lambda = 1$.

关于BIBD的设计超出本篇的范围.

参 考 文 献

1 Liu C L. Introduction to combinatorial mathematics. New York: McGraw-Hill, 1968.

2 Williamson S G. Combinatorics for computer science. New York: Computer Science Press, 1985.

3 卢开澄. 组合数学. 第2版. 北京:清华大学出版社, 1991.

·近代数学卷·

第3篇

图　　论

编　者　刘振宏
审校者　卢开澄

目　　录

引　言

图论已有200多年的历史，但过去很长一段时间发展很慢，直到20世纪50年代末期，由于电子计算机的出现和广泛使用，才得到突飞猛进的发展．近40年来图论发展的客观事实表明，它已成为当今数学科学中一门引人瞩目的新兴学科．

图论与数学的其它分支不同，它不像群论、拓扑学等其它学科那样有一套较完整的理论体系和解决问题的系统方法．图论所涉及的问题比较广泛，而解决问题的方法也是多种多样的，常常是一种问题一种解法，而这些方法之间又毫无联系．

图论是研究离散对象之间的关系，而这种关系又是直观的和形象的，从而实际中许多问题自然地可用图来表示，并用图的方法来解决．图论已渗透到组合学、矩阵论、群论、运筹论、计算机科学、管理科学、分子化学、系统工程等领域，而且它是计算机科学、运筹学、管理科学和系统工程中的不可缺少的内容．

图论内容之丰富和应用之广泛，本篇很难全面概括，只能叙述其中某些重要专题的某些重要成果．

1　图的基本概念

1.1　图的定义

一个图是由有限或可列个点的集合及点与点之间的连线的集合组成，通常记为 $G=(V,L)$，其中 V 表示点集，L 表示线集．当 V 和 L 都是有限集时，则称 G 为**有限图**，否则称为**无限图**．当 $L=\varnothing$（空集）时，则称 G 为**空图**．如果 L 中每一条线都是有向的，则称 G 为**有向图**，记为 $\vec{G}=(V,A)$，其中 A 为有向线集合．有向线也称为**弧**，从而 A 称为**弧集**．若 L 中每一条线都是无向的，则称 $G=(V,L)$ 为**无向图**，此时记 $G=(V,E)$．无向线称为**边**，因此 E 是**边集**．

设 e 是连接点 i 和点 j 的线，那么 e 可以用它的两个端点 i 和 j 表示：当 e 是无向线时，则记 $e=[i,j]$ 或 $[j,i]$；当 e 是有向线且方向是 i 到 j，则记弧 $e=(i,j)$．显然，$(i,j)\neq(j,i)$．若 e 的两个端点重合，即 $i=j$，则 e 称为**环**．若图 G 中自点 i 到点 j 的弧（边）不止一条时，则自 i 到 j 的第 k 条弧（边）记为 $(i,j)_k$（$[i,j]_k$）．此时 G 称为**多重图**．无环的非多重图称为**简单图**．

一个无向图 $G=(V,E)$，如果 G 中任何两个点之间恰有一条边，则称 G 为**完全图**，通常把 n 个点的完全图记为 K_n．一个无向图 $G=(V,E)$，如果它的点集 V 能划分为两部分 X 和 Y，使 $X\cap Y=\varnothing$，$X\cup Y=V$，并且 E 中每一条边的两个端点分别在 X 和 Y 里，则称 G 为**二分图**，记 $G=(X,Y;E)$．若 $G=(X,Y;E)$ 是二部图，并

且 X 中每一个点与 Y 中每一个点都有边相连,则称 G 为**完全二部图**,并记为 $K_{m,n}$. 其中 $m=|X|$, $n=|Y|$ 分别表示 X 和 Y 中的点数.

注意,图中的点(point)也称为顶点(vertex)或节点(node).

1.2 图的一些概念

1.2.1 图的点次

设 $G=(V,L)$ 为一个图, x 为 G 的一个点, x 的次定义为它作为 G 中线的端点的次数,用 $d_G(x)$ 表示; x 的入次定义为它作为 G 中弧的终点的次数,记为 $d_G^-(x)$; x 的出次定义为它作为 G 中弧的始点的次数,用 $d_G^+(x)$ 表示. 次为 0 的点称为**孤立点**;次为奇(偶)数的点,称为**奇(偶)点**.

一个图 $G=(V,L)$ 的**最大次和最小次**分别用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示,即 $\Delta(G)=\max_{x\in V} d_G(x)$, $\delta(G)=\min_{x\in V} d_G(x)$.

一个无向图 $G=(V,E)$,如果它没有奇点,则称它为**欧拉图**,如果 $\Delta(G)=\delta(G)=k$,则称它为 k **正则的**. 类似地,一个有向图 $\vec{G}=(V,A)$,如果对每一个点 $x\in V$,有 $d_G^+(x)=d_G^-(x)$,则称 $\vec{G}$ 是欧拉的. 图的点次具有下述性质:

1° 对任一个图 $G=(V,L)$,则 $\sum_{x\in V} d_G(x)=2|L|$;

2° 任一个图的奇点个数必为偶数;

3° 设 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$ 为非负整数序列,并且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数,则存在 n 个点的简单图 G,使得 G 的第 i 个点的次恰为 d_i, $i=1,2,\cdots,n$,当且仅当对一切 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{j=k+1}^{n}\min\{k,d_j\}.$$

4° 对每一个点数大于 1 的无向简单图 G, G 中至少有两个点其次相等.

1.2.2 相邻与无关

设 $G=(V,L)$ 为一个图, G 中两个点 i 和 j 是称为**相邻的**,如果 G 中有一条线 e 连接 i 和 j. 当连接点 i 和 j 是 G 的一条弧 (i,j),则称 i 为 j 的**内邻点**,而 j 为 i 的**外邻点**,或者 i 为该弧的始点,而 j 为其终点. 若点 i 是线 e 的一个端点,则称 i 和 e **相关联**;若两条线 e_1 和 e_2 有一个公共端点,则称 e_1 和 e_2 相邻. 设 S 是点集 V 的一个子集,若 S 中任何两个点在 G 中不相邻,则称 S 为 G 的一个**点无关集或独立集**;设 $M\subseteq L$,若 M 中任何两条线不相邻,则称 M 是 G 的一个**边无关集或匹配**.

1.2.3 链与路

设 $C=(v_0,e_1,v_1,e_2,\cdots,e_k,v_k)$ 是图 $G=(V,L)$ 的点和线的交错序列,若对一

切 $i=0,1,\cdots,k-1$, v_i 和 v_{i+1} 是线 e_{i+1} 的两个端点,则称 C 为**一条链**.进而,若每一条线是有向的,并且对一切 $i=1,2,\cdots,k$, e_i 的起点为 v_{i-1},而终点为 v_i,则 C 称为**路**.链 C 的长度定义为它包含线的数目.有时也用线的序列来表示链,如 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$,其中对一切 $i=1,2,\cdots,k-1$, e_i 和 e_{i+1} 有一个公共端点.如果一条链(路)中所有线均不相同,则称它为**简单链**;如果一条链(路)中所有点均不相同,则称为**初等链**.

若一条链的起点和终点重合,则称它为**闭链或圈**.一条路的起点和终点重合则称它为**闭路或回路**.若圈(回路)上的点均不同,则称它为**初等的**.

下面提到的链、路、圈和回路,除特别说明外,均指初等的.

1.2.4 子图

设 $G=(V,L)$ 为一个图,若 $L'\subseteq L$,则称图 $G_1=(V,L')$ 为 G 的**生成(支撑)子图**,即它是由 G 中去掉一些线后的图.若设 V' 表示 L' 中所有线的端点的集合,则称图 $G_2=(V',L')$ 为线集 L' 在 G 中的**线导出子图**;又若 $V''\subseteq V$, L'' 为 G 中两个端点均在 V'' 中的所有线之集合,则称 $G_3=(V'',L'')$ 为点集 V'' 在 G 中的**点导出子图**,即它是从 G 中去掉所有的 $V-V''$ 里的点及其关联的线.通常记 $G_3=G[V'']$ 或 $G-(V-V'')$.

1.2.5 图的同构

由图的定义可见,这儿所说的图与几何中的图不同.它与点的相对位置和线的曲直长短无关.因此一个图有各种画法.如果两个图 $G_1=(V_1,L_1)$ 和 $G_2=(V_2,L_2)$ 是同一个图的两种不同的画法,则称 G_1 和 G_2 **同构**,记为 $G_1\sim G_2$.严格地说, G_1 和 G_2 同构意味着,存在一一对应的映射 $\varphi:V_1\to V_2$,使得对 G_1 中的任意边(弧) $[x,y]$ $((x,y))\in L_1$,当且仅当 $[\varphi(x),\varphi(y)]((\varphi(x),\varphi(y)))\in L_2$.有时两个图看起来差别很大,但它们是同构的;有时两个图看起来非常相似,但却不同构.

一个图如果能画在平面上,使其任何两条线,除端点外是不相交的,则称它为**可平面图**.画在平面上的图,如果它的任意两条线除端点外是不相交的,则称它为**平面图**.

2 图的连通性

2.1 某些基本定义

设 $G=(V,L)$ 是一个图,若 G 中任何两点之间至少有一条链,则称 G 为**连通图**.不含圈的图称为**森林**;不含圈的连通图称为**树**;若图 G 不连通,则 G 可分解为若干个子图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$,使对每一个 $i=1,2,\cdots,k$, G_i 连通,并且任意 $i\neq j$, $1\leqslant i,j\leqslant k$, G_i 和 G_j 之间在 G 中没有链连接它们,称 G_i 为 G 的一个**连通分枝或分图**, G

的分图个数为k,且用$c(G)$表示之.

设v是G的一个点,e是G的一条边(弧),若$G-v$的分枝数$c(G-v)>c(G)$,则称v是G的**割点**;若$G-e$的分枝数$c(G-e)>c(G)$,则称e是G的**割边(弧)**.

设$\vec{G}=(V,A)$是有向图,若$\vec{G}$中任何两个点u和v,存在自u到v的路,也存在自v到u的路,则称$\vec{G}$是**强连通的**.

设$G=(V,E)$是一个连通的无向图,整数$k\geq1$,若从G中去掉任何小于等于$k-1$个点及其关联边后,其剩余图仍连通,则称G是**k连通的**.显然,若G是k连通,那么对任何正整数$l\leq k$,则G也是l连通的.

若G是k连通,但对任何点v,$G-v$不是k连通,则称G是**临界k连通**.

若G是k连通,但对G中任何边e,$G-e$不是k连通,则称G是**极小k连通**.

若G是k连通的,但不是$(k+1)$连通的,则k称为G的**连通度**,通常用$K(G)$表示G的连通度.当$G=K_n$时,定义$K(G)=n-1$;若G不连通,则定义$K(G)=0$.

类似地,设λ为正整数,若从G去掉任意小于等于$\lambda-1$条边后,剩余图仍连通,则称G为**λ边连通的**;一个图$G=(V,E)$的**边连通度**,定义为这样一个非负整数$\lambda(G)$,使得G是$\lambda(G)$边连通的,但不是$\lambda(G)+1$边连通的.当G不连通,则定义$\lambda(G)=0$.另外还规定一个孤立点的图K_1,$\lambda(K_1)=0$.

若$G=(V,E)$是λ边连通的,但对任何边e,$G-e$不是λ边连通的,则称G是**极小λ边连通**.

设$G=(V,E)$是连通图且不是完全图,那么存在子集$S\subset V$,使$G-S$不连通,并称S为G的**分离集**;在G的所有分离集中,包含点数最少的分离集,称为G的**最小分离集**.易见,G的最小分离集的点数等于$K(G)$.

类似地,每一个连通图$G=(V,E)$,存在子集$F\subseteq E$,使图$G-F$不连通,并称F为G的**边割集**;含边数最少的边割集称为G的**最小边割集**.易见,G的最小边割集的边数等于$\lambda(G)$.

2.2　关于$K(G)$和$\lambda(G)$的某些性质

由$K(G)$和$\lambda(G)$的定义可得,对任意$G=(V,E)$和任一点$v\in V$及边$e\in E$,有

(1) $K(G)-1\leq K(G-v)$;

(2) $\lambda(G)-1\leq\lambda(G-e)\leq\lambda(G)$;

(3) $K(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$;

(4) 给定非负整数n、δ、k和λ,存在n个点的图G,使得$\delta(G)=\delta$,$K(G)=k$和$\lambda(G)=\lambda$,当且仅当下述条件之一成立:

1) $0<k\leq\lambda\leq\delta<\lceil n/2\rceil$;

2) $1\leq2\delta+2-n\leq k\leq\lambda=\delta<n-1$;

3) $k=\lambda=\delta=n-1$.

(5) 设 $G=(V,E)$是简单图,则 $\lambda(G)=\delta(G)$成立,若下述条件之一满足:

1) $\delta(G)\geq\lceil n/2\rceil$,其中 $n=|V|$;

2) G 中每一对不相邻的点 u 和 v,满足 $d_G(u)+d_G(v)\geq n-1$;

3) G 中任何两个点之间存在长度不超过 3 的链.

(6) 若简单图 $G=(V,E)$不是完全图,则

$$K(G)\geq 2\delta(G)-n+2.$$

(7) 设 n 和 m 是两个正整数且满足 $0\leq n-1\leq m\leq\binom{n}{2}$.则存在 n 个点 m 条边的简单图G,并且使得 $K(G)=\lambda(G)=\lceil 2m/n\rceil$;进而,对任何 n 个点 m 条边的简单图 G',均有 $K(G')\leq\lceil 2m/n\rceil$及 $\lambda(G')\leq\lceil 2m/n\rceil$.

2.3 2(边)连通图的某些性质

1. 2 边连通图的某些性质

设 $G=(V,E)$是简单连通图,则下述结论等价:

(1) G 是 2 边连通.

(2) G 中任何两个点在某个初等圈上.

(3) G 中任何一个点和任一边在某个初等圈上;

(4) G 中任何两条边在 G 的某个初等圈上.

(5) G 没有割点.

(6) G 中任何 3 个点在 G 的某条初等链上.

(7) G 中任意两点 u、v 及任一边 e,总存在连结 u 和 v 的初等链包含 e.

(8) G 中任意 3 点,必存在初等链包含其中两个点且不含第三个点.

2. 2 边连通图的某些性质

设 G 是连通图且点数不小于 3,则下述结论等价:

(1) G 是 2 边连通.

(2) G 没有割边.

(3) G 的每一条边在某一个初等圈上.

(4) G 的任何两条边在 G 的某个简单圈上.

(5) G 的任一点和任一边在 G 的某个简单圈上.

(6) G 的任意两点在 G 的某个简单圈上.

2.4 k(边)连通图的某些结果

(1) G 是 k 连通,当且仅当对任意两点 u 和 v,G 中存在 k 条彼此不交(除 u 和 v 外)的连结 u 和 v 的链(门格定理).

(2) G 是 k 连通,当且仅当对任意 k 点集合 $X\subset V$ 及 $u\in V-X$,G 中存在自 u 到 X 的 k 条(除 u 外)点的不交链.

(3) 若 G 是 k 连通,则 G 的任何 k 个点在 G 的某个初等圈上.

(4) 若 G 是 k 连通，则 G 的任何 $k-2$ 个点及任何两条边，G 中有一个初等圈包含它们.

(5) 设 $G=(V,E)$ 是一个简单图，记 $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且满足 $d_G(x_1)\leqslant d_G(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d_G(x_n)$. 如果对某一个整数 $k<n$，及一切的 $h=1,2,\cdots,n-d_G(x_{n-k+1})-1$ 有

$$d_G(x_h)\geqslant k+h-1,$$

则 G 是 k 连通的.

(6) 设 $G=(V,E)$ 是 n 个点的简单图，若对某个正整数 $k<n$，使对一切 $v\in V$ 有

$$d_G(v)\geqslant\frac{(n+k)}{2}-1,$$

则 G 是 k 连通的.

对于边连通图也有类似的一些结果：

(7) 一个图 $G=(V,E)$ 是 k-边连通的，当且仅当对 G 中任意两个点 u 和 v，G 中存在 k 条两两边不重的链连结 u 和 v.

设 $G=(V,E)$ 是连通图，a 和 b 是 G 中两个点，$X\subset V$ 且 $a\in X$，$b\in\overline{X}=V-X$. 用 $[X,\overline{X}]$ 表示连结 X 中点和 $\overline{X}$ 中点的所有边集合，那么从 G 中去掉所有 $[X,\overline{X}]$ 中的边后，其剩余图中不存在连结 a 和 b 的链，称 $[X,\overline{X}]$ 为分离 a 和 b 的**割集**，或 **a-b 割集**. 在所有 a-b 割集中，边数最小的那个 a-b 割集，称为 **a-b 最小割集**. a-b 最小割集中的边数用 $c_G(a,b)$ 表示.

(8) 一个图 $G=(V,E)$ 是 k 边连通的，当且仅当对任意 a、$b\in V$，$c_G(a,b)\geqslant k$.

一个有向图 $\vec{G}=(V,A)$，如果从 $\vec{G}$ 中去掉任意小于等于 $k-1$ 条弧，它仍是强连通的. 则称 $\vec{G}$ 是 **k 弧强连通的**. 若 $\vec{G}$ 是 k 弧强连通，但不是 $(k+1)$ 弧强连通，则 k 称为 $\vec{G}$ 的**弧强连通度**.

设 $\vec{G}=(V,A)$ 为有向图，$X\subset V$ 且 $\varnothing\neq X\neq V$，定义 $(X,\overline{X})$ 为起点在 X 中且终点在 $\overline{X}$ 中的所有弧的集合，称它为 $\vec{G}$ 的**有向割**或简称为**割**. 含弧数最小的割称为 $\vec{G}$ 的**最小有向割**. $\vec{G}$ 的最小割的弧数必等于 $\vec{G}$ 的弧强连通度.

(9) 有向图 $\vec{G}=(V,A)$ 是 k 弧强连通的，当且仅当对 $\vec{G}$ 中每一对点 u 和 v，$\vec{G}$ 中存在自 u 到 v 的 k 条弧不重的路，同时也存在自 v 到 u 的 k 条弧不重的路.

一个有向图 $\vec{G}=(V,A)$，如果忽略其弧的方向，则它就成为一个无向图，记它为 $B\vec{G}$，称 $B\vec{G}$ 为 $\vec{G}$ 的**基图**，而 $\vec{G}$ 为 $B\vec{G}$ 的一个**定向**. 显然，$B\vec{G}$ 可能是许许多多个有向图的基图，或者说一个无向图有许许多多个不同的定向.

(10) 有向图 $\vec{G}=(V,A)$ 是 k 弧强连通的，当且仅当它的基图 $B\vec{G}$ 是 $2k$ 边连通的.

2.5 连通度为 k 的极小图的性质

设 $G=(V,E)$是无向图,$S\subset V$,u、$v\in V-S$.若 $G-S$ 中不含有连结 u 和 v 的链,则称 S 为 **u-v 分离集**,具有点数最少的 u-v 分离集称为 u-v **最小分离集**;u-v 最小分离集中的点数用 $K(u,v)$表示之.当 u 和 v 相邻时,$K(u,v)$定义为 $G-[u,v]$ 中分离 u 和 v 的最小分离集的点数加 1.

(1) $G=(V,E)$是 k 连通,当且仅当对任意的 u、$v\in V$ 有 $K(u,v)\geqslant k$;进而,k 连通图 $G=(V,E)$是极小的,当且仅当对每一边 $e=[u,v]\in E$,有 $K(u,v)=k$.

(2) 每一个极小 k 连通图 $G=(V,E)$,必定有 $\delta(G)=k$.

(3) 设 $G=(V,E)$是极小 k 连通图,T 是 G 的所有最小次点的集合,则 $G-T$ 是森林(不含圈),并且有 $|T|\geqslant((k-1)n+2)/(2k-1)$.其中 $n=|V|$.

(4) 若 $G=(V,E)$是极小 k 连通图,则必有

$$|E|\leqslant\begin{cases}\lceil\frac{1}{8}(n+k)^2\rceil, & \text{若 } k+1\leqslant n\leqslant 3k-2,\\ k(n+k), & \text{若 } n\geqslant 3k-1.\end{cases}$$

3 树与有向树

3.1 树与有向树的定义及其性质

连通无圈的图称为树.一个有向图,如果它的基图是树,并且每一点的入次最多为 1,则这个有向图称为**有向树**或**树形图**.树和有向树是最简单的图类,它在图论中起着重要作用.

设 $G=(V,E)$是 n 个点 m 条边的连通图,则树有如下的等价定义:

(1) G 是一棵树.

(2) G 不含圈且 $m=n-1$.

(3) G 连通且 $m=n-1$.

(4) G 无圈,但在 G 上添加任一边后就有唯一的一个圈;

(5) G 是极小连通图,即 G 连通,但去掉任何一条边后就不连通了;

(6) G 中每一对点之间有唯一的一条链.

类似地设 $\vec{G}=(V,A)$是 n 个点 m 条弧的有向图,则树形图有如下的等价定义:

(1) $\vec{G}$是树形图.

(2) $\vec{G}$的基图连通,恰有一点入次为 0 而其余每一点入次恰为 1.

(3) $\vec{G}$中存在唯一一点,记为 r,自 r 到其余每一点有唯一一条路.

(4) $\vec{G}$的基图连通，$m=n-1$并且$\vec{G}$中恰有一点入次为0.

一棵树形图中入次为0的点称为**根**，出次为0的点称为**叶子或树端**.

3.2 支撑树和树形图

设T是G的一个支撑子图，若T是树，则称T是G的**支撑树**. 显然G有支撑树，当且仅当G连通.

设T是有向图$\vec{G}=(V,A)$的支撑子图，若T是有向树，则称T是$\vec{G}$的**支撑树形图**. G的两棵支撑树(树形图)是不同的，如果它们的边(弧)不完全相同.

(1) K_n有n^{n-2}个不同支撑树. 设$d_1,d_2,\cdots,d_n$是n个正整数，若K_n有一个支撑树T，T中第i个点的次为d_i，$i=1,2,\cdots,n$，则称$d=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$为**树的次序列**.

(2) 正整数序列$d=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$是树的次序列，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1).$$

容易看出，K_n的两棵不同的支撑树可能有相同的次序列.

(3) 设$d=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$是树的次序列，则K_n中次序列为d的支撑树的个数为

$$\binom{n-2}{r_1,r_2,\cdots,r_n},$$

其中$r_i=d_i-1$，$i=1,2,\cdots,n$.

(4) 简单无向图$G=(V,E)$有k个两两边不重的支撑树，当且仅当对任意$S\subseteq E$有

$$k(C(G-S)-1)\leqslant|S|.$$

(5) 设$\vec{G}=(V,A)$是一个无环的有向图，记$V=\{1,2,\cdots,n\}$. 定义$n\times n$的矩阵$\boldsymbol{B}(\vec{G})=[b_{ij}]$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}d_i^-, & \text{若 } i=j,\\ i\text{ 到 }j\text{ 的弧数}, & \text{若 } i\neq j,\end{cases}$$

其中d_i^-表示点i的入次. 用$\boldsymbol{\Delta}_i$表示从$\boldsymbol{B}(\vec{G})$中去掉第i行和第i列后的矩阵，则$\vec{G}=(V,A)$中以i为根的树形图的个数为$|\boldsymbol{\Delta}_i|$.

如果把上式中的d_i^-视为无向图中点i的次，把i到j的弧数视为无向图中点i和点j之间的边数，则有

(6) 设$G=(V,E)$是无向简单图，记$V=\{1,2,\cdots,n\}$，定义一个$n\times n$矩阵$\boldsymbol{\Delta}=[a_{ij}]$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}d_i, & \text{若 } i=j,\\ -1, & \text{若}[i,j]\in E,\\ 0, & \text{若}[i,j]\notin E,\end{cases}$$

其中 d_i 为点 i 的次. 用 Δ_i 记 Δ 中去掉第 i 行第 i 列后的矩阵. 那么 $|\Delta_i|$ 等于 G 的支撑树的个数.

(7) 设 $\vec{G}=(V,A)$ 为有向图, $x_0\in V$, 则 $\vec{G}$ 有以 x_0 为根的 k 个两两弧不重的树形图, 当且仅当对 V 的任一划分 $(X,\overline{X})$, $x_0\in X$, 有 $|(X,\overline{X})|\geq k$, 其中 $|(X,\overline{X})|$ 表示起点在 X 里终点在 $\overline{X}$ 里的弧之个数.

由这个结果可以推出

(8) 设 $\vec{G}=(V,A)$ 为有向图, 对每一点 $x\in V$ 有一个非负整数 $f(x)$, 记 $\sum_{x\in V}f(x)=k$, 则 $\vec{G}$ 有 k 个弧不重的树形图, 使得以 x 为根的恰有 $f(x)$ 个, 当且仅当对任意 $X\subseteq V$, 有 $|(X,\overline{X})|\geq f(X)$, 其中

$$f(X)=\sum_{x\in X}f(x).$$

(9) 设 $G=(V,E)$ 为简单无向图, $P=\{E_1,\cdots,E_m\}$ 为边集 E 的一个划分, 对每一个 E_i 有一个非负整数 a_i, 则 G 有支撑树 T 使 $|T\cap E_i|=a_i$, $i=1,2,\cdots,m$, 当且仅当对任意 $J\subseteq\{1,2,\cdots,m\}=M$, 有

$$C(\bigcup_{i\in\overline{J}}E_i)-1\leq\sum_{i\in J}a_i\leq r(\bigcup_{i\in J}E_i),$$

其中 $C(\bigcup_{i\in\overline{J}}E_i)$ 表示 G 的支撑图 $(V,\bigcup_{i\in\overline{J}}E_i)$ 的分枝个数. $\overline{J}=M-J$; $r(\bigcup_{i\in J}E_i)=G_1(V,\bigcup_{i\in J}E_i)$ 的最大森林中的边数.

3.3 基本圈与基本割

设 T 是有向图 $\vec{G}=(V,A)$ 的支撑树, T 中的弧称为枝, 而 $\vec{G}$ 中不在 T 里的弧称为**联枝**; 由 $\vec{G}$ 的所有联枝组成的 $\vec{G}$ 的支撑子图称为 T 的补树, 并用 T^* 表示之. 记 $A=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$, $T^*=\{e_1,e_2,\cdots,e_{m-n+1}\}$, $T=\{e_{m-n+2},\cdots,e_m\}$, 其中 $n=|V|$. 由树的定义知, 对任意 $e_i\in T^*$, $T\cup\{e_i\}$ 包含唯一一个圈, 记它为 $C(e_i)$, 并称它为关于 T 的**基本圈**. 因此就有 $m-n+1$ 个基本圈. 对任意 $e_j\in T$, $T-\{e_j\}$ 恰有两个分枝, 记包含 e_j 的起点的分枝的点集为 S_j, 记 $\omega(e_j)=[S_j,\overline{S}_j]$ 为 G 中一个端点在 S_j 里另一端点在 $\overline{S}_j$ 里的所有弧的集合, 并称它为关于 T 的**基本割**. 因此关于 T 的基本割有 $n-1$ 个.

设 c 是 $\vec{G}$ 的一个圈, 任给 c 一个方向, 则 c 可以用一个 m-维的向量 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)^{\mathrm{T}}$ 表示, 其中 α_i 定义为

$$\alpha_i=\begin{cases}0, & \text{若 } e_i \text{ 不在 } c \text{ 上},\\ 1, & \text{若 } e_i \text{ 在 } c \text{ 上且与 } c \text{ 的方向一致},\\ -1, & \text{若 } e_i \text{ 在 } c \text{ 上且与 } c \text{ 的方向相反}.\end{cases}$$

不妨记 $c=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)^T$,并称它为圈向量.

同样,若 ω 是 $\vec{G}$的一个割,任给 ω 一个方向,则 ω 也可用一个 m-维向量$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^T$表示.

$$\beta_i=\begin{cases}0, & \text{若 } e_i \text{ 不在 } \omega \text{ 上},\\ 1, & \text{若 } e_i \text{ 在 } \omega \text{ 上且方向与 } \omega \text{ 一致},\\ -1, & \text{若 } e_i \text{ 在 } \omega \text{ 上且其方向与 } \omega \text{ 相反}.\end{cases}$$

同样记 $\omega=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^T$,称它为割向量.

(1) $c^T\omega=0$.

$\vec{G}$的所有圈向量生成的空间称为圈空间;$\vec{G}$的所有割向量生成的空间称为割空间.

(2) 设 T 是 $\vec{G}$的支撑树,那么关于 T 的 $m-n+1$ 个基本圈向量构成圈空间的一组基;而关于 T 的 $n-1$ 个基本割向量构成割空间的一组基.

(3) $\vec{G}$的圈空间和割空间是两个正交互补的子空间.

T 和 T^* 如上定义,基本圈 $c(e_i)$的方向指定为 e_i 的方向;基本割 $\omega(e_j)$的方向指定为 e_j 的方向.那么基本圈向量和基本割向量构成的圈矩阵和割矩阵分别为下述形式:

$$C=[c(e_{m-n+2})\ c(e_{m-n+3})\ \cdots\ c(e_m)]^T=\left[\begin{array}{ccc:cccc} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0\\ * & \cdots & * & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right]$$

$$=[C_T,I_{m-n+1}].$$

$$Q=[\omega(e_1)\ \omega(e_2)\ \cdots\ \omega(e_{n-1})]^T=\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & *\end{array}\right]$$

$$=[I_{n-1}\ Q_{T^*}].$$

从而由(1)知 $CQ^T=0$

(4) (在电网络分析中应用)设 X_T 和 Y_T 分别表示 T 边上的电流和电压向量;X_{T^*} 和 Y_{T^*} 分别表示 T^* 边上的电流和电压向量.记 $X=\begin{bmatrix}X_T\\X_{T^*}\end{bmatrix}$,$Y=\begin{bmatrix}Y_T\\Y_{T^*}\end{bmatrix}$,则由克希霍夫(Kirchhoff)第一和第二定律得

$$\begin{cases}QX=0,\\ CY=0.\end{cases}\tag{3-1}$$

由 Q 和 C 的形式,(3-1)式可写为

$$\begin{cases}X_T+Q_{T^*}X_{T^*}=0,\\ C_TY_T+Y_{T^*}=0.\end{cases}\tag{3-2}$$

因为 $CQ^{T}=0$,由此得 $Q_{T^*}=-C_T^{T}$,从而由(3-2)式的第一式得 $X_T=C_T^{T}X_{T^*}$,这儿 C_T^{T} 为 C_T 的转置.于是有

$$X=DX_{T}^{*},\tag{3-3}$$

其中

$$D=\begin{bmatrix} C_T^{T} \\ I_{m-n+1} \end{bmatrix}.$$

(3-2)式有 m 个方程 $2m$ 个变量.要求出 X 和 Y 必须知道电流与电压的关系.设

$$Y=MX+Z,\tag{3-4}$$

其中 M 是 $m\times m$ 矩阵,其元素可以是纯量或微分算子或积分算子,Z 为弧集上的电动势向量.

将(3-3)式代入(3-4)式得

$$Y=MDX_{T^*}+Z,\tag{3-5}$$

(3-2)式和(3-5)式联立可求出

$$X=-D(CMD)^{-1}CZ,$$
$$Y=(I_m-MD(CMD)^{-1}C)Z.$$

4 欧 拉 图

欧拉(L.Euler)在1736年发表了一篇文章,题目是一个有关几何位置问题的解(solutio problematis ad geometriam situs pertnentis).这也是今天的图论的第一篇文章.欧拉在这篇文章中解决了有名的哥尼斯堡七桥问题.据说哥尼斯堡城被普莱格尔河分为4块(见图4-1):河的两岸 A 和 B 及河中两个小岛 C 和 D.这4部分是由七座桥联起来的:A 和 C,B 和 C 间各有两座桥;A 和 D,B 和 D 间各有一座桥;C 和 D 间有一座桥.问是否存在这样一条行走路线,使从某一块出发经过每一座桥一次且仅一次,然后回到出发点?

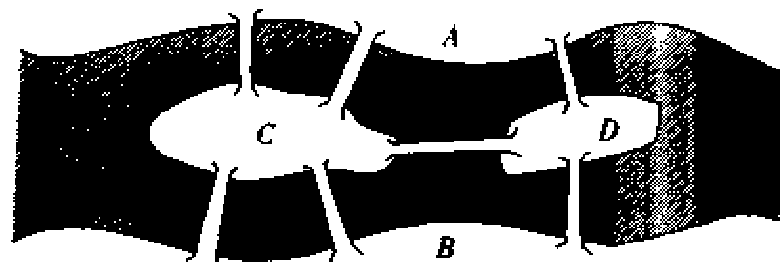


图4-1

欧拉解决这个问题的方法是,将每一块用一个点表示,把连结两块的桥用一条边表示,这样就得到图4-2.因此原问题可重叙为:是否存在从某一点出发,经过图中每条边一次且仅一次然后回到出发点的链?

一个连通图 $G=(V,E)$,若 G 的一个简单链包含 G 的所有边,则这个链称为

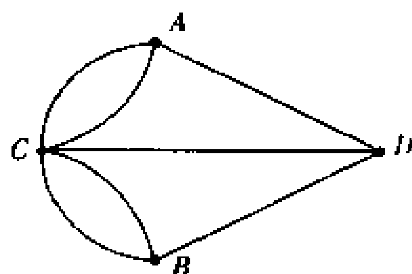


图 4-2

欧拉链;若这条欧拉链是闭链,则称它为**欧拉圈**.

一个连通有向图 $\vec{G}=(V,A)$,若 $\vec{G}$的一条简单路包含 $\vec{G}$的所有弧,则这条路称为**欧拉路**;若这条欧拉路是闭路,则称它为**欧拉回路**.

4.1 连通欧拉图的性质

(1) 对一个连通欧拉图 G,下述结论等价:

1) G 有欧拉圈.

2) G 的每个点的次为偶数.

3) G 的边集能分解为两两无公共边的初等圈.

(2) 一个连通图 $G=(V,E)$有一条简单链覆盖 G 的所有边,当且仅当 G 最多有两个奇点.

(3) 设 $\vec{G}=(V,A)$为连通有向图,则下述结论等价:

1) $\vec{G}$有欧拉回路.

2) $\vec{G}$中每一点 v 的出次等于入次.

3) $\vec{G}$的弧集能分解为两两无公共弧的初等回路.

一个图若既有有向线,又有无向线,则称为**混合图**,用 $H=(V,L)$表示混合图,H 的一条链,如果链上所有弧与链的走向一致,则称这条链为**混合路**.包含 H 的所有边和弧的简单混合路称为**混合欧拉路**;进而,若混合欧拉路是闭的,则称之为**混合欧拉回路**.类似地可以定义混合回路等.

(4) 设 $H=(V,L)$是连通混合图,则下述结论等价:

1) H 有混合欧拉回路.

2) 对任意 $S\subseteq V$,$\delta(S)-|\delta^+(S)-\delta^-(S)|\geqslant 0$ 是偶整数,其中 $\delta(S)$是 H 中连结 S 和 $V-S$ 的边数,$\delta^+(S)$是 S 到 $V-S$ 的弧数,而 $\delta^-(S)$是 $V-S$ 到 S 的弧数.

3) H 中的线集 L 能分解为两两无公共线的初等混合回路.

4.2 带限制的欧拉圈的存在性

无向图的一个非简单圈,如果圈上的每一条边恰好在圈上出现两次,则这个圈称为**双圈**;一个双圈如果包含图中所有边,则称它为**双欧拉圈**.

对任意一个连通的无向图 $G=(V,E)$,把 G 的每一条边用两条相反方向的弧代替,这样得到的有向图显然有欧拉回路.因此有

(1) 每一个连通无向图有一个双欧拉圈,使得每一条边经过两次的方向相反.

(2) 每一个连通无向图,如果它无环且没有1次点,则有一个双欧拉圈,使圈上任意两条相继的边都是 G 的不同边.

这一结果可以推广为

(3) 设 G 是无环连通欧拉图,将 G 中每一个点 v 的关联边集合(记为 E_v)划分为若干子集,记为 $E_v^1, E_v^2, \cdots, E_v^{i_v}$,使每一个 $|E_v^i| \leqslant \frac{1}{2} d_G(v)$, $i = 1,2,\cdots,i_v$. 那么 G 有一个欧拉圈,使得圈上任意两条相继的边不在同一个子集里.

设 $G = (V, E)$ 是无环的欧拉图,对 G 的每一点 $v \in V$,将关联于 v 的边之集合划分为2子集,记这个划分为 $P(v)$. 称集合 $\{P(v) | v \in V\}$ 为 G 的一个**转移系统**. G 的两个转移系统称为是**相容的**,如果他们无公共2子集.

由结果(3)显然可推出如下的一些结果:

1) 设 G 是无环连通欧拉图,且不含2次点. 设 X 是 G 的一个转移系统,那么 G 有一个欧拉圈 μ,由 μ 导出的转移系统与 X 是相容的.

注意:当沿着欧拉圈 μ 行走时,经过的任何两条相继的边就构成一个2子集,所有这些2子集就组成 G 的一个转移系统,这个转移系统称为 **μ 导出转移系统**.

2) 设 G 是无环连通欧拉图且有偶数条边,则 G 可表示为具有相同次的两个子图的并.

进而,如果 G 能划分为两个子图 H_1 和 H_2,使在每一点 $v \in V$, $d_{H_1}(v) = d_{H_2}(v) = \frac{1}{2} d_G(v)$,那么 G 有一个欧拉圈,使得圈上的边交替地属于 H_1 和 H_2.

3) 每个连通 $2k$ 正则图 G,若 G 有偶数条边,则 G 可分解为两个 k 正则图.

(4) 设 $G = (V, E)$ 是连通图,对 G 的每一条边给一个标号0或2,则 G 有一个双欧拉圈使得标号0的边两次经过的方向相反,而标号2的边两次经过的方向相同,当且仅当标号2的边导出的子图是欧拉的.

4.3 圈划分

设 G 是欧拉图,则 G 的边集能划分为若干初等圈,记它们为 $c_1, c_2, \cdots, c_k$,每一个初等圈 c_i 上的两条相邻边组成一个2子集. 那么所有这些2子集就构成 G 的一个转移系统,并称它为**电圈划分** $\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ **导出的转移系统**.

给定欧拉图 G 的一个转移系统 T, G 是否有初等圈划分,使初等圈划分导出的转移系统与 T 相容? 一般来说,对任意的欧拉图和任意给定的转移系统,上述问题的答案是否定的. 因此只能考虑某些特殊的欧拉图或具有某些性质的转移系统.

(1) 设 G 是平面欧拉图, T 是 G 的一个转移系统,使 T 中任一个2子集都不是 G 的割集,则 G 有一个初等圈划分,使划分导出的转移系统与 T 相容.

(2) 设 G 是2连通平面欧拉图,则 G 有一个初等圈划分,使每个初等圈的长度为偶数,当且仅当 G 有偶数条边.

(3) 两个猜想:

1) 假如 G 是连通且无2次点的欧拉图,那么对 G 的每一条欧拉图导出的转移

系统 T,总存在 G 的一个初等圈划分,使由划分导出的转移系统与 T 相容.

2) 设 G 是 n 个点的简单欧拉图,则 G 有一个初等圈划分,划分中圈的个数不大于$\frac{1}{2}n$.

4.4 欧拉圈(回路)的计数

先讨论有向图的欧拉回路的数目.设 T 是有向图 $\vec{G}=(V,A)$的一条欧拉回路,那么由 T 按下法可唯一地确定出 $\vec{G}$的一个以某点 v 为根的树形图:设 T 的起始弧为(v,u),取弧(v,u)并沿 T 行走,对每一个点 $x\neq v$,取第一次进入 x 的弧.那么被选取的弧构成一棵以 v 为根的树形图.反之,任给一棵以 v 为根的树形图,可构造一条欧拉回路.

假设 $\vec{G}=(V,A)$是连通的欧拉有向图,Δ_v 表示 $\vec{G}$中以 v 为根的有向树或树形图的个数,则 $\vec{G}$有不同的欧拉回路的个数为 $N(\vec{G})$,

$$N(\vec{G})=\Delta_v\prod_{i\in V}(d^+(i)-1)!,$$

其中 $d^+(i)$为点 i 的出次.

由此可得,对任一个欧拉有向图 $\vec{G}=(V,A)$中的任意 u、$v\in V$,有 $\Delta_v=\Delta_u$.这儿 Δ_v 可由第3.2节中的(5)算出.

对于无向的连通欧拉图也可计算其不同的欧拉圈之数目,其方法是,首先计算出它有多少种欧拉定向(给它一种定向,当这种定向使之成为欧拉有向图时,则称为这种定向为欧拉定向),然后,对每一种定向用上述公式算出其不同欧拉回路的数目.由于公式比较复杂,有兴趣的读者可参见[2].

5 哈密顿圈和路

无向图 $G=(V,E)$的一条初等链 P,若 P 包含了 G 的所有点,则称 P 为**哈密顿链**;G 的一个初等圈 c,若 c 包含了 G 的所有点,则称 c 为**哈密顿圈**.

类似地可定义哈密顿路和哈密顿回路.一个(有向)图,若它有哈密顿(回路)圈,则称它为**哈密顿(有向)图**;若它有哈密顿(路)链,则称它为一笔画(有向)图.显然,哈密顿(有向)图是一笔画的.

哈密顿图是以哈密顿的名字命名的,然而,早在哈密顿1856年发明正12面体数学游戏之前,核克门(Kirkman)已研究过这一课题.所谓正12面体游戏是指:从正12面体的一个顶点出发沿棱行走,能否经过每一个顶点一次恰好一次,而回到出发点.用图的语言即为:给定一个图 G,G 是否有哈密顿圈?

判断一个图是否是哈密顿图是十分困难的,已证明它是 NP 完全的.目前对这

一问题只能给出一些必要条件或充分条件.

5.1 哈密顿图的某些必要条件

(1) 若图 $G=(V,E)$是哈密顿的,那么对任意非空真子集 $S\subset V$,有 $c(G-S)\leqslant|S|$.其中 $c(G-S)$表示图 $G-S$ 的分枝个数.

Chvatal 扩充了这概念,他定义了一个图 G 的**坚韧度** $t(G)$为:对一切 $S\subset V$,$c(G-S)>1$,

$$t(G)=\min_{S}\frac{|S|}{c(G-S)}.$$

此时 $c(G-S)\leqslant|S|$等价于 $t(G)\geqslant1$.

设 $G=(V,E)$的连通度为 $k(G)$,独立数(即最大点无关集的点数)为 $\alpha(G)$,显然要 $c(G-S)>1$,必有$|S|\geqslant k(G)$;另一方面,$c(G-S)\leqslant\alpha(G)$.因此对任一图 G 必有 $t(G)\geqslant k(G)/\alpha(G)$.当 $G=K_{n,m}$时等式成立.

(2) 若图 $G=(V,E)$满足 $t(G)\geqslant1$,则 G 有哈密顿圈,或者 G 的补图 $\overline{G}$ 包含图 5-1 作为其子图.

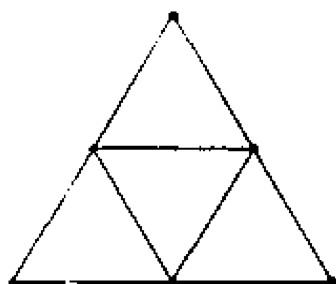


图 5-1

$G=(V,E)$的补图 $\overline{G}=(V,\overline{E})$的定义为:$[i,j]\in E$ 当且仅当$[i,j]\in\overline{E}$.

设 $G=(V,E)$是一个简单图,如果存在一个函数 $f:E\to[0,\infty)$,使得下述条件 1°、2°和 3°成立,则 G 称为**弱哈密顿图**.

1° 对任意 $v\in V$, $\sum\limits_{e\in E_v}f(e)\leqslant2$,其中 E_v 是 G 中关联于 v 的边之集合;

2° 对每一个非空真子集 $T\subset V$,

$$\sum_{e\in G[T]}f(e)\leqslant|T|-1.$$

其中 $G[T]$ 表示由 T 导出的子图.

当 $T=V$时,$\sum\limits_{e\in E}f(e)=|V|$.

3° 令 $W_0,W_1,\cdots,W_k$ 是 V 的非空真子集,并且对一切 $i=1,2,\cdots,k$,有 $|W_i\cap W_0|=1$,那么

$$\sum_{i=0}^{k}\Big(\sum_{e\in G[W_i]}f(e)\Big)\leqslant\sum_{i=0}^{k}|W_i|-k-\Big[\frac{1}{2}(k+1)\Big].$$

易见,每一个哈密顿图是弱哈密顿的.事实上,假如 c 是 G 的一个哈密顿圈,令

$$f(e)=\begin{cases}1, & 若\ e\in c,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

那么这样定义的 f 满足条件 1°、2°和 3°,即 G 是弱哈密顿的.

(3) 若 G 是弱哈密顿的,那么不存在 V 的划分$\{R,S,T\}$(R,S 和 T 可能是空

集)且 $T\neq V$,使

$$|S|+\sum_{C\in c[R]}\lceil\frac{1}{2}|[C,T]|\rceil< c(G[T]),$$

其中 $G[X]$表示由 X 导出的 G 的子图;C 为 $G[R]$的分枝;$|[C,T]|$表示分枝 C 到点集 T 的边数;求和是对 $G[R]$的所有分枝;$c(G[T])$是 $G[T]$的分枝数.

(4) 每一个弱哈密顿图 $G=(V,E)$必有 $t(G)\geqslant 1$,有一个 2 正则支撑子图,并且 G 的任何三个点必在一个圈上.

5.2 哈密顿圈的次条件

一个无向简单图 $G=(V,E)$,若对 $i=3,4,\cdots,|V|$,G 有长度为 i 的初等圈,则 G 称为**泛圈的**.显然,G 是泛圈的必是哈密顿的.

对于 G 有哈密顿圈的大部分充分条件,都是保证 G 有充分多的边.本章所讨论的图都是简单的图,用 n 表示其点数.不再加以说明.

一个图 $G=(V,E)$,若 G 不是哈密顿的,但对 G 的任意两个不相邻的点 u 和 v 连一条边后,则 $G+[u,v]$是哈密顿的,则称 G 是**极大非哈密顿图**.显然,任一个非哈密顿图 $G=(V,E)$,必有一个极大的非哈密顿图 $G'=(V,E')$包含 G.即 $E\subseteq E'$.

(1) 设 $G=(V,E)$是连通的,$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$是 G 的一条最长的初等链.若 $d_G(v_1)+d_G(v_k)\geqslant k$,则 G 是哈密顿的.

为证明它,不妨设$[v_1,v_k]\notin E$;否则,当 $k=n$ 时 P 与边$[v_1,v_k]$构成哈密顿圈,或者 $k<n$.此时 P 不是 G 的最长链,这与 P 的假设矛盾.

记 $N(v_1)=\{v_i|[v_1v_i]\in E\}$,$T(v_k)=\{v_{i+1}|[v_i,v_k]\in E\}$.由于 P 是最长链,所以链接两个端点 v_1 和 v_k 的邻点必定都在 P 上.因为

$$\begin{aligned}|N(v_1)\cap T(v_k)|&=|N(v_1)|+|T(v_k)|-|N(v_1)\cup T(v_k)|\\&=d_G(v_1)+d_G(v_k)-|N(v_1)\cup T(v_k)|\\&\geqslant k-(k-1)=1,\end{aligned}$$

因此存在 $v_i\in N(v_1)\cap T(v_k)$,所以有圈

$$c=\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_k,v_{k-1},\cdots,v_i,v_1\}.$$

当 $k=n$ 时,c 就是 G 的哈密顿圈,故得证;当 $k<n$ 时,则由 G 的连通假设,G 中必有一点 v 不属于 c 且 v 与 c 上某一点 v_j 有边相连.这样一来 P 就不是 G 的最长链.矛盾.

由(1)可以推出下述几个有名的结果:

1) 若无向图 G 中每一点 v,有 $d_G(v)\geqslant n/2$,则 G 是哈密顿的.

2) 若无向图 G 中每一对不相邻的点 u 和 v,均有 $d_G(u)+d_G(v)\geqslant n$,则 G 是哈密顿的.

3) 设 u 和 v 是无向图 G 中两个不相邻的点,并且满足 $d_G(u)+d_G(v)\geqslant n$.那么 G 是哈密顿的,当且仅当 $G+[u,v]$是哈密顿的.

注意:满足结果 1)或 2)中假设的图,不仅是哈密顿的,而且 n 为奇数时是泛圈图.3)是著名的闭包定理.

一个图 G 中两点间的距离,定义为连结这两点的最短链的长度.所谓最短链乃指含边数最小的链.

范更华推广了结果 1)和 2),得到如下:

(2) 设 $G=(V,E)$是 2 连通图,若 G 中每一对距离为 2 的点 u 和 v,有 $\max\{d_G(u),d_G(v)\}\geq n/2$,则 G 是哈密顿的.

2)中结果又被人们推广为

(3) 若无向图 $G=(V,E)$是 2 连通,并且 G 中每一对不相邻的点 u 和 v 有

$$d_G(u)+d_G(v)\geq n/2+\delta(G),$$

则 G 是哈密顿的;除一类特殊图外,也是泛圈的.

(4) 设 $G=(V,E)$是 2 连通,若对 G 的任何两两不相邻的三个点 u、v 和 w 满足

$$d_G(u)+d_G(v)+d_G(w)\geq n+k(G),$$

则 G 是哈密顿的,其中 $k(G)$为 G 的连通度.

(5) 设 $G=(V,E)$是 2 连通,若 G 中任何三个两两不相邻的点 u、v 和 w 满足

$$d_G(u)+d_G(v)+d_G(w)\geq n+\delta(G).$$

则 G 是哈密顿的,而且除一类图外也是泛圈的.

(6) 设 $G=(V,E)$的点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,用 d_i 表示 $d_G(v_i)$.若不存在 i、j 满足

$i<j,i+j\geq n,[v_i,v_j]\in E,d_i\leq i,d_j\leq j-1,d_i+d_j\leq n-1$,则 G 是哈密顿的.

(7) 不妨设上述的$\{d_i\}$满足 $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$. Chvatal 证明了下述结果:

对每一个 k,若 $d_k\leq k<\frac{1}{2}n$,则 $d_{n-k}\geq n-k$,那么 G 是哈密顿的.

(8) 设 $G=(V,E)$是 2 连通 k 正则图,若 $k\geq 4$ 且 $n\leq 3k+3$,则 G 是哈密顿的.

5.3 其它充分条件

本节只涉及用图的连通度、独立数和坚韧度描述图的哈密顿性.

(1) 任一图 G,若 $\alpha(G)\leq k(G)$,则 G 是哈密顿的.

已证明,满足 5.2 节(1)2)中假设条件的图 G,必有 $\alpha(G)\leq k(G)$,因此上述结果可视为(1)2)的推广.

(2) 设 $G=(V,E)$ k 连通,$t(G)\geq 1$,$\alpha(G)\leq k+1$,则有

1) 若 $k=3$ 且 $n\geq 11$,那么 G 是哈密顿的;

2) 若 $k=4$,则 G 是哈密顿的;

3) 对每一个 k,存在一个 n_k,使 $n\geq n_k$ 时,G 是哈密顿的.

(3) 设 $G=(V,E)$是 2 边连通的,若满足

$$\delta(G)\geq\max\{\alpha(G),\frac{1}{3}(n+2)\},$$

则 G 是哈密顿的.

5.4　无爪图的哈密顿圈

一个无向图 $G=(V,E)$,如果 G 中任何4个点的导出子图不同构于 $K_{1,3}$,则称 G 是无爪图.近几年来研究无爪图的哈密顿圈的文章很多,并取得了较大进展.

(1) 2边连通 k 正则的无爪图 $G=(V,E)$,如果 $k\geqslant\frac{1}{4}(n-1)$,则 G 是哈密顿的.

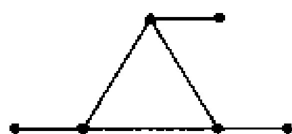


图 5-2

(2) 3边连通无爪图 G,若 $\delta(G)\geqslant(n+7)/6$,则 G 是哈密顿的.

(3) 设 $G=(V,E)$是 k 连通无爪图且 $k\geqslant2$,若对 G 的任意 $k+1$ 个点的独立集 I 有

$$\sum_{v\in I}d_G(v)\geqslant n-k,$$

则 G 是哈密顿的.

(4) 每个无爪图 G,若 G 不含同构于图5-2的导出子图,则 G 是哈密顿的.

5.5　有向图的哈密顿回路

关于有向图的哈密顿回路的存在性结果很少,仅列下述几个较重要的结果:

(1) 设 $\vec{G}=(V,A)$是简单有向图,若 $\vec{G}$中任何两个不相邻的点 u 和 v 满足

$$d_G(u)+d_G(v)\geqslant 2n-1,$$

则 $\vec{G}$有哈密顿回路.

给完全图 K_n 的每一边一个方向,这样得到的定向图称之为**竞赛图**,并用 T 表示之.

(2) 强连通的竞赛图有哈密顿回路.

(3) 强连通竞赛图中任一点 v,对每一个 k, $k=3,4,\cdots,n$, v 在长度为 k 的回路上.

(4) 设 T 是强连通的竞赛图,如果 T 的每一条弧都在长度为3的回路上,那么对每一个 k, $k=3,4,\cdots,n$, T 的每一条弧(可能除一条弧外)必在长度为 k 的回路上.

6　图的因子与因子分解

设 $G=(V,E)$是一个无向图,f 是 V 上一个非负整数函数且满足$f(v)\leqslant d_G(v)$, $v\in V$. G 的一个支撑子图 F,若满足对每一点 $v\in V$, $d_F(v)=f(v)$,则称 F 为 G 的一个 f 因子.因子问题主要研究:给定一个图 G 和 G 的点集上的非负整数函数 f, G 是否存在 f 因子?有多少 f 因子?以及具有某种特征的 f 因子的存在性和

如何找出所要求的因子.

6.1 匹配与1因子

设 $G=(V,E)$ 是一个简单无向图，$M\subseteq E$ 称为 G 的一个**匹配**，若 M 中任何两条边无公共端点. G 中具有边数最多的匹配称为 G 的**最大匹配**. 显然 G 的最大匹配的边数小于等于 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. 设 M 是 G 的最大匹配，若 $|M|=\frac{n}{2}$，则称 M 为**完美匹配**或称 M 是 G 的 **1 因子**. 显然，G 有 1 因子，则 G 的点数 n 必为偶数. 因此，研究最大匹配的性质与研究 1 因子的存在性有密切关系.

设 S 是图 G 的点集的一个子集，用 $q(G-S)$ 表示 $G-S$ 中含有奇数个点的分枝的个数，则有：

(1) 若 M 是 G 的最大匹配，则

$$\max_{S\subseteq V}\{q(G-S)-|S|\}=n-2|M|.$$

(2) 图 $G=(V,E)$ 有 1 因子，当且仅当对任意 $S\subseteq V$，有 $q(G-S)\leqslant |S|$.

设 $G=(V,E)$ 是一个无孤立点的简单图，F 是 G 中边的一个子集，若 G 中每一点 v 的关联边中至少有一条在 F 里，则称 F 为 G 的一个**边覆盖**. 具有边数最小的边覆盖，称为 G 的**最小边覆盖**.

(3) 设 G 是无孤立点的简单图，M 和 F 分别是 G 的最大匹配和最小边覆盖，则有

$$|M|+|F|=n.$$

(4) 设 $G=(X,Y;E)$ 为二部图，则 G 中存在匹配 M 使 $|M|=|X|$，当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 有

$$|N(S)|\geqslant |S|,$$

其中 $N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)$，而 $N(v)$ 表示 v 的邻点集合.

设 K 是无向图 $G=(V,E)$ 中点的一个子集，若 G 中每一条边至少有一个端点在 K 里，则称 K 为 G 的一个**点覆盖**. 具有点数最小的覆盖称为 G 的**最小点覆盖**.

(5) 设 $G=(X,Y;E)$ 是二部图，M 和 K 分别是 G 的匹配和点覆盖，则 M 和 K 分别是 G 的最大匹配和最小点覆盖，当且仅当

$$|M|=|K|.$$

(6) 设 $G=(V,E)$ 是连通的无爪图，则 G 有 1 因子，当且仅当 $|V|=n$ 为偶数.

6.2 f 因子

(1) 设 $G=(V,E)$ 为简单无向图，f 是 V 上的非负整数函数，则 G 有 f 因子，当且仅当对任意的 D、$S\subseteq V$ 且 $D\cap S=\varnothing$，有

$$q(D,S)-\sum_{x\in D}f(x)-\sum_{x\in S}(d_G(x)-f(x))+e(S,D)\leqslant 0,$$

其中 $e(S,D)$ 表示 G 中两个端点分属在 S 和 D 里的边之条数. $q(D,S)$ 是如下定义

的 $G-S-D$ 的 f 奇分枝的个数：$G-S-D$ 的一个分枝 C，若

$$\sum_{v\in C} f(v)+e(C,S)$$

为奇数，则称 C 为**f 奇分枝**.

上述的 f 因子存在的判别条件，一般来说不太好用. 因此人们对 f 的一些特殊值或某些特殊图类讨论某些因子的存在性. 设 F 是 G 的一个 f 因子，当对每一个点 v，$f(v)=k$ 时，则 F 称为 G 的 k 因子.

(2) $G=(X,Y;E)$ 为二部图，f 为 $X\cup Y$ 上的非负整数函数，则 G 有 f 因子，当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有

1) $\sum_{y\in T} f(y)-\sum_{x\in S} f(x)-e(X-S,T)\leqslant 0$；

2) $\sum_{x\in X} f(x)=\sum_{y\in Y} f(y)$.

(3) 设 G 是连通的 $2k$ 正则图，则 G 有 k 因子.

(4) 设 G 是 k 正则简单图，对任意非负整数 $r<k$，则 G 有一个支撑子图 F，使 F 中每一点的次为 r 或 $r+1$.

f 因子可以进一步推广：设 $G=(V,E)$ 是无向图，g 和 f 是 V 上的两个非负整数函数，使对每一点 $v\in V$ 有 $g(v)\leqslant f(v)\leqslant d_G(v)$. 若 G 有一个支撑子图 F，使每一点 $v\in V$ 均有 $d_F(v)$ 满足 $g(v)\leqslant d_F(v)\leqslant f(v)$，则称 F 为 G 的(g,f) 因子. 按这个定义，则可重叙(4)为：对任一 k 正则图 G 及任意非负整数 $r<k$，G 有$(r,r+1)$ 因子.

(5) 一个无向简单图 $G=(V,E)$，G 有(1,2)因子，当且仅当对任意 $S\subseteq V$ 有

$$i(G-S)\leqslant 2|S|,$$

其中 $i(G-S)$ 表示 $G-S$ 中孤立点的个数.

(6) 每一个 2 边连通图 G 且 $\delta(G)\geqslant 3$，必有一个支撑欧拉子图，即支撑子图中每一点的次为大于 0 的偶数，或称偶因子.

6.3 连通因子

设 F 是 G 的一个 f 因子，若 F 连通，则称 F 是 G 的**连通 f 因子**. 研究图的连通因子是一个十分困难的问题. 目前这方面的结果很少. 哈密顿圈问题，就是讨论图有连通 2 因子的条件. 然而连通因子问题比哈密顿问题更加广泛.

(1) 每一个连通无爪图 G，若 $\delta(G)\geqslant 3$，则 G 有(2,3)连通因子.

(2) 每一个连通无爪图 G，若 $K(G)\geqslant 2$，则 G 有(2,3)连通因子.

(3) 每一个 k 边连通图 $G=(V,E)$ 有(g,f)连通因子，其中对每一点 $v\in V$，$g(v)=1, f(v)=\left[\frac{d_G(v)+k-1}{k}\right]+2$.

(4) 若图 $G=(V,E)$ 有 k 因子，并且有哈密顿链，则 G 有$(k,k+1)$连通因子$(k\geqslant 2)$.

(5) 设 G 满足 $n\leqslant 8k-4$，$k\geqslant 2$，kn 为偶数，并且 $\delta(G)\geqslant n/2$，则 G 有一个 k

因子 F,使 F 含有哈密顿圈.

(6) 连通无爪图 G 有 k 因子,则 G 有 $(k,k+2)$ 连通因子,其中 $k \geq 1$.

6.4 因子分解与因子计数

一个图 $G=(V,E)$,如果边集 E 能划分为 k 个子集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$,使得每一支撑子图 $G_i=(V,E_i)$ 是 G 的一个 f 因子,则称 G 是 **f 因子可分解的**.

(1) 正则二部图是 1 因子可分解的.

(2) 一个图 G 是 2 因子可分解的,当且仅当 G 是 $2k$ 正则的.

(3) 二部图 $G=(X,Y;E)$ 有 k 个 1 因子,当且仅当 $|X|=|Y|$,并且对任意 $S\subseteq X, T\subseteq Y$,有

$$e(X-S,T) \geq k(|T|-|S|).$$

(4) 二部图 $G=(X,Y;E)$ 有 k 个两两边不重的 1 因子,当且仅当 $|X|=|Y|$,并且对任意 X 的子集 S 有

$$\sum_{y\in Y}\min\{k, |E(y)\cap(\bigcup_{x\in S}E(x))|\} \geq k|S|,$$

其中 $E(z)$ 表示 G 中关联于点 z 的边之集合.

(5) 给定图 $G=(V,E)$ 和正整数 k,一个有趣的问题是边数为 k 的匹配有多少个?k 条边的匹配称之为 **k 匹配**.设 G 的 k 匹配的个数为 a_k,多项式

$$f(G,x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

称为 G 的**匹配多项式**,这儿规定 $a_0=1$.

要写出 a_k 的表示式是很困难的,但可以建立 $f(G,x)$ 的递归公式,由此可求出诸 a_k.对 G 的每一条边 $e=[u,v]$,G 的所有 k 匹配可分为两类,一类包含 e,那么这一类的 k 匹配的个数等于 G''_e 的 $(k-1)$ 匹配的数目;另一类不含 e,那么这一类的 k 匹配的个数等于 G'_e 的 k 匹配数目.从而有

$$f(G,x) = f(G_e',x) + xf(G_e'',x).$$

其中

$$G_e' = G-e,\quad G_e'' = G-\{u,v\}$$

注意,如果 G 有 r 个分枝:$G_1,G_2,\cdots,G_r$,则

$$f(G,x) = \prod_{i=1}^{r} f(G_i,x).$$

(6) 设 $G=(X,Y;E)$ 为二部图,若每一点 $x\in X$ 有 $d_G(x)=k$,而每一点 $y\in Y$ 有 $d_G(y)\leq k$,则 G 能分解为 k 个最大匹配.显然这一结果是(1)的推广.

7 平面图

设 $G=(V,E)$ 是画在平面上的图,若 G 的任何两条边除端点外是不相交的,则称 G 为**平面图**.与平面图同构的图称为**可平面图**.一个可平面图画到平面上使其

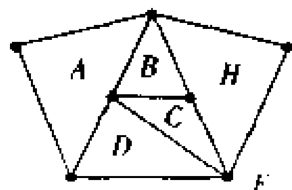


图 7-1

为平面图,则称之为平面嵌入.设 $G=(V,E)$ 是一个平面图,若沿平面图的边剪开,则平面被分成若干块区域,每一块称为 G 的一个面,无限大的一块称为外面.如图 7-1 被剪成 6 块,A、B、C、D、H、F.面 F 为外面.

平面图主要研究:如何判断一个图是否可平面的;如何把一个可平面图嵌入平面;当一个图不是可平面时,那么它的厚度是多少?最有名的四色问题也是平面图的主要研究问题之一.

7.1 平面图的判定及平面嵌入

设 $G=(V,E)$ 是 n 个点 m 条边和 f 个面的连通平面图.欧拉 1852 年给出了平面图的一个必要条件:$n-m+f=2$,并称它为欧拉公式.利用欧拉公式可判定 K_5 和 $K_{3,3}$ 是不可平面图.事实上,若设 g_i 为 G 的面 F_i 的边界数,取 $g=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant f} g_i$,那么 $gf\leqslant 2m$,即 $f\leqslant \frac{2m}{g}$.将 f 代入欧拉公式,则有 $n-m+\frac{2m}{g}\geqslant 2$,由此推出,当 $g\geqslant 3$ 时有

$$m\leqslant \frac{g(n-2)}{g-2}. \tag{7-1}$$

显然(7-1)式是平面图的必要条件.假如 K_5 和 $K_{3,3}$ 是平面图,则它们必满足(7-1)式.然而它们都不满足(7-1)式,故 K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图.

因为 $n\delta(G)\leqslant 2m$,所以当 G 是平面图且 $g\geqslant 3$ 时,由欧拉公式可得

$$\delta(G)\leqslant\left\lfloor \frac{2g}{g-2}\cdot\frac{n-2}{n}\right\rfloor\leqslant 5, \tag{7-2}$$

且仅当 $g=3,n\geqslant 12$ 时才有可能 $\delta(G)=5$.(7-2)式说明简单的可平面图的最小度 $\leqslant 5$.

一个图 G,如果可以通过另一个图 G' 的边上插上若干个点而得到,则称 G 同胚于 G'.如图 7-1 同胚于图 7-2.

1930 年库拉托夫斯基(Kuratowski)给出了判断一个图是可平面的充分必要条件:

一个图是可平面的,当且仅当它不含同胚于 K_5 和 $K_{3,3}$ 的子图.

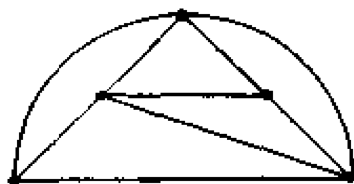


图 7-2

下面建立可平面图的平面嵌入算法,使得一个图是可平面的,当且仅当算法能把它嵌入到平面上.为此先引进几个概念.

设 $G=(V,E)$ 是一个连通图,$E'\subset E$,记由 E' 导出的子图为 $H=(V',E')$.在 $E-E'$ 中定义一个等价关系"~"如下:e_1、$e_2\in E-E'$,$e_1\sim e_2$,当且仅当 G 中存在连接 e_1 和 e_2 的链 P,使除 P 的两个端点外,P 中不含 H 里的点.等价关系"~"将 $E-E'$ 的边划分为若干个等价类,记它们为 $B_1,B_2,\cdots$,每一个等价类 B_i 称为 G

中关于子图 H 的桥.由桥 B_i 导出子图中属于 H 的那些点称为桥 B_i 的**附着点**.如图7-3,粗实线构成 H,关于 H 的桥为 $B_1, B_2, \cdots, B_5$. B_1 的附着点有3个,同时也是 B_2 的附着点,而 B_3 有4个、B_4 有两个、B_5 只有一个附着点.

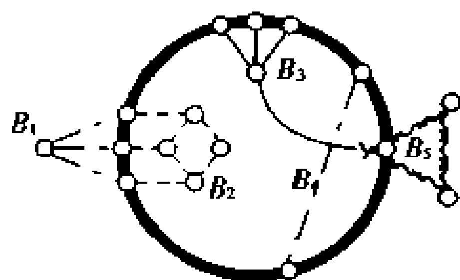


图 7-3

设 H 是 G 的一个可平面子图,H 的平面嵌入记为 $\widetilde{H}$.如果 G 有一个平面嵌入 $\widetilde{G}$,使 $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{G}$,则称 $\widetilde{H}$ 是 **G 可容纳的**.若 B 是 G 的关于 H 的一个桥,且 B 的所有附着点位于 $\widetilde{H}$ 的同一个面的边界上,则称该面是 B 可嵌入的.令 $F(B,\widetilde{H})$ 表示 B 可嵌入的所有 $\widetilde{H}$ 的面之集合,则有

(1) 设 G 是可平面图,H 是 G 的一个子图,若 $\widetilde{H}$ 是 G 可容纳的,则 G 中关于 H 的任一个桥 B,有 $F(B,\widetilde{H}) \neq \varnothing$.

(2) 平面嵌入算法:不妨设 G 为2连通,

步0 任取 G 的一个圈 H_1,画出 H_1 的平面嵌入 $\widetilde{H}_1$,置 $i = 1$.

步1 若 H_i 包含 G 的所有边,停止,$\widetilde{H}_i$ 为所求.否则找出 H_i 的桥,设其为 $B_1, B_2, \cdots, B_{k_i}$;对每一个桥 B_j 求 $F(B_j,\widetilde{H}_i)$.取

$$\min_{1\leq j\leq k_i} |F(B_j,\widetilde{H}_i)| = |F(B_r,\widetilde{H}_i)|;$$

若 $|F(B_r,\widetilde{H}_i)| = 0$,则 G 是不可平面的,停止.

步2 任取一个面 $f \in F(B_r,\widetilde{H}_i)$.设 P 是 B_r 中连接两个附着点的链,将 P 画入面 f 里.置 $H_{i+1} \leftarrow H_i \cup P$ 及平面嵌入 $\widetilde{H}_{i+1}$.置 $i \leftarrow i + 1$ 回步1.

7.2 图的厚度

当一个图不可平面时,一个自然的问题是它可画在几张平面上?如果图 $G = (V,E)$ 的边集 E 能划分为 k 部分:$E_1, E_2, \cdots, E_k$,使每一 E_i 的导出子图是可平面的,那么说 G 可嵌入在 k 个平面上.如果 G 能嵌入 k 个平面上,但不能嵌入 $k-1$ 个平面上,则称图 G 的厚度为 k.用 $\theta(G)$ 记图 G 的厚度.显然 $\theta(G) = 1$ 时,G 是可平面的.图的厚度不仅在理论上有意义,而且在印刷电路板的设计中也是有用的.一般地说,要判断一个图的厚度不是一个简单的问题.目前已知有下述的一些简单结果:

(1) 如果图 G 有 n 个点和 m 条边,则 G 的厚度 $\theta(G) \geq m/(3n-6)$.

(2) $\theta(K_n) \geq \lceil (n+7)/6 \rceil$.更精确的是

$$\theta(K_n)=\begin{cases}\lceil (n+7)/6\rceil, & 若\ n\neq 9,10;\\ 3, & 若\ n=9 或 10.\end{cases}$$

(3) 若 mn 为偶数或 mn 为奇数，且不存在 k 使 $n=\lceil 2k(m-2)/(m-2k)\rceil$，那么在 $m\neq n$ 时有

$$\theta(K_{m,n})=\lceil mn/2(m+n-2)\rceil.$$

对于 $m=n$，则有 $\theta(K_{n,n})=\lceil (n+5)/4\rceil$.

7.3 四色问题

盖丝锐猜想(1852年)：每一个平面图的面可以用4种颜色去染，使得任何两个相邻的面有不同的颜色. 这儿两个相邻的面，是指两个有公共边的面. 1879年勘姆普(A. B. Kempe)在美国数学杂志上发表了他对四色猜想的"证明". 1890年希伍德(P. J. Heawood)指出勘姆普证明中的缺陷，并证明了平面图的面是5色可染的. 一直到1976年，阿配尔(K. Appel)和海肯(W. Haken)利用计算机证明了四色猜想. 然而他们的证明很长，尽管此后做了几次修改，但数学家们仍在追求一种纯数学的证明.

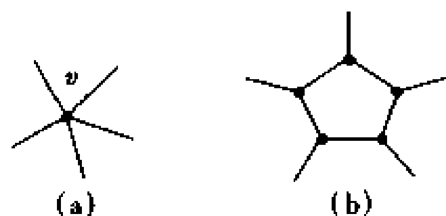


图 7-4

设 $G=(V,E)$ 是一个无环平面图，对 G 的每一个点 v，用正 $d_G(v)$ 边形代替，把关联于 v 的边依次与多边形的点相连，见图7-4. 这样由 G 得到的图记为 G_0. 显然 G_0 是一个3正则平面图.

(1) 由 G_0 构造知，G_0 的面是4色可染的，则 G 的面也是4色可染的.

由平面图 G 可构造另一个图 $G^*=(V^*,E^*)$：V^* 与 G 的面一一对应；若 G 的一条边是面 F_i 和 F_j 的公共边，则 G^* 中对应的两点连一条边；若 G 的一条边只位于一个面内，则这个对应的点加一个环. 这样得到的 G^* 称为 G 的对偶. 见图7-5.

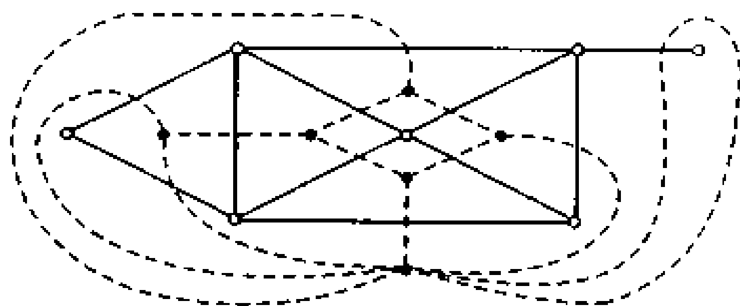


图 7-5

其中实线图的对偶为虚线图.

(2) 平面图 G 的面是4色可染的，当且仅当 G 的对偶 G^* 的点可用4色去染，使

相邻两个点具有不同的颜色.因此平面图的面着色问题可化为点着色问题.

平面图的面着色也可转化为边着色.一个图 G 是边 k 色的,如果用 k 种颜色染 G 的边,每一边染一种色,任何两条相邻的边具有不同颜色.

(3) 下述结论等价:

1) 每个平面图的面是 4 色可染的;

2) 每个平面图的点是 4 色可染的;

3) 每个简单 2 边连通 3 正则平面图的边是 3 色可染的.

(4) 希伍德证明了平面图的面是 5 色可染的.利用他的证明方法可以证明,当平面图的每一个面至少是由 4 条边围成的时,它的面是 4 色可染的.同时还可证明,点数小于 12 的平面图,其面也是 4 色可染的.实际上,这两个结果也可由(7-2)式推演出来.

8　图的染色

前一章叙述了平面图的面着色以及面着色与点着色、线着色的关系.对于非可平面图而言,只有把图嵌入到某个曲面上,才有可能定义它的面.本章将讨论一般图的边着色、点着色和点边全着色问题.

8.1　边　染　色

一个图 $G=(V,E)$ 称为 **k 边(点)可着色的**,如果用 k 种颜色染 G 的边(点),使每一条边(点)染一种颜色,且能使任意两相邻的边(点)有不同的颜色.一个图 $G=(V,E)$,如果它是 k 边(点)可着色的,但不是 $(k-1)$ 边(点)可着色的,则称它的**边(点)色数**为 k,通常用 $\mathscr{X}_1(G)$ $(\mathscr{X}(G))$ 表示 G 的边(点)色数.

前一章已提到,平面图的面是 4 色可染的,当且仅当每一个 3 正则平面图的边是 3 色可染的.从而可推出 3 正则平面图 G 的边色数为 3.下述是边色数的几个简单的结果:

(1) $\mathscr{X}_1(K_n)=\begin{cases} n-1, & \text{若 } n \text{ 为偶数}, \\ n, & \text{若 } n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

(2) 若 $G=(X,Y;E)$ 为二部图,则 $\mathscr{X}_1(G)=\Delta(G)$.

(3) 设 $\overline{G}$ 为 G 的补图.当点数 n 为偶数时,则有

$$n-1 \leqslant \mathscr{X}_1(G)+\mathscr{X}_1(\overline{G}) \leqslant 2(n-1),$$

$$0 \leqslant \mathscr{X}_1(G)\cdot\mathscr{X}_1(\overline{G}) \leqslant (n-1)^2.$$

当 n 为奇数时,则有

$$n \leqslant \mathscr{X}_1(G)+\mathscr{X}_1(\overline{G}) \leqslant 2n-3,$$

$$0 \leqslant \mathscr{X}_1(G)\cdot\mathscr{X}_1(\overline{G}) \leqslant (n-1)(n-2).$$

(4) 1964 年魏金得到了如下的精彩结果:

若 G 是简单图，则

$$\Delta(G) \leqslant \mathscr{K}_1(G) \leqslant \Delta(G)+1. \tag{8-1}$$

若 G 是无环多重图(即 G 中两点之间有多条边)，则

$$\Delta(G) \leqslant \mathscr{K}_1(G) \leqslant \Delta(G)+\mu(G),$$

其中 $\mu(G)$ 表示重边中最多重边的重数.

由魏金的这个结果可推出，夏奴(Shannon)1949年的一个结果：

设 G 是 n 个点的无环多重图，则

$$\Delta(G) \leqslant \mathscr{K}_1(G) \leqslant \left\lceil \frac{3}{2}\Delta(G) \right\rceil.$$

8.2 分　类

根据魏金定理，所有的简单图可分为两类：一个简单图 G，若 $\mathscr{K}_1(G)=\Delta(G)$，则 G 称为第一类图；若 $\mathscr{K}_1(G)=\Delta(G)+1$，则 G 称为第二类图. 要搞清楚哪些是第一类图，哪些是第二类图，并非是一件易事. 已知如下一些结果：

(1) G 是简单图，若其边数 $m > \left\lceil \frac{1}{2}n \right\rceil \Delta(G)$，则 G 属于第二类图.

由这一结果可推出如下事实：

1) 每一个奇数个点的正则简单图是第二类图.

2) 设 G 是一个 k 正则简单图，并且点数 n 为奇数，又设 H 是由 G 去掉任意 $r \leqslant \frac{k}{2}-1$ 条边而得到的图，则 H 属于第二类图.

3) 设 G 是 k 正则简单图，且 n 为偶数，那么在 G 的任一条边上插入一个新点，这样得到的图 H 是第二类图.

4) 设 G 是简单正则图，若 G 有割点，则 G 属于第二类.

(2) 如果 G 是简单平面图且 $\Delta(G) \geqslant 10$，则 G 属于第一类.

(3) 设 G 是简单平面图，g 是 G 的最短圈长度. 若下述条件之一成立，则 G 属于第一类.

1° $\Delta(G) \geqslant 3$，且 $g \geqslant 8$；　　2° $\Delta(G) \geqslant 8$，且 $g \geqslant 3$；

3° $\Delta(G) \geqslant 4$，且 $g \geqslant 5$；　　4° $\Delta(G) \geqslant 5$，且 $g \geqslant 4$.

8.3 点　着　色

设 $G=(V,E)$ 是一个图，由 G 可构造另一个图 $L(G)$ 如下：把 G 的边集 E 做为 $L(G)$ 的点集，$L(G)$ 的两个点相邻当且仅当对应的 G 的两条边相邻. $L(G)$ 称为 G 的**线图**.

显然，G 的边色数等于 $L(G)$ 的点色数. 一个图的点色数是很难确定的. 已知某些结果如下：

(1) 图 G 的点色数 $\mathscr{K}(G) \leqslant 2$，当且仅当 G 是二部图.

(2) 对任意简单图 G, $\mathscr{X}(G) \leqslant \Delta(G)+1$.

(3) 对任意简单图 $G=(V,E)$,

$$\mathscr{X}(G) \geqslant \sum_{v\in V} \frac{1}{n-d_G(v)}.$$

(4) 若简单连通图 G 不是 $\Delta(G)$ 正则的,则必有 $\mathscr{X}(G) \leqslant \Delta(G)$.

(5) 若简单连通图 G 不是完全图,也不是一个奇圈,则 $\mathscr{X}(G) \leqslant \Delta(G)$.

(6) 设 G 是任意一个简单图, $\overline{G}$ 是 G 的补图,则有

$$2\sqrt{n} \leqslant \mathscr{X}(G)+\mathscr{X}(\overline{G}) \leqslant n+1, \quad n \leqslant \mathscr{X}(G)\cdot\mathscr{X}(\overline{G}) \leqslant \frac{1}{4}(n+1)^2.$$

8.4 色多项式

色多项式是研究图的点色数的另一种途径.如果用 λ 种颜色对图 G 的顶点着色,使任何一条边的两个端点具有不同的颜色,那么有多少种不同的着色方式?两种着色方式是不同的,是指存在一点,它在两种着色方式中颜色不同.

(1) $P(G,\lambda)$ 表示用 λ 种颜色染 G 的点的不同着色方式数,那么色多项式 $P(G,\lambda)$ 有下述性质:

1) $P(G,\lambda)>0$,当且仅当 $\lambda \geqslant \mathscr{X}(G)$;

2) 若 G 有环,则对任意 $\lambda>0$, $P(G,\lambda)=0$;

3) $\mathscr{X}(G)=\min\{\lambda \mid \lambda>0$ 整数且 $P(G,\lambda)>0\}$.

(2) $P(G,\lambda)$ 的递归公式:设 $e=[u,v]$ 是 G 的一条边,而不是环;令 G'_e 表示从 G 中去掉边 e 后的图; G''_e 表示在 G'_e 中把点 u 和 v 合并为一点后的图. 则有

$$P(G,\lambda)=P(G'_e,\lambda)-P(G''_e,\lambda). \tag{8-2}$$

事实上 G'_e 的所有不同的着色方式可分为两类,一类是 u 和 v 有相同的颜色,此时这一着色方式恰是 G''_e 的着色方式;另一类是 u 和 v 具有不同颜色的着色方式,这一类着色方式恰是图 G 的着色方式.从而(8-2)式成立.

(3) 由 $P(G,\lambda)$ 的定义可推出:

1) $P(K_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)$.显然,使 $P(K_n,\lambda)>0$ 的最小正整数 $\lambda=n=\mathscr{X}(K_n)$.

2) 若 T_n 为 n 个点的树,则 $P(T_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}$.使 $P(T_n,\lambda)>0$ 的 λ 最小正整数为 2,即 $\mathscr{X}(T_n)=2$.

3) 若 G 有 k 个连通分枝 $G_1,G_2,\cdots,G_k$,则

$$P(G,\lambda)=\prod_{i=1}^{k} P(G_i,\lambda).$$

(4) 设 G 是 n 个点、m 条边、p_0 个分枝、包含 h 个长度为 3 的圈的简单图,则 $P(G,\lambda)$ 满足:

1) $P(G,\lambda)$ 是 n 次多项式, λ^n 的系数为 1;

2) $P(G,\lambda)$ 的最低次项为 λ^{p_0};

3) $P(G,\lambda)$ 中从 λ^n 到 λ^{p_0} 的各项系数是正负交错的整数,并且 λ^{n-1} 的系数为

$-m$,λ^{n-2} 的系数为 $m(m-1)/2-h$.

(5) 图 G 是连通二部图,当且仅当 $P(G,\lambda)$ 中 λ 项的系数为奇数.

(6) 图 G 是树,当且仅当 $P(G,\lambda)$ 中 λ 项的系数为 1.

塔特(Tutte)1970 年得到一个惊人而优美的所谓黄金恒等式.

(7) 若 G 是平面三角划分图,那么

$$P(G,\tau+2)=(\tau+2)\tau^{3n-10}(P(G,\tau+1))^2,$$

这里 $\tau=(1+\sqrt{5})/2$ 为黄金比率,即 $\tau+1=\tau^2$,并且 $\tau+2=\sqrt{5}\tau$.

塔特注意到 $P(G,\tau+1)\neq 0$,因此 $P(G,3.618\cdots)>0$. 而平面图的四色问题是说 $P(G,4)>0$.

平面三角划分图,是指每一个面都是由三条边围成的平面图.

由树的色多项式(8-2)可见,同一个色多项式可能对应若干个不同构的图. 什么样的色多项式对应的图是唯一的呢?这个问题目前所得结果不多. 而且是一些平凡的结果.

8.5 全着色

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图,如果用 k 种颜色对 G 的边和点进行染色,每一边和每一个点染一种颜色,使相邻的边以及相邻的点有不同的颜色,并且每条边的颜色和它两个端点的颜色各各不同,则称 G 是**k 可全着色的**. 如果 G 是 k 可全着色的,但 G 不是 $k-1$ 可全着色的,则称 **G 的全色数**为 k. 通常用 $\mathscr{X}_T(G)$ 表示图 G 的全色数. 1965 年贝扎德和 1968 年魏金分别提出了图的全色数猜想:任意一个简单无向图 G 有

$$\Delta(G)+1\leqslant\mathscr{X}_T(G)\leqslant\Delta(G)+2.$$

围绕这一猜想,已得到了一些结果,但要彻底解决这一猜想,还有相当一段距离. 下述一些图类的全色数问题已解决:

(1) $G=(V,E)$,记 $n=|V|$,

1) n 为偶数,$\Delta(G)=n-1$;

2) n 为偶数,$\Delta(G)=n-2$;

3) n 为偶数,G 为$(n-3)$- 正则图;

4) n 为奇数,$\Delta(G)=n-1$;

5) n 为奇数,G 为 d 正则且 $d\geqslant\dfrac{\sqrt{7}}{3}n$.

(2) 设 G 是 n 个点的简单无向图,若 $\Delta(G)\geqslant n-5$,,则 $\mathscr{X}_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

(3) 若 $\Delta(G)\geqslant\dfrac{3}{4}n$,则 $\mathscr{X}_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

易见,当 $n\geqslant 20$ 时,总有 $n-5\geqslant\dfrac{3}{4}n$,因此(3)比(2)好一些.

(4) 若 $\Delta(G)\leqslant 4$,则 $\mathscr{X}_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$

(5) 若图 $G=(V,E)$ 不含三角形,则有

$$\mathscr{X}_T(G) \leqslant \frac{9}{5}\Delta(G) + 2.$$

(6) 设 G 为 k 正则图，若满足

$$k \geqslant \begin{cases} 6n/7, & k \text{ 为奇数}, \\ 3n/4, & k \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

则 $\mathscr{X}_T(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

9 完 美 图

设 $G = (V, E)$ 是无向简单图，$S \subseteq V$，若 S 的导出子图 $G[S]$ 为完全图，则称 $G[S]$ 为一个**团**，用 H 表示子图 $G[S]$. G 中最大团中的点数，称为 G 的**团阶**，用 $\omega(G)$ 表示 G 的团阶. 若 G 中存在 k 个团 $H_1, H_2, \cdots, H_k$，使 $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = V$，则称 G 是**可 k 团覆盖的**. 若 G 是可 k 团覆盖的，但不是 $(k-1)$ 团覆盖的，则称 k 为 G 的**团覆盖数**，记它为 $\theta(G)$.

一个图 $G = (V, E)$，如果它的每一个子集 $S \subseteq V$，S 在 G 中的导出子图 H 满足 $\mathscr{X}(H) = \omega(H)$，则称 G 是**完美图**.

完美图的概念是贝尔热(Berge)在1960年提出来的，它是图论中最有研究价值的专题之一. 因计算复杂性理论和组合最优化都与完美图有些关系. 贝尔热提出的**强完美图猜想**，至今仍是一个重要而未解决的问题. 这个猜想是：

一个简单图 G 是完美的，当且仅当 G 和它的补图 $\overline{G}$ 的任一个导出子图都不是长度大于3的奇圈.

现在已知的一些完美图类，一方面显示了强完美图猜想的正确性，另一方面也可看出这一猜想的难度.

9.1 某些完美图类

1. 二分图 $G = (V, E)$ 是完美图

事实上，二部图的任一个导出子图 H 也是二分图. 当 H 中有边，则 $\omega(H) = 2$，而 $\mathscr{X}(H) = 2$；当 H 中无边，则 $\omega(H) = 1$，而 $\mathscr{X}(H) = 1$. 从而总有 $\omega(H) = \mathscr{X}(H)$.

2. 二分图的线图是完美图

因为线图的团阶等于原图的最大次，而线图的点色数等于原图的边色数. 由于二部图的边色数等于其最大度，由此可推出本结论.

设$(P, \leqslant)$是偏序集，以 P 中元素为点构造一图 $G = (V, E)$：V 即为 P 中元素集合，对 $u、v \in P$，$[u, v] \in E$. 当且仅当 u 和 v 在偏序集中是可比较的，称图 $G = (V, E)$ 为**可比较图**.

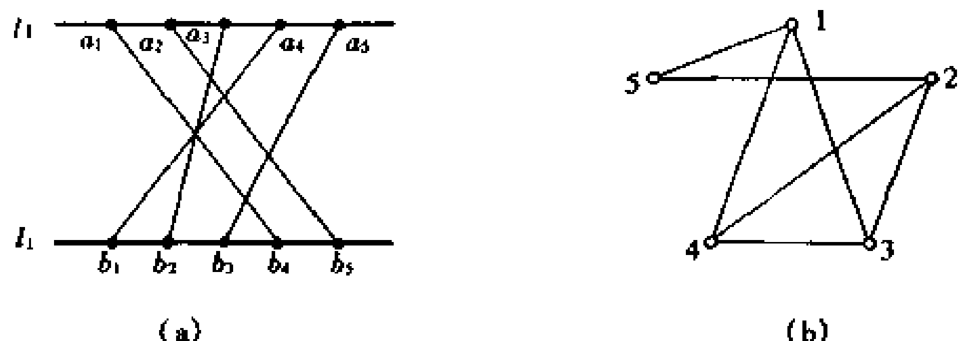
3. 每一个可比较图是完美的

显然，G 的团阶恰等于 $(P,\leqslant)$ 的最长链的长度，而 G 的色数也等于 $(P,\leqslant)$ 的最长链长度，由此可推出本结论。

一个图 $G=(V,E)$，若它的每一个长度大于3的圈都有弦，则称 G 为**三角划分图**。

4. 三角划分图是完美图.

设 l_1 和 l_2 是平面上两条平行线，$a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 分别是 l_1 和 l_2 上的 n 个点。不妨设 l_1 上的点满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$。用 $[a_i,b_i]$ 表示联结 a_i 和 b_i 的线段。构造图 $G=(V,E)$ 如下：$V=\{1,2,\cdots,n\}$，而 $[i,j]\in E$ 当且仅当 $[a_i,b_i]$ 和 $[a_j,b_j]$ 相交，即 $a_i<a_j$ 且 $b_i>b_j$（见图9-1）。这样构造的图 G 称为**置换图**。



(a)　　　　(b)

图9-1

5. 每一个置换图是完美图

实际上，置换图是一个可比较图。

如果一个图 $G=(V,E)$ 的点集 V 能划分为两部分：V_1 和 V_2，使 $G[V_1]$ 为空图，$G[V_2]$ 为完全图，则称 G 是**可分裂图**。

6. 可分裂图是完美图

事实上，可分裂图是三角划分图。

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 都是正整数。构造图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，$[i,j]\in E$ 当且仅当 $a_i+a_j\geqslant b$。这样构造出来的图 G 称为**阈图**。

7. 阈图是完美图

事实上，阈图是一个可分裂图。

设 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 是直线 L 上的 n 个区间，定义图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{1,2,\cdots,n\}$，$[i,j]\in E$ 当且仅当 $J_i\cap J_j\neq\varnothing$。这样得到的图 G 称为**区间图**。

8. 区间图是完美图.

9.2　有关完美图的定理

1972年劳瓦士(Lovasz)和1973年富克逊(Fulkerson)分别独立地解决了贝尔热关于完美图的一个猜想，并证明了下述结果：

(1) 设 $G=(V,E)$ 是一个简单图，则下述结论等价：

1) 对任意 $S\subseteq V$，$\mathscr{X}(G[S])=\omega(G[S])$；

2) 对任意 $S \subseteq V$, $\alpha(G[S]) = \theta(G[S])$;

3) 对任意 $S \subseteq V$, $\omega(G[S]) \cdot \alpha(G[S]) \geqslant |S|$.

由(1)可立即推出:

(2) 每一个完美图的补图也是完美图.

事实上,由图 G 和它的补图 $\overline{G}$ 之间的关系可得:对 G 的任一导出子图 H,有 $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$, $\theta(H) = \mathscr{X}(\overline{H})$,其中 $\overline{H}$ 是 H 的补图.故由 G 是完美图及(1),可得 $\mathscr{X}(\overline{H}) = \omega(\overline{H})$,即 $\overline{G}$ 是完美图.

(3) 图 $G = (V, E)$ 是完美图,当且仅当对每一个子集 $S \subseteq V$,导出子图 $G[S]$ 有一个独立集 I,使 $\omega(G[S] - I) < \omega(G[S])$.

9.3 临界非完美图

一个简单图 $G = (V, E)$,如果 G 不是完美的,但 G 的任一个导出真子图是完美的,则称 G 是**临界非完美图**.例如奇数个点的初等圈是临界非完美的;而奇数个点的初等圈的补图也是临界非完美的.前面提到的强完美图猜想,用临界非完美图的术语可重新叙述为:只有奇圈和奇圈的补图是临界非完美图.

(1) 临界非完美图的补图也是临界非完美图.

(2) 如果 G 是临界非完美图,则 G 的点数 $n = \alpha(G)\omega(G) + 1$.

设 $G = (V, E)$ 是具有 $n = \alpha\omega + 1$ 个点的简单图,如果对 G 的每一个点 v, $G - v$ 的点集能划分为 α 个阶为 ω 的团,同时也能划分为 ω 个点独立集,使每个独立集恰有 α 个点,则称 G 为**(α, ω) 图**.

(3) 每一个临界非完美图是一个(α, ω)图.

(4) 设 $G = (V, E)$ 是(α, ω)图,则 $|V| = \alpha \cdot \omega + 1$, $\alpha(G) = \alpha$, $\omega(G) = \omega$, $\mathscr{X}(G) = \omega + 1$, $\theta(G) = \alpha + 1$.

(5) 设 G 是(α, ω)图,记 $n = \alpha\omega + 1$, ω 团表示具有 ω 个点的团, α 独立集表示 α 个点的独立集.则有

1) G 恰有 n 个 ω 团;

2) G 恰有 n 个 α 独立集;

3) G 的每一个点恰在 ω 个 ω 团里;

4) G 的每一个点恰在 α 个 α 独立集里;

5) G 的每一个 ω 团恰与一个 α 独立集不交;

6) G 的每一个 α 独立集恰与一个 ω 团不交.

9.4 完美图的某些充分条件

判断一个图是否是完美的,并非是件简单的事情,下面提供一个图是完美图的一些充分条件:

(1) 一个图 G,如果它的每一个奇圈有两条交叉的弦,则 G 是完美的.这儿的奇圈是指长大于 3 的奇圈.

(2) 如果图 G 的每一个长度大于3的奇圈至少有两条弦,则 G 是完美的.

(3) 如果图 G 的每一个奇圈是由不交叉的弦划分为三角形,那么 G 是完美的.

强完美图猜想对平面图和无爪图都是正确的.

9.5　某些参数值的估计

计算和估计一个图 G 的 $\mathscr{K}(G)$ 和 $\alpha(G)$ 是十分困难的.已知确定一个图的色数和独立数问题都是NP-hard的.本节的目的是利用线性规划这一工具计算或估计 $\mathscr{K}(G)$ 及 $\alpha(G)$ 的值.

(1) 设 $G=(V,E)$ 是无向简单图.对 G 的每一个点 i 指定一个变量 x_i,那么 G 的独立集数 $\alpha(G)$ 是下述整数规划的最优值:

$$\begin{cases}\max\sum_{i=1}^{n}x_i,\\ \sum_{i\in C}x_i\leqslant 1,\text{对 } G \text{ 的每一个团 } C,\\ x_i=0\text{ 或 }1,i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{9-1}$$

如果对 G 的每一个团 C,指定一个变量 y_C,那么 G 的补图 $\overline{G}$ 的色数 $X(\overline{G})$ 为下述问题的最优值:

$$\begin{cases}\min\sum_{C}y_C\\ \sum_{i\in C}y_C\geqslant 1,i=1,2,\cdots,n,\\ y_C=0\text{ 或 }1,\text{对 } G \text{ 的一切团 } C.\end{cases}\tag{9-2}$$

众所周知,问题(9-1)和(9-2)都是0-1整数规划,目前还没有好的一般算法.

问题(9-1)和(9-2)对应的松弛问题分别为问题(9-3)和(9-4):

$$\begin{cases}\max\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i\in C}x_i\leqslant 1,\text{对 } G \text{ 的一切团 } C,\\ x_C\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{9-3}$$

$$\begin{cases}\min\sum_{C}y_C\\ \sum_{i\in C}y_C\geqslant 1,i=1,2,\cdots,n,\\ y_C\geqslant 0,\text{对 } G \text{ 的每个团 } C.\end{cases}\tag{9-4}$$

由于问题(9-3)和(9-4)是一对互相对偶的线性规划,故他们的最优值相等.设其最优值为 $\alpha^*(G)$,从而有 $\alpha(G)\leqslant\alpha^*(G)\leqslant\mathscr{K}(\overline{G})$.

特别,当 G 为 (α,ω) 图时,则必有

$$\alpha^*(G) = \alpha + \frac{1}{\omega}.$$

事实上,设 $x_i = 1/\omega, i = 1,2,\cdots,n$,则它是问题(9-3)的一个可行解,从而

$$\alpha^*(G) \geqslant \frac{n}{\omega} = \alpha + \frac{1}{\omega}.$$

另一方面,对每一个最大团 C,令 $y_C = 1$,而其余团 C,$y_C = 0$,则$\{y_C\}$是问题(9-4)的可行解.再由(5)可得

$$\alpha^*(G) = X^*(\overline{G}) \leqslant n/\omega = \alpha + \frac{1}{\omega},$$

其中 $X^*(\overline{G})$ 是问题(9-4)的最优值.

由上述可得下面的结论:

1) 图 $G = (V,E)$ 是完美的,当且仅当对 G 的每一个导出子图 H 有 $\alpha(H) = \alpha^*(H)$.

2) 图 $G = (V,E)$ 是完美的,当且仅当对 G 的每一个导出子图 H,$\alpha^*(H)$ 是整数.

对一般图计算 $\alpha^*(G)$ 和计算 $\alpha(G)$ 一样困难,但对完美图有多项式算法计算 $\alpha(G)$.

(2) 冯克逊在1972年证明了线性规划(9-3)是描述完美图的独立集的凸多面体.他的结论是:当且仅当 G 是完美图时,不等式组(9-3)是描述一个图 G 的独立集的凸多面体.

劳瓦士等人已证明,利用线性规划的椭球法可在多项式时间内求出完美图的独立数 $\alpha(G)$.

(3) 对估计值 $\alpha^*(G)$ 的改进.设 $G = (V,E)$,$V = \{1,2,\cdots,n\}$,对 G 的每一个独立集 U,定义一个 $n \times n$ 的矩阵 $A_U = (a_{ij})$,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1/|U|, & 若\ i,j \in U, \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

若令 $J = (1,1,\cdots,1)^T$,则显然有 $J^T A_U J = |U|$.设

$$S = \{A_U \mid U 是 G 的独立集\},$$

因此有 $\alpha(G) = \max\{J^T A J \mid A \in S\}$.由 A_U 的定义得:

1) 任意 $A \in S$,有 $\mathrm{tr}A = 1$,其中 $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$;

2) $A = A^T$,即 A 是对称的;

3) A 是半正定的.

记 $\overline{S}$ 是 S 的凸包,那么对任意的 $X \in \overline{S}$,X 也满足 1)、2)、3).

定义

$$\xi(G) = \max\{J^T X J \mid X \in \overline{S}\}.$$

由于 $S \subseteq \overline{S}$,故有 $\alpha(G) \leqslant \xi(G)$;进而,对任意 $X \in \overline{S}$,定义

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

$$x_i = \begin{cases} f_i^2/x_{ii}(\sum_{i=1}^{n} f_i), & 若\ x_{ii} \neq 0, \\ 0, & 其余, \end{cases}$$

其中 $X = [x_{ii}]$ 为 $n \times n$ 矩阵.不难验证,这样定义的 $\{x_i\}$ 为规划问题(9-3)的可行解.从而 $\xi(G) \leqslant \alpha^*(G)$.这样就得到

$$\alpha(G) \leqslant \xi(G) \leqslant \alpha^*(G).$$

当图 G 是 (α,ω) 图时,则有

$$\alpha(G) < \xi(G) < \alpha^*(G).$$

(4) 已经证明,对任给简单图 G 和 $\epsilon > 0$,计算误差小于 ϵ 的 $\xi(G)$ 之值有一个多项式算法,该算法是 n 和 $|\log\epsilon|$ 的多项式函数.

(5) 若将((1) 中 1) 和 2) 的 $\alpha^*(H)$ 用 $\xi(H)$ 代之,则 1) 和 2) 仍成立.

10　整数流与圈覆盖

10.1　整数流的基本概念

设 $G = (V,E)$ 是一个无割边的无向图,f 是一个映射 $f: E \to \mathbf{Z}$,其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集合. $\vec{G}$ 是 G 的一个定向.记 E_v^+ 和 E_v^- 分别是 $\vec{G}$ 中关联于 v 的出弧集合和入弧集合.若对 G 的每一点 v 有

$$f^+(v) \xlongequal{\text{def}} \sum_{e \in E_v^+} f(e) = \sum_{e \in E_v^-} f(e) = f^-(v), \tag{10-1}$$

则称有序对 $(\vec{G},f)$ 是一个整数流,或称 G 有整数流.若一个整数流 $(\vec{G},f)$ 满足,对每一边 $e \in E$ 有 $f(e) \neq 0$,则称 $(\vec{G},f)$ 为处处不为零的整数流,或称 f 为 G 的处处不为零的整数流.若 $(\vec{G},f)$ 是 G 的一个整数流,并且对每一个 $e \in E$ 有 $|f(e)| < k$,则称 $(\vec{G},f)$ 为 G 的**整数 k 流**,或简称 k 流.

整数流问题主要是研究哪些图类有处处不为零的 k 流,并使 k 尽量小.

10.1.1　塔特关于整数流的猜想

整数流的概念是塔特(Tutte)引进的,它是平面图四色问题的提炼和推广,关于整数流问题,塔特的几个最有名的猜想是:

(1) 每一个无割边的图有一个处处不为零的 5 流.

(2) 每一个无割边的图,如果它的每一个子图都不同胚于彼特孙(Petersen)图(图 10-1),则它有处处不为零的 4 流.

(3) 每一个无割边的 3 正则图,若它不含同胚于彼特孙图的子图,则它的边是 3

可着色的(等价地说,有处处不为零的 4 流).

(4) 每一个无割边的图,若它不含 3 条边的割集,则它有处处不为零的 3 流.

40 多年来,这些猜想取得了一些进展,下面将作介绍.

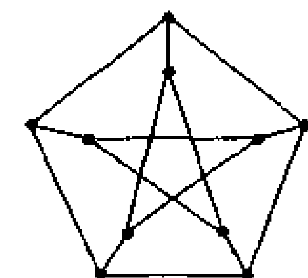


图 10-1 彼特孙图

10.1.2 整数流的性质

设$(\vec{G},f)$是 G 的一个整数流,那么由流的定义可知:

(1) 对任意 $U\subset V, f^+(U):=\sum_{v\in U}f^+(v)=\sum_{v\in U}f^-(v)\overset{\text{def}}{=\!=}f^-(U)$,并且 $\sum_{e\in(U,\overline{U})}f(e)=\sum_{e\in(\overline{U},U)}f(e)$.其中$\overline{U}=V-U$.而$(X,Y)$表示起点在 X 里终点在 Y 里的弧之集合.

由此可推出,若 G 有处处不为零的整数流,则 G 无割边.

(2) 对任意 $E_0\subseteq E$,在 $\vec{G}$ 中将 E_0 的弧反向,这样由 $\vec{G}$ 得到 G 的另一个定向$\vec{G'}$;并定义

$$f'(e)=\begin{cases}f(e), & 若\ e\in E-E_0,\\ -f(e), & 若\ e\in E_0.\end{cases}$$

那么$(\vec{G'},f')$也是 G 的整数流.

因此,若 G 有整数流,则对 G 的任何一个定向$\vec{G}$,都有一个映射$f:E\to\mathbf{Z}$,使$(\vec{G},f)$是 G 的一个整数流.同理,若$(\vec{G},f)$是 G 的一个流,那么 G 有一个流$(\vec{G'},f')$,使对一切 $e\in E, f'(e)\geqslant 0$.

(3) 若 G 有一个处处不为零的 k 流,则对一切 $h\geqslant k$, G 有一个处处不为零的 h 流.

(4) G 有处处不为零的 2 流,当且仅当 G 是欧拉图.

设 $\vec{G}$ 是 G 的一个定向,$f:E\to\mathbf{Z}$.若有序对$(\vec{G},f)$满足,对每一个 $v\in V$ 有

$$f^+(v)\equiv f^-(v) \qquad (\mathrm{mod}\,k),$$

则称$(\vec{G},f)$是模 k 流.一个模 k 流$(\vec{G},f)$,若对一切 $e\in E, f(e)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,k)$,则称$(\vec{G},f)$为处处不为零的模 k 流.

(5) 设$(\vec{G},f)$是 $G=(V,E)$ 的模 k 流,$E_0\subseteq E$,在 $\vec{G}$ 中将 E_0 里的弧反向得到的 G 的定向图记为$\vec{G'}$.定义

$$f'(e)=\begin{cases}f(e), & e\in E-E_0,\\ k-f(e), & e\in E_0.\end{cases}$$

那么$(\vec{G'},f'(e))$也是 G 的模 k 流.

(6) 图 G 有处处不为零的 k 流，当且仅当 G 有处处不为零的模 k 流.

10.1.3 整数流与面着色

设 $G=(V,E)$ 是一个平面图且无割边，则 G 的面是 k 色可染的，当且仅当 G 有处处不为零的 k 流.

假设 $F(G)$ 为 G 的面之集合，$\{1,2,\cdots,k\}$ 是 k 种颜色集合. G 的面是 k 色可染的，等价地说存在映射 $C:F(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得每一条边 e 的两侧的面有不同颜色. 现在对每一条边 e 给一个定向，使得沿着其定向走，它的右侧面的色号小. 定义 $f(e)=|C(F_{e_l})-C(F_{e_r})|$，其中 F_{e_l} 和 F_{e_r} 分别是沿 e 的定向走时 e 的左侧面和 e 的右侧面. 这样就得到了 G 的一个定向 $\vec{G}$ 和边集 E 上的一个函数 f. 不难证明 $(\vec{G},f)$ 是一个处处不为零的正的 k 流，即 $(\vec{G},f)$ 是一个处处不为零的 k 流，并且 $f(e)>0$ 对一切 $e\in E$ 成立.

反之，设 $(\vec{G},f)$ 是 G 的一个处处不为零的 k 流，定义映射 $C:F(G)\to\{0,\cdots,k-1\}$ 如下：任取 G 的一个面 $F_0\in F(G)$，定义 $C(F_0)=0$，对 $\vec{G}$ 的每一弧 e，设 F_{e_l} 和 F_{e_r} 分别是 e 的左侧面和右侧面，则定义

$$C(F_{e_l})\equiv C(F_{e_r})+f(e) \pmod{k}.$$

不难证明，这样定义的映射 C 是 G 的面 k 着色，由于 $f(e)\neq 0$，所以

$$C(F_{e_l})\neq C(F_{e_r}).$$

10.2 圈覆盖

设 G 是一个图，$\mathscr{F}$ 是 G 的欧拉子图的一个族. 如果 G 的每一条边至少属于 $\mathscr{F}$ 的一个成员，则称 $\mathscr{F}$ 是 G 的一个**圈覆盖**. 进而，若圈覆盖 $\mathscr{F}$ 中有 k 个欧拉子图，则称 $\mathscr{F}$ 为 **k 圈覆盖**. 设 $\mathscr{F}$ 是 G 的圈覆盖，若 G 的每一条边恰好在 $\mathscr{F}$ 的两个成员里，则称 $\mathscr{F}$ 为**圈双覆盖**；进而圈双覆盖 $\mathscr{F}$ 若有 k 个成员，则称 $\mathscr{F}$ 为 **k 圈双覆盖**.

10.2.1 圈覆盖与整数流的关系

(1) G 有处处不为零的 2^r 流，当且仅当 G 有 r 圈覆盖.

(2) 若 G 有 2^r 圈双覆盖，则 G 有处处不为零的 2^r 流.

设 $\mathscr{F}=\{C_1,C_2,\cdots,C_r\}$ 是图 G 的一个圈双覆盖，如果对每一个 $i=1,2,\cdots,r$，存在 C_i 的一个定向 $\vec{C}_i$，使得 $\vec{C}_i$ 是一个欧拉有向图，并且对 G 的每一条边 e，e 在 $\mathscr{F}$ 的两个欧拉有向图 C_α 和 C_β 中的定向相反，则称 $\mathscr{F}$ 是**可定向圈双覆盖**. 如果可定向圈双覆盖 $\mathscr{F}$ 中有 k 个成员，则称 $\mathscr{F}$ 为**可定向 k 圈双覆盖**. 考虑图的下述性质之间关系：

(P_1) 图 G 有处处不为零的 k 流.

(P_2) 图 G 有可定向 k 圈双覆盖.

(P_3) 存在可定向曲面 S, G 在 S 上是面可 k 着色的.

(3) 当 G 是无割边的图时,则有

1) (P_3) 可推出(P_2), (P_2) 可推出(P_1).

2) 若 G 是平面图且 S 是球,则(P_3) 等价于(P_2) 等价于(P_1).

3) 若 G 是 3 正则图,则(P_3) 等价于(P_2).

4) 当 $k = 2,3,4$ 时,(P_2) 和(P_3) 等价.

设 $\mathscr{F}$ 是图 G 的圈覆盖,如果 G 的每一条边最多出现在 $\mathscr{F}$ 的两个成员里,则称 $\mathscr{F}$ 为 G 的**圈(1,2) 覆盖**.

(4) 下述结论等价:

1) G 有处处不为零的 4 流;

2) G 有 2 圈(1,2) 覆盖;

3) G 有 3 圈(1,2) 覆盖;

4) G 有 3 圈双覆盖;

5) G 有 4 圈双覆盖.

(5) 若图 G 有处处不为零的 4 流,则 G 有圈双覆盖.

10.3 处处不为零的 4 流与 3 流

设 $G = (V, E)$ 是一个无割边的图, G 的一个子图 H. 若 H 满足对每一点 $v \in V$ 有 $d_G(v) \equiv d_H(v) \pmod 2$, 则称 H 为 G 的**同奇偶子图**.

(1) 图 G 有处处不为零的 4 流,当且仅当 G 能分解为若干个非平凡的同奇偶子图.

(2) 图 G 有处处不为零的 4 流,当且仅当 G 有两个边不交的同奇偶子图.

设 S 是 G 的一个欧拉子图, C 是 S 的一个分枝,若 C 包含 G 的奇(偶) 数个奇次点,则称 C 在 G 中是**奇(非奇) 异的**. G 的一个欧拉子图 S 是非奇异的,如果它的每一个分枝都是非奇异的;进而,若 S 是非奇异的,并且 G 中不在 S 里的点之次均为偶数,则称 S 为**偶支撑圈**.

(3) 一个图 G 有处处不为零的 4 流,当且仅当 G 有偶支撑圈.

(4) 3 正则图是边 3 可着色的,当且仅当它有 2 因子 $\mathscr{C}$,使 $\mathscr{C}$ 的每一个分枝是偶长度的圈.

(5) 若 G 有一个连通的偶因子,则 G 有处处不为零的 4 流. 由此可推出,若 G 是哈密顿的,则 G 有处处不为零的 4 流.

(6) 若 G 有两棵边不交的支撑树,则 G 有处处不为零的 4 流.

由于 4 边连通图包含两棵边不交的支撑树,所以有

(7) 若 G 是 4 边连通,则 G 有处处不为零的 4 流.

关于处处不为零的 3 流,塔特有如下猜想:

每一个 4 边连通图有一个处处不为零的 3 流.

上面的(7) 说明 4 边连通图有处处不为零的 4 流,对平面图这个猜想是正确的:

(8) 每一个 4 边连通的平面图有处处不为零的 3 流.

(9) 3正则图有处处不为零的3流，当且仅当它是二部图.

(10) 图 G 有处处不为零的3流，当且仅当 G 有可定向3圈双覆盖.

(11) 具有 t 个奇次点的 k 边连通图 G，如果 $k \geq 4\lceil \log_2 t \rceil$，则 G 有处处不为零的3流.

10.4 处处不为零的 k 流($k \geq 5$)

塔特关于整数流的第一个猜想是，存在一个正整数 k，使得每一个无割边的图有一个处处不为零的 k 流. 佳格尔(Jaeger)等证明了

(1) 每一个无割边的图 G，有一个处处不为零的8流.

赛冒尔(Seymour)进一步证明了

(2) 每一个无割边的图 G，G 有处处不为零的6流.

(3) 每一个无割边的平面图有处处不为零的5流.

(4) 若图 G 无割边且有哈密顿链，则 G 有处处不为零的5流.

参考文献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications. New York: North Holland, 1981.
2 Lowell W B, Wilson R J. Selected topics in graph theory. London: Academic press, 1978.
3 Berge C. Graphs. New York: North-Holland, 1985.
4 刘振宏. 应用组合论. 北京:国防工业出版社, 1992.

·近代数学卷·

第4篇

拓扑学

编　者　张敦穆
审校者　徐森林

目　录

引　言

拓扑学是研究(广义的)几何图形及其在拓扑变换下不变性质的学科.它既是现代数学的基础之一,又是20世纪得到高度发展的现代数学分支之一,著名的菲尔兹(J.C.Fields)奖约三分之一是授予拓扑学及相关工作的.拓扑学不仅在数学的其他分支中有重要的作用,而且在物理、天文、力学、化学、分子生物学、经济乃至技术科学中有广泛而深入的应用,它在规范场理论、超弦理论、DNA 理论以及经济均衡理论中的应用就是几个突出的例子.

拓扑学按其研究对象和研究方法的特点又分成点集拓扑(又称一般拓扑)、代数拓扑、微分拓扑、PL(分片线性)拓扑、低维拓扑、流形拓扑等分支.

欧拉(L.Euler)和黎曼(B.Riemann)曾对某些拓扑问题作过早期研究.20世纪初,随着康托尔(G.Cantor)集合论的建立,由于研究函数空间等的需要,开始奠定点集拓扑的基础.从1895年开始,庞加莱(H.Poincaré)发表了6篇论文,奠定了代数拓扑、微分拓扑、PL 拓扑的基础.点集拓扑、代数拓扑在20世纪上半叶就得到了高度的发展,微分拓扑、PL 拓扑、低维拓扑、流形拓扑等在20世纪下半叶也蓬勃地展开.限于篇幅,这里只能介绍一些基本内容,有很多重要内容未涉及,篇后的参考文献,或可为希望深入了解的读者提供一些线索。

1　拓扑空间

1.1　拓扑空间和连续映射

1.1.1　拓扑空间的基本概念

定义1　设 X 是一个集合,$\mathscr{P}(X)$表 X 的幂集合,$\mathscr{T}\subset\mathscr{P}(X)$为 X 的一个子集族,若它满足:

1° X 和$\varnothing$属于 $\mathscr{T}$;

2° $\mathscr{T}$中任意个集合的并集属于 $\mathscr{T}$;

3° $\mathscr{T}$中有限个集合的交集属于 $\mathscr{T}$,

则称 $\mathscr{T}$为 X 上的一个拓扑,称$(X,\mathscr{T})$为**拓扑空间**,当 $\mathscr{T}$ 的含义清楚时,简记为 X,$\mathscr{T}$中的集合称为**开集**.

例1　设 X 是任意集合,$\mathscr{T}_T:=\{X,\varnothing\}$,则$(X,\mathscr{T}_T)$是拓扑空间,$\mathscr{T}_T$ 称为**平凡拓扑**.

例2　设 X 是任意集合,$\mathscr{T}_D:=\mathscr{P}(X)$,则$(X,\mathscr{T}_D)$是拓扑空间,$\mathscr{T}_D$ 称为**离散拓扑**.

例3　设(X,d)为度量空间(参看"泛函分析"篇),对任意$x\in X$及正数r,称$B(x,r):=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$为以$x$为中心、半径为$r$的球形邻域.设$U\subset X$,若对任意$x\in U$,存在$r>0$,使得$B(x,r)\subset U$,则称$U$为开集,所有这样的开集构成$X$的一个拓扑,称为由度量$d$决定的**度量拓扑**,记作$\mathscr{T}_d$.

定义2　设$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$为X上的两个拓扑,若$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$,则称拓扑$\mathscr{T}_1$比$\mathscr{T}_2$粗($\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$细),记为$\mathscr{T}_1<\mathscr{T}_2$($\mathscr{T}_2>\mathscr{T}_1$).显然$X$上的拓扑按关系$<$构成偏序.设$\mathscr{T}$为$X$上任一拓扑,则恒有$\mathscr{T}_T<\mathscr{T}<\mathscr{T}_D$.

定义3　设$(X,\mathscr{T})$为一拓扑空间,则有

1°设$F\subset X$,若$X\setminus F\in\mathscr{T}$,则称$F$为此拓扑空间的**闭集**.$(X,\mathscr{T})$的一切闭集的全体记作$\mathscr{F}$.

2°设$x\in X$,$N\subset X$,若存在$U\in\mathscr{T}$使得$x\in U\subset N$,则称N为x的**邻域**,x的邻域的全体称为x的**邻域系**,记作$\mathscr{N}(x)$,而$\mathscr{N}:=\bigcup\limits_{x\in X}\mathscr{N}(x)$称为$X$的邻域系.若$N\in\mathscr{N}(x)\cap\mathscr{T}$,则称为$x$的开邻域.

3°设$A\subset X$,X中一切包含A的闭集的交称为A的**闭包**,记作$\overline{A}$或$\mathrm{Cl}A$.

4°设$A\subset X$,则含于A中一切开集的并称为A的**内部**,记为$\mathring{A}$或$\mathrm{Int}A$.$\mathring{A}$中的点称为A的**内点**.

5°设$A\subset X$,则集合$\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$称为$A$的**边界**,记作$\mathrm{Bd}A$,$\mathrm{Bd}A$中的点称作$A$的**边界点**.

6°设$A\subset X$,$x\in X$,若对任意$N\in\mathscr{N}(x)$,有$N\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$,则称$x$为$A$的**聚点**,$A$的一切聚点的集合称为$A$的**导集**,记作$A'$.

7°设$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$,若任一$U\in\mathscr{T}$均可表为$\mathscr{B}$中若干成员的并,则称$\mathscr{B}$为拓扑$\mathscr{T}$的**基**.

8°设$\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$,若$\mathscr{S}$中有限多个成员交的全体构成$\mathscr{T}$的基,则称$\mathscr{S}$为拓扑$\mathscr{T}$的**亚基**①,称$\mathscr{T}$为由$\mathscr{S}$生成的拓扑.

命题1　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,则有如下性质:

1°X的全体闭集$\mathscr{F}$满足:

(C_1)　X和$\varnothing$属于$\mathscr{F}$;

(C_2)　任意多个闭集的交仍为闭集;

(C_3)　有限多个闭集的并仍为闭集.

2°任意点$x\in X$的邻域系$\mathscr{N}(x)$具有性质:

(N_1)　$\mathscr{N}(x)\neq\varnothing$,且对任意$N\in\mathscr{N}(x)$,必有$x\in N$;

(N_2)　设$N_1,N_2\in\mathscr{N}(x)$,则$N_1\cap N_2\in\mathscr{N}(x)$;

(N_3)　设$N\in\mathscr{N}(x)$,$N\subset U$,则$U\in\mathscr{N}(x)$;

(N_4)　对任意$N\in\mathscr{N}(x)$,存在$U\in\mathscr{N}(x)$,使得$U\subset N$,且对每一$y\in U$,恒有$U\in\mathscr{N}(y)$.

---

①　亚基也称作子基,但按惯例,子空间本身也是空间,子群本身也是群,但子基本身不一定是基,所以我们不用子基这一名称.

3° 设 $A\subset X$，则 $\mathring{A}$ 为含于 A 的最大开集，A 为开集的充要条件为：$A=\mathring{A}$.

4° 设 $A\subset X$，则 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小闭集，A 为闭集的充要条件为：$A=\overline{A}$.

5° $A\subset X$，$x\in X$，则 $x\in\overline{A}$ 的充要条件为：对任意 $N\in\mathscr{N}(x)$，有 $N\cap A\neq\varnothing$.

6° 设 A,B 为 X 的任意子集，则有

(K_1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(K_2) $A\subset\overline{A}$;

(K_3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(K_4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述(K_1) ~ (K_4)称为库拉托夫斯基(Kuratowski)闭包公理.

7° 设 $\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{B}$ 能成为 X 上某个拓扑的基的充要条件为

(A_1) $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$;

(A_2) 对任意 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$，交集 $B_1\cap B_2$ 能表为 $\mathscr{B}$ 中某些成员的并.

8° 设 $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(X)$，若满足 $X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}}S$，则 X 上存在唯一的拓扑 $\mathscr{T}$，以 $\mathscr{S}$ 为亚基.

定义 4 设 $\geqslant$ 是集合 D 上的一个关系，满足：

1° 对任意 $\alpha\in D$，有 $\alpha\geqslant\alpha$;

2° 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in D$，若 $\alpha\geqslant\beta$，$\beta\geqslant\gamma$，则有 $\alpha\geqslant\gamma$;

3° 对任意 $\alpha,\beta\in D$，存在 $\gamma\in D$，使得 $\gamma\geqslant\alpha$，$\gamma\geqslant\beta$，则称 $(D,\geqslant)$ 是一个**有向集**，$\geqslant$ 称为 D 上的一个**定向**.

定义 5 设 D 为一有向集，X 为一集合，$A\subset X$，映射 $N:D\to A$ 称为 A **中的网**，对 $\alpha\in N$，$x_\alpha:=N(\alpha)$，映射 N 记为 $\{x_\alpha\mid\alpha\in D\}$ 或 $\{x_\alpha\}$. 当 $D=Z_+$，且 $\geqslant$ 即为自然数的大小关系，则网即为通常的序列 $\{x_n\mid n\in Z_+\}$.

定义 6 设 $\{x_\alpha\mid\alpha\in D\}$ 为拓扑空间 X 中的网，$x\in X$. 若对 x 的任意邻域 U，存在 $\alpha\in D$，使得当 $\beta\in D$ 且 $\beta\geqslant\alpha$ 时，有 $x_\beta\in U$，则称网 $\{x_\alpha\}$ **收敛**于 x，记作 $\lim\limits_D x_\alpha=x$ 或 $x_\alpha\to x$.

命题 2 设 X 为拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$，则 $x\in\overline{A}$ 的充要条件为：在 A 中存在收敛于 x 的网.

定义 7 设 $(X,\mathscr{T}_X)$，$(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 为映射. 若对任意 $U\in\mathscr{T}_Y$，有 $f^{-1}(U)\in\mathscr{T}_X$，则称 f 为**连续**.

命题 3 设 X,Y 为拓扑空间，f 为从 X 到 Y 的函数，则下列断言等价：

1° f 为连续映射；

2° Y 中每一个闭集的原像为 X 中的闭集；

3° Y 的一个拓扑亚基的每一个成员的原像为 X 中的开集；

4° Y 的一个拓扑基的每一个成员的原像为 X 中的开集；

5° 对任一 $x\in X$，$f(x)$ 的一个邻域的原像为 x 的一个邻域；

6° 对任一 $x\in X$，以及 $f(x)$ 的每一邻域 V 有 x 的邻域 U，使得 $f(U)\subset V$;

7° 对 X 中每一个收敛于 $x\in X$ 的网 N(或 $\{x_\alpha\mid\alpha\in D\}$)，复合而成的 Y 中的网 $f\cdot N$(或 $\{f(x_\alpha)\mid\alpha\in D\}$)收敛于 $f(x)$;

8° 对任意$A\subset X$,有$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

9° 对任意$B\subset Y$,有$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

拓扑空间之间的连续映射常简称为映射.

定义 8 设X,Y为拓扑空间,如果$f(x)$的任一邻域关于f的逆为x的一个邻域,则称函数$f:X\to Y$在点$x\in X$处连续.

容易验证:f为连续映射的充要条件为f在X的每一点x处连续.

定义 9 设X,Y为拓扑空间,$f:X\to Y$为映射,若f及f^{-1}均为连续,则称f为**同胚映射**,简称**同胚**.若两个拓扑空间X和Y之间存在同胚映射,则称这二个拓扑空间是**同胚的**,也称X**同胚于**Y,记为$X\cong Y$.由于空间之间的同胚关系显然是一个等价关系,所以也称X**拓扑等价**于Y.若拓扑空间的某一种性质,对于拓扑等价的空间是保持不变的,则此性质称为(空间的)**拓扑不变量**.

拓扑学的目标粗略地说起来就是研究空间的拓扑不变量并以之为据对空间进行同胚分类.

1.1.2 拓扑空间和连续映射的构造

定义 10 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,对任意子集$Y\subset X$,令$\mathscr{T}_Y:=\{Y\cap U\mid U\in\mathscr{T}\}$,则$\mathscr{T}_Y$构成$Y$上的拓扑,$\mathscr{T}_Y$称为$\mathscr{T}$在$Y$上的**子空间拓扑**,也称为**相对拓扑**,$Y\cap U$称为相对开集.类似地,有相对邻域、相对闭集、相对闭包等等概念.凡是说到X的**子空间**Y,即指Y有拓扑$\mathscr{T}_Y$.

定义 11 设$\{(X_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$为一族拓扑空间,$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$表集族$\{X_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$的笛卡儿(Descartes)乘积,令$p_\mu:\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\to X_\mu$表第$\mu$个射影,$\mathscr{S}:=\{p_\lambda^{-1}(U_\lambda)\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\mid U_\lambda\in\mathscr{T}_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$,则由$\mathscr{S}$所生成的$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$上的拓扑$\mathscr{T}$称为**积拓扑**,$(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,\mathscr{T})$称为**积空间**,简记为$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$.

定义 12 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,$\sim$为X上一个等价关系,$X/_\sim$为对应的商集合,$\pi:X\to X/_\sim$表自然射影,则$\mathscr{T}_\sim:=\{U\subset X/_\sim\mid\pi^{-1}(U)\in\mathscr{T}\}$是$X/_\sim$上的一个拓扑,称为关于$\sim$的**商拓扑**,$(X/_\sim,\mathscr{T}_\sim)$称为**商空间**,简记为$X/_\sim$.

命题 4 (焊接引理) 设X为拓扑空间,$\{X_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$为$X$的一族子空间,若对任一$\lambda\in\Lambda$,$f_\lambda:X_\lambda\to Y$为连续映射,且对$\lambda,\mu\in\Lambda$,$x\in X_\lambda\cap X_\mu$,有$f_\lambda(x)=f_\mu(x)$,则$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$.定义$f:X\to Y$为:对任意$x\in X$,若$x\in X_\lambda$,则$f(x):=f_\lambda(x)$.当如下二条件之一满足时,$f$为连续映射:

1° 所有X_λ为X的开子集;

2° 所有X_λ为X的闭子集,且集族$\{X_\lambda\}$满足如下局部有限条件:对任意$x\in X$,存在邻域$U\in\mathscr{N}(x)$,使得指标集Λ中仅有有限个指标λ使得$U\cap X_\lambda\neq\varnothing$.

定义 13 设X,Y为拓扑空间,若X的任意开集(闭集)在f下的像是Y中的开集(闭集),则称函数$f:X\to Y$为开(闭)映射.

定义 14 设X,Y是拓扑空间,$f:X\to Y$是连续映射,若f将X同胚映成$f(X)$($f(X)$作为Y的子空间),则称f为**嵌入**,称X可嵌入到Y中.若等同X与$f(X)$,可将X看作Y的子空间.

命题 5 设$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$为拓扑空间族$\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$的积空间，则对每一$\mu\in\Lambda$，射影$p_\mu:\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\to X_\mu$为连续开满射．且积拓扑是使所有$p_\mu$连续的最粗的拓扑．

命题 6 设Y为拓扑空间，则映射$f:Y\to\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$为连续的充要条件为：对每一$\mu\in\Lambda$，$p_\mu f:Y\to X_\mu$连续．

命题 7 设$X/_\sim$为拓扑空间X关于等价关系$\sim$的商空间，则

1° 自然射影$\pi:X\to X/_\sim$为连续满射；

2° 商拓扑$\mathscr{T}$是使π为连续的最细拓扑；

3° 设Y为拓扑空间，则映射$f:X/_\sim\to Y$连续的充要条件为：$f\pi:X\to Y$连续．

1.2 可数性和分离性

可数性和分离性是加在有关拓扑空间的开集的数量和相对位置的二组公理，在空间具备了这类附加条件之后，就可以得到有关空间和映射的更多性质．

1.2.1 可数性

定义 15 设X为拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{N}(x)$为x处的邻域系，若$\mathscr{B}(x)\subset\mathscr{N}(x)$，使得对任意$N\in\mathscr{N}(x)$，存在$B\in\mathscr{B}(x)$，满足$B\subset N$，则称$\mathscr{B}(x)$为$x$的**局部基**．

定义 16 设X为拓扑空间，若对每一点$x\in X$，均存在x处的可数局部基，则称X满足**第一可数性公理**，简称$\mathbf{C_1}$**公理**；若对X存在一个可数基，则称X满足**第二可数性公理**，简称$\mathbf{C_2}$**公理**．

例 4 设(X,d)为度量空间，则X满足C_1公理，因对每一点$x\in X$，$\mathscr{B}(x):=\{\mathscr{B}(x,\frac{1}{x})\mid n\in\mathbf{Z}_+\}$即为$x$处的可数局部基．

例 5 欧氏空间$\mathbf{R}^n$满足C_2公理，因$\mathscr{B}:=\{\mathscr{B}(x,\frac{1}{m})\}\mid x\in\mathbf{Q}^n,m\in\mathbf{Z}_+\}$即为$\mathbf{R}^n$的可数基．

与可数性有关的还有如下概念．

定义 17 设X为拓扑空间，$D\subset X$，若$\overline{D}=X$，则称D是X的**稠密子集**．若空间X存在可数稠密子集，则称空间X是**可分的**．

定义 18 设X为拓扑空间，$A,B\subset X$，若$B\subset\overline{A}$，则称A在B中稠密．若$A=A'$，则称A为**完全集**．若$\mathrm{Int}\overline{A}=\varnothing$，则称$A$为**无处稠密集**．可数多个无处稠密集的并集称为**第一纲集**，否则称为**第二纲集**．

定义 19 若拓扑空间X中任意可数多个稠密开集的交仍为X的稠密子集，则X称为**贝尔(Baire)空间**．

例 6 在数直线R上，令

$$A_0=[0,1],\ A_n=A_{n-1}\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3k+1}{3^n},\frac{3k+2}{3^n}\right),$$

$$C=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n,$$

称 C 为康托尔集，它是一个不可数的无处稠密的完全集。这是在非线性动力系统中经常碰到的一个集合.

命题 8 设 X 为满足 C_1 公理的拓扑空间，则

1° 对任意 $x\in X$，存在 x 处的可数局部基 $\{V_n\}$，使得对一切 $n\in \mathbf{Z}_+$ 有 $V_{n+1}\subset V_n$；

2° $A\subset X$，$x\in X$，则 $x\in \overline{A}$ 的充要条件为：存在 A 中的序列，收敛于 x；

3° 设 Y 为拓扑空间，则映射 $f: X\to Y$ 在 x 处连续的充要条件为：对 X 中任意收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$，Y 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$.

这样，对于满足 C_1 公理的空间（特别包括了度量空间），关于极限与连续性问题，就可用序列收敛代替网收敛.

1.2.2 分离性

拓扑空间的分离公理有很多，这里只介绍一些主要的.

定义 20 设 X 为拓扑空间，下列公理称为**分离公理**：

T_0 公理 对 X 中任二不同点 x 与 y，存在 X 中开集 U，包含其中一点而不包含另一点；

T_1 公理 对 X 中任二不同点 x 与 y，存在开集 U 与 V，使得 $x\in U$，$y\bar{\in} U$ 且 $x\bar{\in} V$，$y\in V$；

T_2 公理 对 X 中任二不同点 x 与 y，存在不相交的开集 U 与 V，使得 $x\in U$，$y\in V$；

正则公理 对 X 中任意闭集 $A\subset X$，点 $x\bar{\in} A$，存在不相交的开集 U 与 V，使得 $x\in U$，$A\subset V$；

正规公理 对 X 中任二不相交的闭集 A 与 B，存在不相交的开集 U 与 V，使得 $A\subset U$，$B\subset V$；

T_3 公理 同时满足 T_1 公理与正则公理；

T_4 公理 同时满足 T_1 公理与正规公理.

满足 T_i 公理的空间称为 **T_i 空间**（$i=0,1,\cdots,4$），满足正则公理的空间称为**正则空间**，满足正规公理的空间称为**正规空间**，T_2 空间常称为**豪斯多夫（Hausdorff）空间**.

有一点需要说明，关于正则空间、正规空间、T_3 空间、T_4 空间的命名在拓扑文献中并未完全统一，有的文献将这里的正则空间与 T_3 空间的命名互换，将正规空间与 T_4 空间的命名互换，这里的命名是按照凯莱（J. L. Kelley）的经典著作：一般拓扑学.这样命名的一个好处是对任意整数 $i,j(0\leqslant i\leqslant j\leqslant 5)$，则 T_j 空间必为 T_i 空间.

命题 9 设 X 为拓扑空间，则

1° X 为 T_1 空间的充要条件是 X 的任意单点集必为闭集；

2° X 为 T_2 空间的充要条件是对角线集

$$\Delta:=\{(x,x)\in X\times X \mid x\in X\}$$

为 $X\times X$ 中的闭集；

3° X 为正则空间的充要条件是 $U\subset X$ 为任意开集、$x\in U$，则存在开集 V，使得 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$；

4° X 为正规空间的充要条件是对 X 的任意闭集 F、开集 U，且 $F\subset U$，则存在开集 V，使得 $F\subset V\subset\overline{V}\subset U$.

定理 1 (乌里松(Урысон)引理) 拓扑空间 X 为正规空间的充要条件为：对 X 的任意两个不相交的非空闭子集 A 与 B，存在连续映射 $f:X\to[a,b]$，使得 $f(A)=\{a\}$，$f(B)=\{b\}$.

定理 2 (梯茨(Tietze)扩张定理) 拓扑空间 X 为正规空间的充要条件为：设 $A\subset X$ 为闭集，$f:A\to[a,b]$(或 $f:A\to\mathbf{R}$)为连续映射，则存在 f 的扩张 $\tilde{f}:X\to[a,b]$(或 $\tilde{f}:X\to\mathbf{R}$)，即有连续映射 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}|_A=f$.

命题 10 1° T_2 空间的子空间是 T_2 空间，T_2 空间的积空间是 T_2 空间；

2° T_3 空间的子空间是 T_3 空间，T_3 空间的积空间是 T_3 空间；

3° T_4 空间的子空间不一定是 T_4 空间；T_4 空间的积空间不一定是 T_4 空间.

命题 11 每一个度量空间是 T_4 空间.

命题 12 每一个满足 C_2 公理的 T_3 空间是 T_4 空间.

1.3 连通和道路连通

1.3.1 连通空间和局部连通空间

定义 21 设 X 为拓扑空间，若 X 不能表示成两个不相交的非空开集的并，则 X 称为**连通空间**；否则称为不连通空间，此时，$X=U\cup V$，U，V 为非空开集，且 $U\cap V=\varnothing$，这样的一对开集 U、V 称为 X 的一个**分离**. 对子集 $A\subset X$，若子空间 A 连通，则称 A 为 X 的**连通子集**.

定义 22 设 X 为拓扑空间，$C\subset X$ 为连通子集，若 C 不是 X 的某连通子集的真子集，则称 C 是 X 的一个**连通分支**.

显然，连通分支是 X 的极大连通子集，X 的每一点含于 X 的一个唯一的连通分支内，X 的每一个连通子集含于 X 的一个唯一的连通分支内，X 的所有连通分支，构成 X 的一个分拆.

定义 23 设 X 为拓扑空间，$x\in X$，若对任意 $U\in\mathscr{N}(x)$，存在连通的 $V\in\mathscr{N}(x)$，使得 $V\subset U$，则称 X 在点 x 是**局部连通**的，若 X 的每一点是局部连通的，则称空间 X 为**局部连通空间**.

命题 13 设 X 为拓扑空间，则下列条件等价：

1° X 为连通空间；

2° X 不是两个不相交的非空闭集的并；

3° $\varnothing$ 与 X 是 X 的仅有的既开且闭的集；

4° 不存在连续满映射 $f:X\to\{a,b\}$，这里 $\{a,b\}$ 是由二不同点组成的离散空

间.

命题 14　设 X 为拓扑空间.

1° 设 $A \subset X$ 为连通子集，$A \subset B \subset \overline{A}$，则 B 是连通的，特别 $\overline{A}$ 是连通的；

2° 设 A 为 X 的连通子集，$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为 X 的连通子集族，若对任意 $\lambda \in \Lambda$，有 $A \cap A_\lambda \neq \varnothing$，则 $A \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ 为 X 的连通集；

3° 连通空间的连续像是连通的，特别连通空间的商空间是连通的；

4° 连通空间的积空间是连通的.

命题 15　设 X 为连通空间，$f: X \to \mathbf{R}$ 是连续映射，设 $a, b \in f(X)$，$a < b$，则对任意 $c \in (a, b)$，存在点 $x \in X$，使得 $f(x) = c$.

命题 16　拓扑空间 X 的连通分支是闭集，X 的闭子集的连通分支是 X 的闭集.

命题 17　拓扑空间 X 是局部连通的充要条件为：X 的任意开集的连通分支为 X 的开集.

例 7　欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 和单位球 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 都是连通和局部连通空间.

1.3.2　道路连通和局部道路连通空间

定义 24　设 X 为拓扑空间，连续映射 $\sigma: I \to X (I = [0,1] \subset \mathbf{R})$ 称为 X 中连接点 $x_0 = \sigma(0)$ 与 $x_1 = \sigma(1)$ 的道路，x_0、x_1 分别称为道路 σ 的起点与终点.

定义 25　设 X 为拓扑空间，若 X 的任意两点，均存在连接这两点的道路，则 X 称为**道路连通空间**. 若子集 $A \subset X$，且子空间 A 是道路连通的，则称 A 为 X 的道路连通子集.

定义 26　设 X 为拓扑空间，$C \subset X$ 为道路连通子集，且 C 不是 X 中任何道路连通子集的真子集，则 C 称为 X 的**道路(连通)分支**.

显然，道路分支是 X 的极大道路连通子集，X 的任意道路连通子集(特别是 X 的任一个点)必属于 X 的唯一的一个道路分支. X 的全体道路分支构成空间 X 的一个分拆.

定义 27　设 X 为拓扑空间，$x \in X$，若对任意 $U \in \mathscr{N}(x)$，存在道路连通的 $V \in \mathscr{N}(x)$，使得 $V \subset U$，则称 X 在点 x 是局部道路连通的. 若 X 对每一点是局部道路连通的，则 X 称为**局部道路连通空间**.

命题 18　1° 道路连通空间必为连通空间；

2° 道路连通空间的连续像为道路连通，特别道路连通空间的商空间必道路连通；

3° 道路连通空间的积空间为道路连通.

命题 19　拓扑空间 X 为局部道路连通的充要条件是：X 的任意开集的道路分支是 X 的开集.

命题 20　连通且局部道路连通的空间是道路连通的.

例 8　当且仅当 $\mathbf{R}^n$(或 S^n) 中的开集是道路连通的时，它是连通的.

例 9　令 $S := \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\right\} \subset \mathbf{R}^2$，则 $\overline{S} \subset \mathbf{R}^2$ 为

$$\overline{S} = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \subset \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$\overline{S}$ 称为拓扑学家的正弦曲线(也称为波兰正弦曲线或华沙正弦曲线),则 $\overline{S}$ 为连通但非道路连通的.

1.4 覆盖和紧性

1.4.1 覆盖

定义 28 设 X 为拓扑空间,$\mathscr{C}=\{C_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的子集族,$A\subset X$,若 $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda$,则称 $\mathscr{C}$ 为 A 的一个**覆盖**;当 Λ 为可数集时,$\mathscr{C}$ 称为可数覆盖;当 Λ 为有限集时,称 $\mathscr{C}$ 为有限覆盖;当 C_λ 均为开(闭)集时,$\mathscr{C}$ 称为开(闭)覆盖;当 $\mathscr{C}$ 对 A 的点满足局部有限条件时,$\mathscr{C}$ 称为 A 的局部有限覆盖;设 $\mathscr{C}'\subset\mathscr{C}$,且 $\mathscr{C}'$ 也覆盖 A,则称 $\mathscr{C}'$ 为 $\mathscr{C}$ 的子覆盖.

定义 29 设 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 为 X 的两个覆盖,若对每一 $V\in\mathscr{V}$,存在 $U\in\mathscr{U}$,使得 $V\subset U$,则称 $\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{U}$ 的**加细**,记为 $\mathscr{U}<\mathscr{V}$①.

关系 $<$ 显然构成 X 上一切覆盖的偏序(注意,对于偏序,我们只要求满足一个关系——传递关系).

定义 30 设 X 为拓扑空间,则有

1° 若 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖,则称 X 为**紧空间**;

2° 若 X 的任意开覆盖都有可数子覆盖,则称 X 为**林德勒夫(Lindelöf) 空间**;

3° 若 X 的任意可数开覆盖都有有限子覆盖,则称 X 为**可数紧空间**;

4° 若 X 中的任意序列都有收敛的子序列,则称 X 为**序列紧空间**;

5° 若 X 中任意无穷子集都有聚点,则称 X 为**聚点紧空间**;

6° 若 X 中任意开覆盖都有局部有限的开加细,则称 X 为**仿紧空间**②;

7° 设 $A\subset X$,若子空间 A 是紧的,则称 A 为 X 的**紧子集**.同样地,可以在 X 的子集 A 上定义上述关于紧性的其他概念;

8° 设 $x\in X$,若存在 x 的紧邻域,则称 X 在点 x 为局部紧,若 X 的每一点处均为局部紧,则称 X 为**局部紧空间**.

定义 31 设 $\mathscr{O}=\{C_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 为 X 的子集族,若 $\mathscr{O}$ 中任意有限个成员的交非空,则称 $\mathscr{O}$ 具有**有限交性质**.

命题 21 拓扑空间 X 为紧空间的充要条件为:对 X 的具有有限交条件的闭集族 $\{F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$,有 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$.

命题 22 1° 紧空间的闭集是紧集;

2° T_2 空间的紧集是闭集;

3° 紧集的连续像是紧集,特别紧空间的商空间是紧空间;

---

① 有的文献记为 $\mathscr{V}<\mathscr{U}$,我们这里采用一些经典著作的用法,例如:S. Lefschetz, Algebraic Topology; P. J. Hilton and S. Wylie, Homology Theory.

② 很多文献还要求仿紧空间必为 T_2 空间或正则空间.

4° 设X是紧空间,$f: X \to \mathbf{R}$是连续函数,则f有界,且在X上取到最大值和最小值;

5° 紧T_2空间是T_4空间;

6° 局部紧空间的闭集是局部紧的;

7° 紧T_2空间的开子集是局部紧的;

8° 设X为局部紧T_2空间,则对任意$U \in \mathscr{N}(x)$,存在紧的$V \in \mathscr{N}(x)$,使得$V \subset U$;

9° 局部紧T_2空间是T_3空间;

10° 仿紧空间的闭集是仿紧的;

11° 仿紧T_2空间是T_4空间;

12° 满足C_2公理的局部紧致T_2空间是仿紧的.

命题23 设X为度量空间,则下列条件等价:

1° X紧;

2° X序列紧;

3° X可数紧;

4° X聚点紧.

命题24 (勒贝格(Lebesgue)覆盖引理) 设X为紧度量空间,$\mathscr{O}$为X的开覆盖,则存在$\delta > 0$,使得对任意$x \in X$及$B(x,\delta)$,存在$C \in \mathscr{O}$,使得$B(x,\delta) \subset C$. 满足这样条件的正数δ称为覆盖$\mathscr{O}$的勒贝格数.

定义32 设(X,d),(Y,ρ)为度量空间,$f: X \to Y$为映射,若对任意$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得每当$x_1, x_2 \in X$且$d(x_1,x_2) < \delta$时,$P(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$,则称$f$为一致连续的.

命题25 从紧度量空间到度量空间的连续映射必为一致连续.

命题26 从紧空间X到T_2空间Y的连续满单映射必为同胚映射.

定理3 (吉洪诺夫(A.Кихонов)定理) 设$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$为一族拓扑空间,$X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$取积拓扑,则$X$为紧空间的充要条件为每一个空间$X_\lambda$均为紧空间.

定义33 设(X,d)为度量空间.

1° $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$是$X$中的序列,若对任意$\varepsilon > 0$,存在$N \in \mathbf{N}$,使得当$m,n \geq N$时,$d(x_m,x_n) < \varepsilon$,则称$\{x_n\}$为柯西(Cauchy)列. 若$X$的任意柯西序列都收敛,则称$X$为**完备度量空间**;

2° 若对任意$\varepsilon > 0$,X存在由ε球(即形如$B(x,\varepsilon)$的集合)构成的有限覆盖,则称X为**完全有界的**.

命题27 设(X,d)为度量空间,则X为紧空间的充要条件为X是完全有界的完备空间.

命题28 设$\mathbf{R}^n$为欧氏空间,则子空间$X \subset \mathbf{R}^n$为紧空间的充要条件为它是$\mathbf{R}^n$中的有界闭集.

定理4 (斯通(Stone)定理) 每一个度量空间是仿紧的.

定义34 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,则有

1° 若在X上存在度量d,使得由d决定的度量拓扑$\mathscr{T}_d$等于$\mathscr{T}$,则称$(X,\mathscr{T})$为

可度量化空间;

2°若对 X 的每一点 x,都存在 $U \in \mathscr{N}(x)$,使得在子空间拓扑之下,U 是可度量化的,则称 X 是**局部可度量化**的.

定理5 (乌里松度量化定理) 设 X 是满足 C_2 公理的 T_3 空间,则 X 是可度量化空间.

定理6 (斯米尔诺夫(Ю.Ц.Сшрнов)度量化定理) 当且仅当 X 是 T_2、仿紧、且可局部度量化空间时,空间 X 是可度量化的.

定义35 设 X 是拓扑空间,$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$,若 $\mathscr{F}$ 是可数个局部有限的子集族的并,则称 $\mathscr{F}$ 为 **σ-局部有限的**.

定理7 (长田润一-斯米尔诺夫度量化定理) 拓扑空间 X 为可度量化的充要条件为 X 是具有 σ-局部有限基的 T_4 空间.

命题29 若 X 是紧致 T_2 空间或是完备度量空间,则 X 是贝尔空间.

定义36 设 X 为拓扑空间,Y 为紧致 T_2 空间,若 $X \subset Y$,且 $\overline{X} = Y$,则 Y 称为 X 的**紧化**.若存在同胚映射 $h: Y_1 \to Y_2$,使得 $h|_X = id_X$,则 X 的两个紧化 Y_1, Y_2 称为等价的.

定义37 设$(X,\mathscr{T})$ 为局部紧致 T_2 空间,符号 ∞ 表一个不属于 X 的元素,$X^*: = X \cup \{\infty\}$,X^* 上的拓扑 $\mathscr{T}^*$ 定义为:$\mathscr{T}^*: = \mathscr{T} \cup \{X^* \setminus C \mid C$为$X$的紧子集$\}$,空间$(X^*, \mathscr{T}^*)$,称为$(X,\mathscr{T})$ 的**单点紧化**.

命题30 设 X 为局部紧而非紧的 T_2 空间,X^* 是 X 的单点紧化,则 X^* 为紧致 T_2 空间;X 是 Y 的子空间;$X^* \setminus X$ 为单点集;且 $\overline{X} = X^*$.

定义38 设 X 为集合,Y 为拓扑空间,用 Y^X 表一切映射$f: X \to Y$的集合.对点 $x \in X$ 及开集 $U \subset Y$,令 $S(x,U): = \{f \mid f \in Y^X$,且 $f(x) \in U\}$,则一切这样的集合 $S(x,U)$ 构成 Y^X 上的一个拓扑亚基,这个拓扑称为 Y^X 上的**点态收敛拓扑**(或**点开拓扑**),Y^X 成为函数空间.

定义39 设 X, Y 都是拓扑空间,用 $\mathscr{C}(X,Y)$ 表一切连续映射 $f: X \to Y$ 的集合.设 $C \subset X$ 为紧子集,$U \subset Y$ 为开子集,定义 $S(C,U): = \{f \mid f \in \mathscr{C}(X,Y)$,且 $f(C) \subset U\}$,则一切这样的集合 $S(C,U)$ 构成 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的一个拓扑亚基,$\mathscr{C}(X,Y)$ 上的这个拓扑称为**紧开拓扑**,$C(X,Y)$ 成为函数空间.

命题31 在点开拓扑之下,函数序列$\{f_n\} \subset Y^X$收敛于函数$f \in Y^X$的充要条件为:对每一 $x \in X$,Y 中的点列$f_n(x)$ 收敛于点 $f(x)$.

命题32 设 X 为局部紧致 T_2 空间,$\mathscr{C}(X,Y)$ 具紧开拓扑,则由 $e(x,f): = f(x)$ 定义的映射

$$e: X \times \mathscr{C}(X,Y) \to Y$$

是连续的,映射 e 称为**赋值映射**.

命题33 设 X 为局部紧致 T_2 空间,$\mathscr{C}(X,Y)$ 具有紧开拓扑,Z 为任意拓扑空间,则当且仅当诱导映射

$$\widehat{F}: Z \to \mathscr{C}(X,Y)$$

连续时,映射 $F: X \times Z \to Y$ 连续,其中$\widehat{F}$定义为$(\widehat{F}(z))(x): = F(x,z)$.

2　同伦与同调论

2.1　同　　伦

定义1　拓扑(空间)偶(X,A)是由拓扑空间X和子空间$A\subset X$组成,若$A=\varnothing$,我们不区别空间偶$(X,\varnothing)$与空间X.子偶$(X',A')\subset(X,A)$是满足$X'\subset X$和$A'\subset A$的偶.偶之间的映射$f:(X,A)\to(Y,B)$是连续映射$f:X\to Y$且满足$f(A)\subset B$.设X为拓扑空间,$x_0\in X$为一特定点,则偶(X,x_0)称为带有基点x_0的拓扑空间.一切拓扑空间偶和它们之间的映射构成一个范畴,一切带有基点的拓扑空间和它们之间的映射(注意,映射将基点变成基点)也组成一个范畴.

定义2　设(X,A)为偶,记$I=[0,1]$,且令$(X,A)\times I:=(X\times I,A\times I)$.设$X'\subset X$,且映射$f_0,f_1:(X,A)\to(Y,B)$在$X'$上重合,即$f_0|_{X'}=f_1|_{X'}$.如果存在映射$F:(X,A)\times I\to(Y,B)$使得$F(x,0)=f_0(x)$及$F(x,1)=f_1(x)$(对$x\in X$),并且$F(x,t)=f_0(x)=f_1(x)$(对$x\in X'$和$t\in I$),则称$f_0$相对于$X'$同伦于$f_1$,记为:$f_0\simeq f_1\ \mathrm{rel}X'$,这样的$F$称为从$f_0$到$f_1$的相对于$X'$的同伦,记为$F:f_0\simeq f_1\ \mathrm{rel}X'$或$f_0\overset{F}{\simeq}f_1\ \mathrm{rel}\ X'$.若$X'=\varnothing$,则略去"相对于$\varnothing$"这一短语.

对$t\in I$,由$h_t(x):=(x,t)$定义$h_t:(X,A)\to(X,A)\times I$.若$F:f_0\simeq f_1\ \mathrm{rel}\ X'$,则$Fh_0=f_0,Fh_1=f_1$,且$Fh_t|_{X'}=f_0|_{X'}$(对一切$t\in I$).所以$\{Fh_t\}_{t\in I}$是从$(X,A)$到$(Y,B)$的在$X'$上重合的映射的连续单参数族,它联接$f_0=Fh_0$到$f_1=Fh_1$.

注意,定义2适用于空间X及空间之间映射的范畴.类似地,对空间多元组$(X;A_1,A_2,\cdots,A_n)$($A_i\subset X$为子空间)及它们之间的连续映射,定义2的类似版本也是成立的.

例1　设X为任一拓扑空间,V为拓扑线性空间(特别是$V=\mathbf{R}^n$),$Y\subset V$为凸子集.设$f_0,f_1:X\to Y$是两个映射,它们在子空间$X'\subset X$上重合,则$f_0\simeq f_1\ \mathrm{rel}X'$.因为同伦$F:X\times I\to Y$,可定义为

$$F(x,t):=tf_1(x)+(1-t)f_0(x),$$

F常称为直线同伦.

命题1　令$\mathscr{O}_{X'}(X,A;Y,B)$表一切相对于$X'$的映射$f:(X,A)\to(Y,B)$的集合.对$f,g\in\mathscr{O}_{X'}(X,A;Y,B)$,则相对于$X'$同伦$f\simeq g\ \mathrm{rel}X'$是一个等价关系,以$[(X,A),(Y,B)]_{X'}:=\mathscr{O}(X,A;Y,B)/\simeq$表相应的等价类的集合,这些等价类称为**相对于$X'$的同伦类**.$f$所属的同伦类记为$[f]_{X'}$.若$X'=\varnothing$,则有关$X'$的标识部分均略去.

命题2　同伦的映射的复合是同伦的,即若$f_0\simeq f_1:(X,A)\to(Y,B)\ \mathrm{rel}X'$,$g_0\simeq g_1:(Y,B)\to(Z,C)\ \mathrm{rel}Y'$,且$f_1(X')\subset Y'$,则$g_0f_0\simeq g_1f_1:(X,A)\to(Z,C)\ \mathrm{rel}X'$.

由上述结果可知存在偶的同伦范畴,其对象为拓扑空间偶,其态映射为偶的映

射的同伦类(相对于 $\varnothing$).此范畴包括拓扑空间的同伦范畴和带基点的拓扑空间的同伦范畴为其子范畴.

定义 3 若存在映射 $g:(Y,B)\to(X,A)$,使得 $g\cdot f\simeq 1_{(X,A)}$,$f\cdot g\simeq 1_{(Y,B)}$,则映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 称为**同伦等价**.$1_{(X,A)}$ 表 (X,A) 上的恒等映射.映射 g 称为映射 f 的同伦逆,在同伦范畴中,$[g]=[f]^{-1}$.偶 (X,A) 与 (Y,B) 之间若存在同伦等价,则称偶 (X,A) 与 (Y,B) 具有**相同的伦型**,记为 $(X,A)\simeq(Y,B)$.这是空间偶之间的一种等价关系,(X,A) 的等价类记作 $[(X,A)]$.

定义 4 1° 若恒等映射 $1_X:X\to X$ 与常值映射 $C_{x_0}:X\to X$(任意 $x\mapsto x_0$,$x_0\in X$ 为一固定点)同伦:$1_X\overset{H}{\simeq}C_{x_0}$,则空间 X 称为**可缩的**,同伦 H 称为 X 到点 x_0 的一个收缩;

2° $A\subset X$,$1_A:A\to A$ 为恒等映射,若存在映射 $r:X\to A$,使得 $r|_A=1_A$,则称 r 为 X 到 A 的一个**保核收缩**,A 称为 X 的一个**收缩核**;

3° $A\subset X$,若存在映射 $r:X\to A$,使得 $r|_A\simeq 1_A$,则 A 称为 X 的**弱收缩核**,r 称为 X 到 A 的一个**弱保核收缩**;

4° $A\subset X$,$i:A\to X$ 为包含映射,若存在保核收缩 $r:X\to A$,使得 $1_X\overset{H}{\simeq}i\cdot r:X\to X$,则 A 称为 X 的**形变收缩核**,上述同伦 H 称为**形变收缩**;

5° 若上述 3° 中的 H 更满足 $H:1_X\simeq i\cdot r\ \mathrm{rel}A$,则 H 称为**强形变收缩**,A 称为 X 的强形变收缩核.

命题 3 1° 当且仅当 X 与单点空间同伦等价时,空间 X 是可缩的;

2° 任意两个可缩空间有相同的伦型,且可缩空间之间的任意映射为同伦等价;

3° 任意空间到可缩空间的任二映射同伦;

4° 若 X 可缩,则对任意点 $x\in X$,均为 X 的形变收缩核.

定理 1 (富克斯(M.Fuchs)定理) 拓扑空间 X 和 Y 同伦等价的充要条件为:存在拓扑空间 Z,使得 X 和 Y 分别同胚于 Z 的两个强形变收缩核.

定义 5 设 X,Y 是两个拓扑空间,$A\subset X$,$f:A\to Y$ 为映射,在拓扑和 $X+Y$ 中规定等价关系 ~,使得等价类为如下二种形式:(1)$X\setminus A$ 中单个点;(2)$\{y\}\cup f^{-1}(y)$(对任意 $y\in Y$).称商空间 $(X+Y)/\sim$ 为由 f 决定的**贴附空间**,记为 $Y\cup_f X$,f 称为**贴附映射**.

定义 6 设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$,由 $x\leftrightarrow(x,1)$ 等同 X 与 $X\times\{1\}$,$X\times\{1\}\subset X\times I$,在此等同下,$f$ 决定了一个映射 $X\times\{1\}\to Y$.则 $f:X\to Y$ 的**映射柱** M_f 定义为贴附空间 $Y\cup_f(X\times I)$.特别,若 Y 为单点空间 p,f 为常值映射 $c:X\to p$,则 $c:X\to p$ 的映射柱称为空间 X 上的锥,记作 CX.

命题 4 映射 $f:X\to Y$ 与常值映射同伦的充要条件是映射 f 可以扩张为 $\tilde{f}:CX\to Y$.

今后常称同伦于常值映射的映射为零伦的.

命题 5 设点 $p_0\in S^n$,$f:S^n\to Y$,则以下各条是等价的:

1° f 是零伦的;

2° f 可连续地扩张到 $D^{n+1}:=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\mid\|x\|\leqslant 1\}$;

3° f 是相对于 p_0 零伦的.

2.2 几类常用空间

2.2.1 单纯复形和多面体

定义 7 点组 $\{a_0,a_1,\cdots,a_p\}\subset\mathbf{R}^n$,若向量组 $\{a_1-a_0,a_2-a_0,\cdots,a_p-a_0\}$ 线性无关,则称点组 $\{a_0,a_1,\cdots,a_p\}$ 是**几何无关的**,或者称它处在**一般位置**.对此无关点组,点集 $\{x\in\mathbf{R}^n\mid x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i,\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=0}^{p}\lambda_i=1\}\subset\mathbf{R}^n$ 称为以 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 为顶点的 **p 维单形**,记为 $[a_0,a_1,\cdots,a_p]$,简记为 σ^p 或 σ,p 称为单形 σ 的维数,记为 $\dim\sigma$. 设 $\sigma^p=[a_0,a_1,\cdots,a_p]$,$\{i_0,i_1,\cdots,i_q\}\subset\{0,1,\cdots,p\}$,则点组 $\{a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q}\}$ 几何无关,q 维单形 $\sigma^q:=[a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q}]$ 称为 σ^p 的 q 维面,记为 $\sigma^q<\sigma^p$,当 $q<p$ 时,σ^q 称为 σ^p 的真面.

由 σ^p 的定义易知 $[a_0,a_1,\cdots,a_p]$ 是点组 $\{a_0,a_1,\cdots,a_p\}$ 的凸包.

定义 8 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中单形的有限集合,且满足:

1° 若 $\sigma\in K$,且 $\tau<\sigma$,则 $\tau\in K$;

2° 若 $\sigma_1,\sigma_2\in K$,则 $\sigma_1\cap\sigma_2$ 或为空集,或为 σ_1 与 σ_2 的公共面.

则称 K 为(有限)**单纯复形**,简称**复形**. $\dim K:=\max\limits_{\sigma\in K}\{\dim\sigma\}$ 称为复形 K 的维数. $L\subset K$,若 L 本身亦为复形,则称 L 为 K 的子复形.集合 $K^r:=\{\sigma\in K\mid\dim\sigma\leqslant r\}$ 构成 K 的一个子复形,称为 K 的 r 维(骨)架,0 维架 K^0 由 K 的所有 0 维单形组成,K^0 的元素称为 K 的顶点.

例 2 设 σ^p 为一 p 维单形,则 $\mathrm{Cl}\sigma^p:=\{\sigma\mid\sigma<\sigma^p\}$ 与 $\mathrm{Bd}\sigma^p:=\{\sigma\mid\sigma<\sigma^p,\sigma\neq\sigma^p\}$ 分别是 p 维与 $p-1$ 维复形,称为 σ^p 的**闭包复形**与**边缘复形**.

定义 9 1° 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的复形,集合 $\bigcup\limits_{\sigma\in K}\sigma\subset\mathbf{R}^n$ 取子空间拓扑,称为 K 的**多面体**,记为 $|K|$. K 称为 $|K|$ 的(单纯)剖分;

2° 设 X 为拓扑空间,若存在复形 K,以及同胚映射 $\varphi:|K|\to X$,则称 X 为**可剖分空间**,(K,φ) 或 K 称为 X 的一个剖分,记为 $X=(K,\varphi)$.

例 3 因 $S^2\cong|\mathrm{Bd}\sigma^3|$,故 S^2 是可剖分空间,$\mathrm{Bd}\sigma^3$ 是 S^2 的一个剖分. 同理 $\mathrm{Bd}\sigma^{n+1}$ 是 S^n 的一个剖分.

定义 10 1° 设 $\sigma^p=[a_0,a_1,\cdots,a_p]$ 是一个 p 维单形,$p>0$,σ^p 的顶点的两个排列 $a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_p}$ 与 $a_{j_0},a_{j_1},\cdots,a_{j_p}$ 若相差偶数个对换,则称为**等价的**,σ^p 顶点的全体排列按此等价关系分为两个等价类,一个等价类称为单形 σ^p 的一个定向,单形和它的一个定向合起来称为一个有向单形,以 $\langle a_0,a_1,\cdots,a_p\rangle$ 表由顶点排列 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 所决定的有向单形.有向单形仍记为 σ^p 或 σ.而与它有相反定向的有向单

形记为 $-\sigma^p$ 或 $-\sigma$. 例如 $-\langle a_0, a_1, \cdots, a_p\rangle$ 表由顶点排列 $a_1, a_0, \cdots, a_p$ 决定的有向单形,对零维单形 a,规定它对应两个有向单形 a 与 $-a$;

2° 设 K 为单纯复形,对 K 的每一个单形都指定一个定向,称为给复形 K 以定向,具有指定定向的有向单形称为正定向单形. 设 K 有 α_p 个 p 维单形,以 $S_p^+ := \{\sigma_i^p \mid i = 1, 2, \cdots, \alpha_p\}$ 表 K 的所有 p 维正定向单形, S_p^+ 称为 K 的一个 p 维基本组,以 $S_p := \{\sigma^p \mid \pm \sigma^p \in S_p^+\}$ 表示 K 的所有 p 维有向单形.

定义 11　设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_N\}$ 是非空有限集, $\mathscr{K}$ 是 A 的某些非空子集所成的族,并且满足:

1° 对 $i = 0, 1, \cdots, N$, $\{a_i\} \in \mathscr{K}$;

2° 若 σ, τ 是 A 的非空子集, $\sigma \in \mathscr{K}$, $\tau \subset \sigma$, 则 $\tau \in \mathscr{K}$,

则称 $\mathscr{K}$ 为**抽象(单纯)复形**, A 中的元素称为顶点, $\sigma \in \mathscr{K}$ 称为(抽象)单形, 当 σ 中有 $p+1$ 个元素时,称 σ 是 p 维的,记 $p = \dim\sigma$, $\mathscr{K}$ 的维数 $\dim\mathscr{K} := \max\limits_{\sigma\in\mathscr{K}}\{\dim\sigma\}$.

有时为了区别起见,也称以前所定义的单纯复形为几何单纯复形.

设 K 为单纯复形, K^0 为其顶点集,令

$$\mathscr{K}_K := \{\{a_0, a_1, \cdots, a_p\} \subset K^0 \mid [a_0, a_1, \cdots, a_p] \in K\},$$

则 $\mathscr{K}_K$ 是以 K^0 为顶点集的抽象复形.

设 $\mathscr{K}$ 为抽象复形,以 A 为顶点集, K 为几何单纯复形. 若存在双射 $\varphi: A \to K^0$, 当且仅当 $[\varphi(a_0), \varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_p)] \in K$ 时,使得 $\{a_0, a_1, \cdots, a_p\} \in \mathscr{K}$, 则称 K 为 $\mathscr{K}$ 的**几何实现**.

定理 2　任意 n 维抽象复形都在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中存在它的几何实现.

2.2.2　CW 复形

定义 12　一个拓扑空间若同胚于 m 维单位球体 $D^m := \{x \in \mathbf{R}^m \mid \|x\| \leqslant 1\}$, 则称为 m 维胞腔. 一个拓扑空间若同胚于 $\mathrm{Int}\,D^m$, 则称为 m 维开胞腔. 上述两种情形 m 称为胞腔(开胞腔)的维数.

定义 13　设拓扑空间 X 是一族开胞腔的无交并 $X = \coprod\{e \mid e \in E\}$, 对每一 $k \geqslant 0$, X 的 k 维(骨)架 X^k 定义为 $X^k := \bigcup\{e \in E \mid \dim e \leqslant k\}$, 事实上, $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \cdots$ 且 $X = \bigcup_{k\geqslant 0} X^k$.

定义 14　一个 CW 复形是一个有序三元组 (X, E, Φ). 其中 X 是一个 T_2 空间, E 是 X 中一族开胞腔, $\Phi = \{\varphi_e \mid e \in E\}$ 是一族映射,满足条件:

1° $X = \coprod\{e \mid e \in E\}$(无交并);

2° 对每一个 k 维开胞腔 $e \in E$, 映射 $\varphi_e: (D^k, S^{k-1}) \to (X^{k-1} \cup e, X^{k-1})$ 为相对同胚, 即 $\varphi_e \mid \mathrm{Int}D^k: \mathrm{Int}D^k \xrightarrow{\cong} e$;

3° 对每一 $e \in E$, e 在 X 中的闭包 $\bar{e}$ 含于 E 的有限个开胞腔的并中;

4° 当且仅当对每一 $e \in E$, $A \cap \bar{e}$ 为 $\bar{e}$ 中的闭集时, X 有由 $\{\bar{e} \mid e \in E\}$ 决定的弱拓扑,亦即子集 $A \subset X$ 为闭集.

设 (X, E, Φ) 为 CW 复形, X 称为 CW 空间, (E, Φ) 称为 X 的 CW 分解, $\varphi_e \in \Phi$

称为 e 的**特征映射**，$\varphi_e \mid S^{k-1}$ 称为 e 的**贴附映射**. 通常就用 X 表示 CW 复形. 上述定义中的 1° 表明 E 是 X 的一个分拆；2° 表示 k 维开胞腔 e 是通过贴附映射 $\varphi_e \mid S^{k-1}$ 贴附到 X^{k-1} 上；从定义可以推出 $\bar{e} \setminus e$ 含于 E 的有限个开胞腔之并内，且这些开胞腔的维数均小于 $\dim e$；3° 称为闭包有限条件；4° 称为弱拓扑条件，字母 CW 即从闭包有限与弱拓扑而来.

定义 15　若 E 是有限集，则称 CW 复形 (X, E, Φ) 为有限的.

对一个有限 CW 复形而言，CW 复形定义中的条件 3°，4° 是自动满足的，有限 CW 复形常称为有限胞腔复形.

定义 16　令 (X, E, Φ) 是 CW 复形，设 $E' \subset E$，令 $|E'| := \bigcup \{e \mid e \in E'\} \subset X$，$\Phi' := \{\varphi_e \mid e \in E'\}$，若对任一 $e \in E'$ 有 $\mathrm{Im}(\varphi_e) \subset |E'|$，则 $(|E'|, E', \Phi')$ 称为 CW 子复形.

在上述定义中，记 $X' := |E'|$，则 (X', E', Φ') 本身也是一个 CW 复形，且对一切 $k \geqslant 0$，$(X')^k = X' \cap X^k$.

命题 6　设 (X, E, Φ) 为 CW 复形，则

1° 它的 CW 子复形的任意交与并仍为 CW 子复形；

2° 任意 $e \in E$，$\bar{e}$ 含于一有限 CW 子复形中；

3° 每一 k 维架 X^k 闭于 X；

4° 当且仅当 X 是道路连通的时，X 是连通的.

例 4　设 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$，令 $p = (0, \cdots, 0, 1) \in S^n$，定义 $\Phi: (D^n, S^{n-1}) \to (S^n, p)$ 为 $x \mapsto (2\sqrt{1 - \|x\|^2}\, x, 2\|x\|^2 - 1)$，记 $E = \{e^0, e^n\}$，则 $S^n = e^0 \cup e^n$. 即 S^n 可看作是由 0 维开胞腔 e^0 与 n 维开胞腔 e^n 所构成的有限胞腔复形.

命题 7　设 (X, E, Φ) 为 CW 复形，则

1° X 是局部道路连通空间；

2° X 是正现空间.

2.2.3　流形

流形是数学及其应用中极为重要的一类几何对象，它有很多类别，我们依次界定它.

定义 17　设 M 是一个 T_2 空间，

1° 若对每一点 $p \in M$，存在 p 的开邻域 U，以及同胚 $\varphi: U \to \varphi(U)$，$\varphi(U) \subset \mathbf{R}^m$ 为开集，则称 M 为 **m 维拓扑流形或 C^0 流形**；

2° 若对每一点 $p \in M$，存在 p 的开邻域 U，以及同胚 $\varphi: U \to \varphi(U)$，$\varphi(U) \subset H^m$ 为开集，其中 $H^m := \{x \in \mathbf{R}^m \mid x = (x^1, x^2, \cdots, x^m), x^m \geqslant 0\}$ 为半空间，则称 M 为 **m 维拓扑带边流形或 C^0 带边流形**. M 中一切满足如下条件的点 p：$\varphi(p) \in \mathrm{Bd}H^m := \{x \in \mathbf{R}^m \mid x = (x^1, x^2, \cdots, x^m), x^m = 0\}$，构成 M 的一个子集合，记为 ∂M，称为 **M 的边缘**.

(φ, U) 称为**局部坐标系或图卡**，U 称为**局部坐标邻域**，φ 称为**局部坐标映射**. $x^i(p) := (\varphi(p))^i$ 是点 $\varphi(p)$ 的 i 分量 $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 为 $p \in U$ 的**局部坐标**，简记为

$\{x^i\}$,有时它也称为局部坐标系.若 $p\in U$,则(φ,U)称为 p 的局部坐标系或 p 的图卡.以 $\mathscr{D}^0$记 M 上一切可能的图卡(φ,U)的集合,则 $\mathscr{D}^0$称为**图册**.

以后凡涉及两个欧氏空间(或半空间)的开集之间的映射,若称它属 C^0类,则指它是连续映射,若称它属 C^r类($r\in\mathbf{N}$),则指它直到 r 阶为连续可微,若称它属于 C^∞类,则指它是任意阶连续可微的,若称它属于 C^ω类,则指它是实解析的.

定义 18 设$(M,\mathscr{D}^0)$为 m 维拓扑流形,$\mathscr{D}:=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$满足:

1° $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$;

2° 相容性:若$(\varphi_\alpha,U_\alpha)$,$(\varphi_\beta,U_\beta)\in\mathscr{D}$,且 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,则 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$属于 C^r类,$r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$,同样也要求 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$属于 C^r类,称$(\varphi_\alpha,U_\alpha)$与$(\varphi_\beta,U_\beta)$是 C^r相容的;

3° 最大性:$\mathscr{D}$关于 2° 是最大的,即任意$(\varphi,U)\in\mathscr{D}^0$,若$(\varphi,U)$与 $\mathscr{D}$ 的任意元$(\varphi_\alpha,U_\alpha)$为 C^r相容,则$(\varphi,U)\in\mathscr{D}$.$\mathscr{D}$称为 M 上的C^r微分构造或C^r构造,$(M,\mathscr{D})$称为 M 上的 **C^r(微分)流形**.C^∞流形也称为**光滑流形**.C^ω流形也称为**实解析流形**.

注意,若在上面定义中将 $\varphi(U)\subset\mathbf{R}^m$ 为开集,换成 $\varphi(U)\subset\mathbf{C}^m$ 为开集,而将相容性条件中 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$($\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$)属于 C^r类换成$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$($\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$)为全纯映射,则$(M,\mathscr{D})$称为 m 维**复(解析)流形**.

在实际构造 C^r流形时,要找出 M 上满足最大性条件的微分构造 $\mathscr{D}$ 是困难的.但如同可用空间的拓扑基来界定空间的拓扑结构一样,有下述结果可用.

命题 8 设 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}^0$满足定义 18 中的 1°与 2°,则它唯一确定了一个 M 上的微分构造 $\mathscr{D}:=\{(\varphi,U)\in\mathscr{D}^0\mid(\varphi,U)$与 $\mathscr{D}'$ 的任一元 C^r相容$\}$.

所以为了要在 M 上界定一个 C^r构造,只需界定一个满足定义 18 中条件 1°与 2°的 $\mathscr{D}'$ 就足够了.

为了能方便地证明流形的一些较深刻的结果,很多文献还要求 M 满足 C_2 公理,以后如果没有特别申明,我们也假定 M 满足这个拓扑条件.

以下常讨论 C^r类的对象 $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$,规定其大小顺序为:$0<1<2<\cdots<\infty<\omega$.

定义 19 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^r流形($r\geqslant0$),$f:M\to N$ 为连续映射.$p\in M$,分别取 p 和 $f(p)=q$ 的图卡(φ,U)和(ψ,V).不妨设 $f(U)\subset V$.作映射 $\tilde{f}:=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi:\varphi(U)\to\psi(V)$,$\tilde{f}$ 称为 f 在 p 点的局部表示.对 $0\leqslant k\leqslant r$,若$\tilde{f}$ 属于 C^k 类,则称 f 在 p 邻近是 C^k 类的(由流形定义中的相容性条件推知,f 在 p 邻近属于 C^k 类与 f 的图卡的选择无关),若 f 在 M 的每一点 p 的邻近都属于 C^k 类,则称 f 为 C^k 映射(C^∞映射又称为光滑映射,C^ω 映射又称**实解析映射**).若 f 为双射,且 f 与 f^{-1}均为 C^k 映射,则 f 称为 C^k 同胚,当 $k\geqslant1$ 时,f 也称为**微分同胚**,C^∞同胚称为光滑同胚,C^ω 同胚称为实解析同胚.若 f 是从开集 $U\subset M$ 到开集 $f(U)\subset N$ 的 C^k同胚,则 f 称为局部 C^k 同胚.

定义 20 设 M 和 N 分别为 m 维与 n 维 C^r 流形($r \geqslant 1$),$f: M \to N$ 为 C^k 映射($1 \leqslant k \leqslant r$). $p \in M$,$f(p) \in N$,它们的图卡分别为(φ, U),(ψ, V),不妨设 $f(U) \subset V$,$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$为局部表示,定义 f 在 p 点的秩为:$\mathrm{rank}_p f := \mathrm{rank}(D\tilde{f})_{\varphi(p)}$(注意 $\mathrm{rank}_p f$ 与它的局部表示无关,所以秩是定义妥贴的),显然 $\mathrm{rank}_p f \leqslant \min\{m, n\}$. 当 $m = n$,且 $\mathrm{rank}_p f = m$,则称 f 在 p 邻近局部 C^k 同胚,若 f 为双射,且 f 对任意点邻近为局部 C^k 同胚,则 f 为 C^k(微分)同胚;若 $m \leqslant n$,且 $\mathrm{rank}_p f = m$,则称 f 在 p 点为**浸入**,若 f 在 M 上处处为浸入,则称 f 为浸入映射,若 f 还是单射,则称 f 为单浸入映射;若 $m \geqslant n$,$\mathrm{rank}_p f = n$,则称 f 在 p 点为**淹没**,若 f 在 M 上处处为淹没,则称 f 为淹没映射.

定义 21 设 M,N 分别为 m 维、n 维 C^r 流形($r \geqslant 1$),$f: M \to N$ 为 C^r 映射,则

1° 若 f 为单浸入,则 $f: M \rightarrowtail f(M) \subset N$,通过 f 可以将 M 的拓扑与微分结构转移到 $f(M)$ 上,则 M 与 $f(M)$ 为微分同胚(但注意一般 $f(M)$ 的这一拓扑并不是 $f(M) \subset N$ 的子空间拓扑),$f(M)$ 称为 N 的**浸入子流形**;

2° 若 f 为单浸入,且使得 M 与 $f(M)$ 为同胚(这时 $f(M)$ 取 N 的子空间拓扑),则称 f 为嵌入,$f(M)$ 称为 N 的**嵌入子流形**;

3° 设 N 为 n 维 C^r 流形($r \geqslant 1$),子集 $M \subset N$,若对每一点 $p \in M$,存在流形 N 的图卡(ψ, V),使得 $p \in V$,且 $\psi(M \cap V) = \psi(V) \cap \{\mathbf{R}^m \times 0^{n-m}\}$,则称 M 为 N 的 m 维**(正则)子流形**,上述图卡(ψ, V)称为关于子流形 M 正则的图卡. 若令 $U := M \cap V$,$\varphi := \psi|_U$,则$\{(\varphi, U)\}$构成 M 的图册,此图册使得 M 本身构成 m 维 C^r 流形.

命题 9 设 M 为 m 维 C^r 带边流形,则 ∂M 为 $m-1$ 维无边 C^r 流形.

定义 22 设$(M, \mathscr{D}_M)$、$(N, \mathscr{D}_N)$分别为 m 维、n 维 C^r 流形,其中 $\mathscr{D}_M = \{(\varphi, U)\}$,$\mathscr{D}_N = \{(\psi, V)\}$,给 $M \times N$ 以积拓扑,且令 $\mathscr{D}_{M \times N} := \{(\varphi \times \psi, U \times V) \mid (\varphi, U) \in \mathscr{D}_M, (\psi, V) \in \mathscr{D}_N\}$,则$(M \times N, \mathscr{D}_{M \times N})$为 $m+n$ 维 C^r 流形,称为**积流形**.

定义 23 设 M 是一个 C^r 流形($r \geqslant 0$),$\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$是 M 的一个开覆盖,一个从属于 $\mathscr{U}$ 的 **C^r 单位分解**是一族 C^r 映射 $\lambda_i: M \to [0,1]$,$i \in \Lambda$,使得:

1° $\mathrm{Supp}\lambda_i \subset U_i$ ($i \in \Lambda$);

2° $\{\mathrm{Supp}\lambda_i\}_{i \in \Lambda}$是局部有限的;

3° 对任意 $x \in M$,$\sum\limits_{i \in \Lambda} \lambda_i(x) = 1$.

定理 3 设 M 为 C^r 流形($r \geqslant 0$),则对 M 的任一开覆盖均有从属于它的 C^r 单位分解.

定理 4 (惠特尼(Whitney)嵌入定理) 每一 C^r n 维流形($r \geqslant 1$)均 C^r 微分同胚于 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的一个闭子流形.

2.2.4 纤维丛,复叠空间

定义 24 一个纤维丛是一个六元组 $\xi = \{E, M, \pi, G, F, \mathscr{B}\}$,$E$,$M$ 和 F 为 C^r

流形($r\geq 0$),G 为 C^r群,它 C^r有效作用在 F 上,$\pi:E\to M$ 为 C^r映射,且满足局部平凡条件:存在 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$和 C^r同胚族$\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$,使得对 $\alpha\in\Gamma$,有图 2-1 所示交换图.

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_\alpha}:=\pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & U_\alpha\times F \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow_{\pi_{1\alpha}} & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

图 2-1

其中 $\pi_{1\alpha}(p,a)=p$,显然,$\psi_{\alpha p}:=\psi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)}=\psi_\alpha|_{E_p}:E_p=\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times F$ 为 C^r同胚.若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,则有 C^r同胚 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$及图 2-2 所示交换图.

$$\begin{array}{ccc} (U_\alpha\cap U_\beta)\times F & \xrightarrow{\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}} & (U_\alpha\cap U_\beta)\times F \\ & \searrow^{\pi_{1\alpha}} \quad \swarrow_{\pi_{1\beta}} & \\ & U_\alpha\cap U_\beta & \end{array}$$

图 2-2

记 $\psi_\beta\cdot\psi_\alpha^{-1}(p,a)=(p,g_{\beta\alpha}(p)a)$,则 $g_{\beta\alpha}(p):F\to F$ 为 C^r同胚,且从$(\psi_\alpha,\pi^{-1}(U_\alpha))$到$(\psi_\beta,\pi^{-1}(U_\beta))$的转换映射 $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 为 C^r映射.上述$(\psi_\alpha,\pi^{-1}(U_\alpha))$与$(\psi_\beta,\pi^{-1}(U_\beta))$称为 C^r相容的.这样的偶$(\psi_\alpha,\pi^{-1}(U_\alpha))$称为**局部平凡系**,$\psi_\alpha$ 称为**局部平凡映射**,U_α 称为**局部平凡邻域**.一切与$\{(\psi_\alpha,\pi^{-1}(U_\alpha))\}_{\alpha\in\Gamma}$$C^r$相容的局部平凡系$(\psi,\pi^{-1}(U))$构成一个 C^r相容的最大局部平凡系族,记作 $\mathscr{B}$.$\mathscr{B}$称为**丛图册**,$\mathscr{B}$中的元称为丛图卡,E 称为**丛(全)空间**,M 称为**底空间**,π 称为**投射**.F 称为**典型纤维**,$E_p=\pi^{-1}(p)$称为 p 上的纤维,G 称为**构造群**.有时也简称 E 为纤维丛.

若将上述定义中的 C^r对象分别改为拓扑空间、拓扑群、连续有效作用、连续映射、同胚,则 ξ 或 E 称为**拓扑纤维丛**.

例 5 设 ξ 为 C^r纤维丛,若存在丛图卡$(\psi,E)\in\mathscr{B}$,即存在 C^r同胚 ψ,使得图 2-3 可交换

$$\begin{array}{ccc} E=\pi^{-1}(M) & \xrightarrow{\psi} & M\times F \\ & \searrow^{\pi} \quad \swarrow_{\pi_1} & \\ & M & \end{array}$$

图 2-3

则 ξ 称为平凡丛.由此可知一般纤维丛可以认为是由局部平凡丛通过转换映射粘合起来的.

定义 25 在定义24中,设 $F=\mathbf{R}^n$,$G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$(或以 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的 C^r正则李子群作为 G).且 $\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbf{R}^n$ 为 C^r同胚,$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$为 C^r映

射，以及 $\psi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)}:\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times\mathbf{R}^n$ 和 $g_{\beta\alpha}(p):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为线性同构，则纤维丛 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{B}\}$ 称为秩 n 的 C^r **实向量丛**. 类似地，可以定义秩 n **复向量丛**.

例6　与例5类似，若对 C^r 向量丛 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{B}\}$，存在丛图卡 $(\psi,E)\in\mathscr{B}$，使得 $\psi:E\to M\times\mathbf{R}^n$ 为 C^r 同胚，$\psi|_{\pi^{-1}(p)}:\pi^{-1}(p)\to\{p\}\times\mathbf{R}^n$ 为线性同构，则称 ξ 为**平凡向量丛**.

定义26　设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为一 C^r 纤维丛 $(r\geqslant0)$，若对 $0\leqslant k\leqslant r$，存在 C^k 映射 $\sigma:M\to E$，使得 $\pi\circ\sigma=id_M$，则称 σ 为 ξ 的一个 C^k **截面**，ξ 上一切 C^k 截面之集记为 $C^k(\xi)$ 或 $\Gamma^k(E)$. 当 ξ 为向量丛时，$\Gamma^k(E)$ 是一个 $C^k(M)$ 模，这里 $C^k(M)$ 表 M 上一切 C^k 函数构成的环.

定义27　设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$，$\xi'=\{E',M',\pi',G,F,\mathscr{B}'\}$ 为有相同构造群 G 和纤维 F 的两个 C^r 纤维丛. 若有 C^r 映射 $\tilde{f}:E\to E'$，$f:M\to M'$，使得 $\pi'\circ\tilde{f}=f\circ\pi$（即对任意 $p\in M$，记 $p'=f(p)$，则 $\tilde{f}$ 将 E_p 映到 $E'_{p'}$，故 $\tilde{f}$ 是保纤维的），称映射 $\tilde{f}$ 覆盖了映射 f，并且设 (ψ_α,U_α) 为 p 上的局部平凡系，(ψ'_γ,U'_γ) 为 p' 上的局部平凡系，则映射

$$\tilde{f}_{\gamma\alpha}(p):F\cong\{p\}\times F\xrightarrow{\psi_{\alpha p}^{-1}}E_p\xrightarrow{\tilde{f}|_{E_p}}E'_{p'}\xrightarrow{\psi'_{\gamma p'}}\{p'\}\times F\cong F$$

在 G 中，且映射

$$U_\alpha\cap f^{-1}(U'_\gamma)\to G,\quad p\mapsto\tilde{f}_{\gamma\alpha}(p)$$

为 C^r 映射，则称 $(\tilde{f},f):\xi\to\xi'$ 为 C^r **丛映射**. 若还存在 C^r 丛映射 $(\tilde{g},g):\xi'\to\xi$，使得 $\tilde{g}\circ\tilde{f}=\mathrm{id}_E$，$\tilde{f}\circ\tilde{g}=\mathrm{id}_{E'}$，$g\circ f=\mathrm{id}_M$，$f\circ g=\mathrm{id}_{M'}$，则称 $(\tilde{f},f):\xi\to\xi'$ 为 C^r **丛等价**. 特别，若 $M=M'$，$f=\mathrm{id}_M$，则丛等价 $(\tilde{f},\mathrm{id}_M):\xi\to\xi'$ 称为**丛同构**.

定义28　设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为一 C^r 纤维丛，N 为 C^r 流形（$r=0$ 时为拓扑空间），$f:N\to M$ 为 C^r 映射. 定义一个新纤维丛 $f^*\xi$，称为 f 的**诱导丛**（亦称**拉回丛**）如下：$f^*E:=\{(p,e)\in N\times E\mid f(p)=\pi(e)\}\subset N\times E$，投射 $\pi^*:f^*E\to N$ 为 $\pi^*(p,e)=p$，p 上的纤维 $\pi^{*-1}(p)=\{(p,e)\mid e\in\pi^{-1}(f(p))\}=\{p\}\times\pi^{-1}(f(p))\cong\pi^{-1}(f(p))\cong F$，令 $\mathscr{B}^{*\prime}:=\{(\psi'_\alpha,\pi^{*-1}(f^{-1}(U_\alpha)))\mid(\psi_\alpha,U_\alpha)\in\mathscr{B}\}$，其中 $\psi_\alpha'|_p:(f^*E)_p\to\{p\}\times F$ 由 $\psi_\alpha|_{f(p)}:E_{f(p)}\to\{f(p)\}\times F$ 确定，由于 $g'_{\beta\alpha}(p)a=g_{\beta\alpha}(f(p))a$，故 $g'_{\beta\alpha}(p)=g_{\beta\alpha}(f(p))\in G$，$f^*E\subset N\times E$ 上的拓扑与流形构造可由 N，E 上的构造转移过来，$\mathscr{B}^{*\prime}$ 在 f^*E 上唯一决定了一个丛图册 $\mathscr{B}^*$，则 $f^*\xi:=\{f^*E,N,\pi^*,G,F,\mathscr{B}^*\}$.

例7　设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为一 C^r 纤维丛，$N\subset M$ 为 C^r 正则子流形（$r=0$ 时为拓扑子空间），f 为包含映射 $i:N\to M$，则诱导丛 $i^*\xi$ 称为 ξ 在 N 上的**限制丛**，

也记为 ξ_N 或 $E|_N$.

定义 29 设 P 与 M 均为 C^r 流形，C^r 群 G 自由地右作用在 P 上，若 $p_1,p_2\in P$，存在 $g\in G$，使得 $p_2=p_1\cdot g$，则记为 $p_1\sim p_2$，$\sim$ 是 P 上的一个等价关系，设 $M=P/\sim$，$\pi:P\to M$ 为 $p\mapsto[p]$，且 π 为 C^r 映射，P 是局部平凡的，即 M 上有开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$，及 C^r 同胚：$\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$，使得 $\psi_\alpha(p)=(\pi(p),\varphi_\alpha(p))$，其中 $\pi(p)\in U_\alpha$，$\varphi_\alpha(p)\in G$，并满足：$\psi_\alpha(p\cdot g)=(\pi(p),\varphi_\alpha(p)\cdot g)$ 对每一点 $p\in\pi^{-1}(U_\alpha)$ 及任一 $g\in G$ 成立. 这样的纤维丛称为**主 G- 丛**、或简称主丛，记作 $P(M,G)$.

主丛是规范场物理的一个常用的几何构架.

定义 30 设 E 是道路连通空间，B 是连通且局部道路连通空间，$p:E\to B$ 是连续映射，若对任意 $b\in B$，存在开邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是 E 的两两不相交的开集 $\{V_\alpha\}$ 的并，并且 $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ 为同胚，则称 $p:E\to B$ 为复叠映射，(E,p) 称为 B 的**复叠空间**，B 称为底空间，U 称为 b 的基本邻域，$p^{-1}(b)$ 称为 b 上的纤维，可以证明 $p^{-1}(b)$ 与 b 的选择无关，它称为复叠空间的叶数.

事实上，复叠空间是一个有离散纤维的纤维丛.

2.2.5 H 空间与上 H 空间

一个带有基点的空间也称为点标空间.

定义 31 一个点标空间 (X,x_0) 称为 **H 空间**，若存在点标映射 $m:(X\times X,(x_0,x_0))\to(X,x_0)$ 使得映射 $m(x_0,)$ 和 $m(,x_0)$ 在 (X,x_0) 上是 $\mathrm{rel}\{x_0\}$ 同伦于 1_X，称 x_0 为同伦单位.

设 (X,x_0)，(Y,y_0) 为点标空间，子空间 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的**楔和**，记作 $X\vee Y$，用 $*$ 表基点 $(x_0,y_0)\in X\vee Y$. 而 (X,x_0) 与 (Y,y_0) 的**缩积** $X\wedge Y:=X\times Y/X\vee Y$，记 $p:X\times Y\to X\wedge Y$ 为自然投射，且 $X\wedge Y$ 的基点 $*$ 定义为 $p(X\vee Y)$. $X\vee Y$ 与 $X\wedge Y$ 均为简化记号，精确地应记成 $(X,x_0)\vee(Y,y_0)$ 和 $(X,x_0)\wedge(Y,y_0)$.

设 (X,x_0) 为点标空间，定义 X 的**纬垂** $(SX,*)$ 为 X 与 1 维球 S^1 的缩积 $(S^1\wedge X,*)$.

对点标空间 (Y,y_0)，定义 Y 的**闭路空间** $(\Omega Y,\omega_0)$ 为函数空间 $\Omega Y:=(Y,y_0)^{(S^1,p_0)}$，并以常值闭路 ω_0(即对一切 $s\in S^1$ 有 $\omega_0(s)=y_0$) 作为基点.

事实上上述 S 与 Ω 可以扩张为从点标空间及保持基点的连续映射的范畴 $\mathscr{PT}$ 到 $\mathscr{PT}$ 的函子. 纬垂函子 S 将空间 (X,x_0) 对应到 $(SX,*)$，将映射 $f:(X,x_0)\to(X',x'_0)$ 对应为 $Sf:=1_{S^1}\wedge f:(S^1\wedge X,*)\to(S^1\wedge X',*)$. 而闭路函子 Ω 将空间 (Y,y_0) 对应到 $(\Omega Y,\omega_0)$，将映射 $g:(Y,y_0)\to(Y',y'_0)$ 对应为 $\Omega g:(\Omega Y,\omega_0)\to(\Omega Y',\omega'_0)$ 其中 $\Omega g(\omega)(s):=g\circ\omega(s)$，$s\in S^1$.

定义 32 若复合点标映射 $X\xrightarrow{m'}X\vee X\subset X\times X$ 是(相对)同伦于对角映射，x_0 是同伦单位，则一个点标空间 (X,x_0) 连同一个点标映射 $m':(X,x_0)\to(X\vee X,$

$*$）称为一个上 H 空间.

设(X,x_0),(Y,y_0)为点标空间,以后将从(X,x_0)到(Y,y_0)的保持基点映射的同伦类简记为$[X,Y]_0$,基点就不特别指明了.

命题 10 当 X 为 T_2 空间时,存在自然等价 $A:[SX,Y]_0 \xrightarrow{=} [X,\Omega Y]_0$,因此 S 与 Ω 是一对伴随函子.

定义 33 设(X,x_0)是一个带有乘法 m 的 H 空间,若它满足 $m\circ(m\times 1_X)\simeq m\circ(1_X\times m)$,则称 m 是同伦结合的,若它满足 $m\circ(\nu,1_X)\simeq x_0\simeq m\circ(1_X,\nu)$,则映射 $\nu:(X,x_0)\to(X,x_0)$称为同伦逆.一个 H 群是一个 H 空间(X,x_0)带有同伦结合的乘法 m 和同伦逆 ν.令 $T:X\times X\to X\times X$ 为换位映射 $T(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$.若满足 $m\circ T\simeq m$,则称乘法 m 为同伦交换的.注意,上述所有映射与同伦都是相对于基点的.

定义 34 设(X,x_0)是一个带有上乘法 m' 及同伦单位 x_0 的上 H 空间.若$(m'\vee 1_X)\circ m'\simeq(1_X\vee m')\circ m'$,则称 m' 为同伦结合的.同伦逆是映射 $\nu':(X,x_0)\to(X,x_0)$满足$(\nu':1_X)\circ m'\simeq x_0\simeq(1_X,\nu')\circ m'$的.一个带有同伦结合的上乘法 m' 和同伦逆 ν' 的上 H 空间(X,x_0)称为**上 H 群**.若 m' 还满足 $T\circ m'\simeq m'$,则 m' 称为同伦交换的.上述映射与同伦也都是相对于基点的.

例 8 拓扑群(G,e)带有乘法 $m:G\times G\to G$, $m(g_1,g_2)=g_1g_2$,及逆 $\nu:G\to G$, $\nu(g)=g^{-1}$是一个 H 群,e 是 G 的单位元也表常值映射.

例 9 对任意点标空间(Y,y_0),闭路空间$(\Omega Y,\omega_0)$是 H 群.

例 10 对任意点标空间(X,x_0),纬垂$(SX,*)$是上 H 群.

命题 11 设(Y,y_0),(X,x_0)为点标空间.若令 $\Omega^0Y:=Y$, $\Omega^nY:=\Omega(\Omega^{n-1}Y)$, $n\geqslant 1$; $S^0X:=X$, $S^nX:=S(S^{n-1}X)$, $n\geqslant 1$.则当 $n\geqslant 2$ 时,Ω^nY 是同伦交换的 H 群;S^nX 是同伦交换的上 H 群.

命题 12 对一切 $n\geqslant 0$, $S^1\wedge S^n\cong S^{n+1}$.

命题 13 对一切 $n\geqslant 0$, $S^nX\cong S^n\wedge X$.

2.3 同　伦　群

命题 14

1° 设(X,x_0)为点标空间,(Y,y_0)为 H 群,则$[X,Y]_0$是一个群;

2° 设(X,x_0)为上 H 群,(Y,y_0)为点标空间,则$[X,Y]_0$是一个群;

3° 设(X,x_0)是上 H 群,(Y,y_0)是 H 群,则在$[X,Y]_0$上,两种群的结构重合,并且群$[X,Y]_0$是阿贝尔群.

定义 35 设(X,x_0),$(S^1,p_0)$$(p_1=(1,0)\in S^1)$为点标空间,定义$(X,x_0)$的1维同伦群 $\pi_1(X,x_0):=[S^1,X]_0$.通过映射 $I\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$ 用参数 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$将单位圆 S^1 上的点参数化.用 $\mathrm{Map}_0(S^1,X)$ 表一切连续映射$(S^1,p_0)\to(X,x_0)$所构成的空间,所以 $\mathrm{Map}_0(S^1,X)=\Omega X$,它的元素即以 x_0 为基点的闭道,设 $\alpha,\beta\in\Omega X$ 为闭道,定义 α 与 β 的乘积为闭道 γ:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t < \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

则 $\gamma \in \Omega X$. 用$[\alpha]$,$[\beta]$,$[\gamma]$分别表α,β,γ在$[S^1,X]_0$中的同伦类,并定义$[\alpha]\cdot[\beta]:=[\gamma]$. 由$x_0$代表的常值映射的同伦类,$[x_0]$是同伦单位,而由$\nu:\Omega X \to \Omega X$, $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$(其中$\bar{\alpha}(t):=\alpha(1-t)$)定义的$\nu$为同伦逆. 这就直接证明了$\pi_1(X,x_0)=[S^1,X]_0$为一群(这也可由$[S^1,X]_0=[SS^0,X]_0=[S^0,\Omega X]_0$及以前结果看出). 1维同伦群又称为$X$的**基本群**.

以下在讨论同伦群时,恒设空间为道路连通空间.

定义 36 设(X,x_0)为点标空间,(S^n,p_0)的基点$p_0=(1,0,\cdots,0)\in S^n$. 定义

$$\pi_n(X,x_0):=[S^n,X]_0, n \geqslant 0$$

当$n \geqslant 1$时,$\pi_n(X,x_0)$称为 ***n* 维同伦群**.

命题 15

1° $\pi_0(X,x_0)$为点标集合;

2° $n \geqslant 1$时,$\pi_n(X,x_0)$是群;

3° $n \geqslant 2$时,$\pi_n(X,x_0)$是阿贝尔群.

命题 16 设空间(X,x_0)与(Y,y_0)有相同的伦型,则$\pi_n(X,x_0) \approx \pi_n(Y,y_0)$, $n \geqslant 0$.

命题 17 设(X,x_0)与(Y,y_0)为点标空间,则$\pi_n(X \times Y,(x_0,y_0)) \approx \pi_n(X,x_0) \oplus \pi_n(Y,y_0)$.

命题 18 设X为可缩空间,$x_0 \in X$,则$\pi_n(X,x_0)$平凡(即仅含一个元素),对一切$n \geqslant 0$. 特别$\pi_n(\mathbf{R}^m,*)=0$.

定义 37 设(X,x_0)为点标空间,一个点标偶是一个有序偶(X,A)(常记为(X,A,x_0)),满足$X \supset A \ni x_0$.

定义 38 设(X,A,x_0)和(Y,B,y_0)是点标偶,一个点标偶映射$f:(X,A) \to (Y,B)$是一个点标映射$f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$且$f(A) \subset B$. 若$f,g:(X,A) \to (Y,B)$是两个点标偶映射,则点标偶同伦$F:f \simeq g$是连续映射$F:X \times I \to Y$,满足:

$F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$,对一切$x \in X$;

$F(x_0,t)=y_0$,对一切$t \in I$;

$F(A \times I) \subset B$.

设(X,A,x_0)和(Y,B,y_0)均为点标偶,则一切点标偶映射$f:(X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$的点标偶同伦类的集合记成$[(X,A),(Y,B)]_0$.

定义 39 令$p_n=(1,0,\cdots,0) \in S^n$表$S^n$和$D^{n+1}$的公共基点. 对$n \geqslant 1$,点标偶$(X,A,x_0)$的相对同伦群定义为$\pi_n(X,A,x_0):=[(D^n,S^{n-1}),(X,A)]_0$.

命题 19 $\pi_n(X,A,x_0)$当$n \geqslant 2$时是群,当$n \geqslant 3$时是阿贝尔群.

在基点理解后,常将$\pi_n(X,x_0)$,$\pi_n(X,A,x_0)$分别简记为$\pi_n(X)$,$\pi_n(X,A)$.

设$f:(X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$点标偶映射,则可诱导映射$f_*:\pi_n(X,A) \to$

$\pi_n(Y,B)$ 为：若$[\alpha]\in\pi_n(X,A)$，$\alpha:(D^n,S^{n-1},p_{n-1})\to(X,A,x_0)$，则令 $f_*([\alpha]):=[f\cdot\alpha]\in\pi_n(Y,B)$．$f_*$ 为群同态．还可定义边缘同态$\partial:\pi_n(X,A)\to\pi_{n-1}(A)$为：$\partial([\alpha]):=[\alpha\mid S^{n-1}]\in\pi_{n-1}(A)$．对 $i:(A,x_0)\hookrightarrow(X,x_0)$ 可诱导 $i_*:\pi_n(A)\to\pi_n(X)$．由于$\pi_n(X,\{x_0\},x_0)\approx\pi_n(X,x_0)$，故$j_*:\pi_n(X)\to\pi_n(X,A)$可看作是由包含映射 $j:(X,\{x_0\},x_0)\hookrightarrow(X,A,x_0)$ 所诱导的．

命题 20 对点标偶(X,A,x_0)，有如下的正合序列：

$$\cdots\to\pi_{n+1}(A)\xrightarrow{i_*}\pi_{n+1}(X)\xrightarrow{j_*}\pi_{n+1}(X,A)$$
$$\xrightarrow{\partial}\pi_n(A)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X)\to\cdots\longrightarrow\pi_1(A)$$
$$\xrightarrow{i_*}\pi_1(X)\xrightarrow{j_*}\pi_1(X,A)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X).$$

命题 21 设$\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$为一纤维丛，令 $F\overset{i}{\hookrightarrow}E\xrightarrow{\pi}M$，则有如下纤维同伦正合序列：

$$\cdots\to\pi_n(F)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{\pi_*}\pi_n(M)\to$$
$$\pi_{n-1}(F)\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(E)\to\cdots\to$$
$$\pi_0(F)\to\pi_0(E)\to\pi_0(M)\to 0.$$

定理 5 （怀特黑德(J.H.C.Whitehead)定理） 设 X 和 Y 为连通 CW 复形，$f:X\to Y$为连续映射，使得$f_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,f(x_0))$对一切 n 为同构，则f为同伦等价(从而 X 和 Y 有相同的伦型)．

命题 22 一个 CW 复形为可缩的充要条件为对一切 n，$\pi_n(X)=0$．

命题 23 设 $E\xrightarrow{p}B$ 为一复叠空间，则

$$p_*:\pi_n(E)\approx\pi_n(B),\quad n\geqslant 2.$$

并且当 $n=1$ 时，p_* 为单同态．

定义 40 设 X 为拓扑空间，若$\pi_0(X)=0$，则称 X 连通的；若$\pi_1(X)=0$，则称 X 单连通的；若 $\pi_k(X)=0(0\leqslant k\leqslant n)$，则称 X 为 n 连通的．

以下讨论有关球面同伦群的若干结果．

命题 24 $\pi_1(S^1)=\mathbf{Z}$；$\pi_m(S^1)=0(m>1)$．

命题 25 对 $m,n\geqslant 1$，$\pi_n(S^n)=\mathbf{Z}$；$\pi_m(S^n)=0(m<n)$．

命题 26 对 $n\geqslant m+2$ 有

$$\pi_{m+n}(S^n)=\pi_{m+n+1}(S^{n+1})=\cdots=G_m:=\pi_{2m+2}(S^{m+2}).$$

定理 6 （塞尔(JP.Serre)定理）

$$\pi_m(S^n)=\begin{cases}\text{一有限群}, & m>n\text{ 且 }n\text{ 为奇数};\\ \text{一有限群}, & m>n\text{ 且 }n\text{ 为偶数，但 }m\neq 2n-1;\\ \mathbf{Z}\times F, & m>n\text{ 且 }n\text{ 为偶数，及 }m=2n-1,\end{cases}$$

其中 F 为某有限群．

2.4 同调与上同调

2.4.1 链复形

以 R 表一个具有单位元的交换环. 当不会混淆时,R 模及 R 模同态简称为模及模同态.

定义 41 **链复形** $c_* = \{c_n, \partial\}$ 是模及模同态序列

$$c_*: \cdots \to c_n \xrightarrow{\partial} c_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} c_0 \to 0$$

满足条件 $\partial \circ \partial = 0$. 一个上链复形 $c^* = \{c^n, \delta\}$ 是模及模同态序列

$$c^*: \cdots \leftarrow c^n \xleftarrow{\delta} c^{n-1} \xleftarrow{\delta} \cdots \xleftarrow{\delta} c^0 \leftarrow 0$$

满足条件 $\delta \circ \delta = 0$. 一个**增广链复形**(c_*, ϵ) 是一个链复形 c_* 并附加一个模同态 $\epsilon: c_0 \to M$,满足 $\epsilon \circ \partial = 0$,其中 M 为一 R 模. 一个增广上链复形(c^*, ϵ) 是一个上链复形附加一个模同态 $\epsilon: M \to c^0$,满足 $\delta \circ \epsilon = 0$. c_n 中的元素称为 n 维链, c^n 中的元素称为 n 维上链. 若 $c_n(c^n)$ 都是自由模,则 $c_*(c^*)$ 称为自由链(上链)复形. ∂ 称为**边缘算子**, δ 称为**上边缘算子**.

定义 42 链复形 c_* 的第 n 阶(或第 n 维)**同调解**定义为商模 $H_n(c_*) := Z_n(c_*)/B_n(c_*)$,其中 $Z_n(c_*) := \mathrm{Ker}\{\partial: c_n \to c_{n-1}\}$,称为 n- 闭链群,它的元素称为 n- 闭链, $B_n(c_*) := \vartheta_m\{\partial: c_{n+1} \to c_n\}$,称为 n- 边缘链群,它的元素称为 n- 边缘. 同调群 $H_n(c_*)$ 的元素称为 n- 同调类, $z \in Z_n(c_*)$ 所对应的同调类记为 $\{z\}$. 类似地,第 n 阶**上同调群**定义为$H^n(c^*) := Z^n(c^*)/B^n(c^*) \equiv \dfrac{\mathrm{Ker}\{\delta: c^n \to c^{n+1}\}}{\vartheta_m\{\delta: c^{n-1} \to c^n\}}$,并有相对应的名称(对应地加词头"上").

定义 43 两个链复形 c_*, c_*' 之间的**链映射**$f = \{f_n\}$ 是一族模同态 $f_n: c_n \to c_n'$,使得$\partial_n' \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$. 类似可以定义增广链复形之间的链映射. 除了模同态序列 $f_n: c_n \to c_n'$ 外,还有模同态 $\tilde{f}: M \to M'$ 满足 $\epsilon \circ f_0 = \tilde{f} \circ \epsilon$. 设 $f, g: c_* \to c_*'$ 为二个链映射,则 f 与 g 之间的**链伦移** $D: c_* \to c_*'$ 是一列模同态 $D_n: c_n \to c'_{n+1}$,满足$\partial' \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$(对任意 n),记为 $f \simeq g$. 若存在链映射 $g: c_*' \to c_*$,使得 $g \circ f \simeq id$, $f \circ g \simeq id$,则链映射 $f: c_* \to c_*'$ 称为**链同伦等价**, g 称为 f 的链同伦逆. 这一切可以类似地推广到上链复形情形.

命题 27 设 $f: c_* \to c_*'$ 为链映射,则如下诱导同调群之间的同态 $H_n(f) \equiv f_{*n}: H_n(c_*) \to H_n(c'_*)$, $H_n(f)(\{z\}) := \{f(z)\} (z \in Z_n(c_*))$,具有性质:

1° 设链映射 $f': c_*' \to c_*''$,则 $H_n(f' \circ f) = H_n(f') \circ H_n(f): H_n(c_*) \to H_n(c_*'')$;

2° 设链映射 $\mathrm{id}: c_* \to c_*$,则 $H_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}: H_n(c_*) \to H_n(c_*)$;

3° 设链映射$f, g: c_* \to c_*'$ 为链同伦,则 $H_n(f) = H_n(g): H_n(c_*) \to H_n(c_*')$.

关于上链复形、上链映射及上链同伦也有类似结论.

命题 28 链复形的短正合序列

$$0 \to c_* \xrightarrow{f} c_*' \xrightarrow{g} c_*'' \to 0$$

诱导出同调群的长正合序列

$$\cdots \to H_n(c_*) \xrightarrow{f_*} H_n(c_*') \xrightarrow{g_*} H_n(c_*'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(c_*) \to \cdots.$$

2.4.2 几类同调群、上同调群的构造

以下分别介绍几类常用的同调群及上同调群的构造方法.

设 K 为有限单纯复形, G 为一阿贝尔群, 设 $\dim K = m$, 并将 K 的单形定向, 使 K 成为定向复形, S_p 表 K 的一切 p- 维定向单形的集合.

定义 44 形为 $\sum_i g_i \cdot \sigma_i^p, g_i \in G, \sigma_i^p \in S_p$ 的(有限)形式线性组合的群关于形为: $g \cdot \sigma^p + g \cdot (-\sigma^p)$ 的元素(及其线性组合)的子群所构成的商群, 称为复形 K 的, 以阿贝尔群 G 为系数的 p- 维链群 $c_p(K;G)$. 即在由定向单形的形式线性组合的群里, 我们将 $g \cdot (-\sigma^p)$ 与 $-g \cdot (\sigma^p)$ 等同起来. 对任一定向单形 $\sigma^p \in S_p$, 设 $\sigma^p = \langle a_0, a_1, \cdots, a_p \rangle$, 则令 $\partial_p(g \cdot \langle a_0, a_1, \cdots, a_p \rangle) := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i g \cdot \langle a_0, \cdots, \widehat{a}_i, \cdots, a_p \rangle$ ($\langle a_0, \cdots, \widehat{a}_i, \cdots, a_p \rangle$ 表示去掉顶点 a_i 所得的 $p-1$ 维定向单形 $\langle a_0, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_p \rangle$), 再用加法将上式扩充到形式线性组合 $\sum_i g_i \sigma_i^p$ 上, 即得 $\partial_p: c_p(K;G) \to c_{p-1}(K,G)$. 并令 $\partial_0: c_0(K;G) \to 0$. 容易验证 $\partial_{p-1}\partial_p = 0 (p \geqslant 1)$, 从而 $c_*(K;G) := \{c_p(K;G), \partial\}$ 为链复形, $c_p(K;G)$ 中的元素称为 p- 维单纯链.

定义 45 1° 链复形 $c_*(K;G)$ 所对应的同调群, 称为单纯复形 K 的, 以阿贝尔群 G 作系数群的同调群, 记为 $H_p(K;G), p \in \mathbf{Z}$;

2° 设 X 为可剖分空间, (K, φ) 为其一个剖分, 定义 $H_p(X;G) := H_p(K;G), p \in \mathbf{Z}$, 称为空间 X 的, 以阿贝尔群 G 为系数的同调群.

命题 29 设 $\dim K = m$, 则 $c_*(K;G)$ 为

$$0 \to c_m(K;G) \xrightarrow{\partial} c_{m-1}(K;G) \xrightarrow{\partial} \cdots \to c_0(K;G) \to 0,$$

故当 $p > m$ 或 $p < 0$ 时, $H_p(K;G) = 0$.

命题 30 设 X 为可剖分空间, (K, φ), (L, ψ) 为它的两个剖分, 则 $H_p(K;G) \approx H_p(L;G)$, 对一切 $p \in \mathbf{Z}$. 故定义 45 之 2° 中定义的空间 X 的同调群 $H_p(X;G)$ 是无歧义地定义了的.

定义 46 设 K 是单纯复形, $L \subset K$ 为子复形, 则 $c_*(L;G)$ 是链复形 $c_*(K;G)$ 的一个子链复形, 定义商复形 $c_*(K,L;G) := c_*(K;G)/c_*(L;G)$ 为 $c_p(K,L;G) := c_p(K;G)/c_p(L;G)$. $\bar{\partial}$ 为由 ∂ 诱导的商同态, 则 $c_*(K,L;G) = \{c_p(K,L;G), \bar{\partial}\}$, 由链复形 $c_*(K,L;G)$ 确定的同调群称为复形偶 (K,L) 的相对同调群, 记为 $H_p(K,L;G), p \in \mathbf{Z}$.

命题 31 设 K 为单纯复形，$L_1, L_2 \subset K$ 为子复形，$L_1 \cap L_2$ 和 $L_1 \cup L_2$ 也是 K 的子复形，则有如下的迈耶—菲托里斯(Mayer-Vietoris)正合序列

$\cdots \to H_{p+1}(L_1 \cup L_2; G) \to H_p(L_1 \cap L_2; G) \to H_p(L_1; G) \oplus H_p(L_2; G) \to H_p(L_1 \cup L_2; G) \to H_{p-1}(L_1 \cap L_2; G) \to \cdots$.

设 K 为单纯复形，取整数加群 $\mathbf{Z}$ 作为系数群 G，则同调群 $H_p(K, \mathbf{Z})$ 简记为 $H_p(K)$. 由于 $H_p(K)$ 为有限生成阿贝尔群，故由这种群的结构定理，有

定理 7 设 K 为单纯复形，则 $H_p(K)$ 有如下唯一的标准分解式：

$$H_p(K) \approx \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_{\beta_p \text{个}} \oplus \mathbf{Z}_{\theta_1^p} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\theta_{\tau_p}^p}$$

其中 $\beta_p \geqslant 0$ 称为 K 的 p 维贝蒂(Betti)数；当 $\tau_p > 0$ 时，$\theta_i^p > 1$，且 θ_i^p 整除 θ_{i+1}^p，$\{\theta_i^p \mid i = 1, \cdots, \tau_p\}$ 称为 p **维挠系数**. β_p 是群 $H_p(K)$ 的秩. β_p 与 $\{\theta_i^p \mid i = 1, \cdots, \tau_p\}$ 构成群 $H_p(K)$ 的不变量完全组.

现在来构造奇异同调，设 X 为任意拓扑空间，R 为带单位元的交换环，我们先定义奇异链，再派生出奇异同调. 先作一些准备.

可以认为 $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^\infty$，前面的空间嵌入到后面，只须看作将后面添上一些全为零的坐标分量. 记 $E_0 := (0,0,\cdots,0,\cdots)$，$E_1 = (1,0,\cdots,0,\cdots)$，$E_2 = (0,1,0,\cdots,0,\cdots)$ 等等. 任意有限多个点 E_i 可以看作属于某一个 $\mathbf{R}^n$，并且是几何无关的. $\Delta_q := [E_0, E_1, \cdots, E_q]$ 称为标准(几何) q- 单形. 设 $p_0, p_1, \cdots, p_q$ 为某欧氏空间中的点，则令 $E_i \mapsto P_i (0 \leqslant i \leqslant q)$ 并作仿射扩张，所得的仿射映射记为 $(p_0, p_1, \cdots, p_q)$，所以 $(E_0, E_1, \cdots, E_q)$ 即 Δ_q 上的恒等映射，记为 δ_q.

拓扑空间 X 中的奇异 q- 单形 σ 是一个连续映射 $\sigma: \Delta_q \to X$. X 的奇异 q- 维链 $S_q(X; R)$ 是 X 的所有奇异 q- 单形生成的自由 R- 模. 即 $S_q(X; R)$ 的元是形式线性组合

$$\sum_\sigma \nu_\sigma \sigma \quad (\text{每一和中仅有有限个 } \nu_\sigma \neq 0),$$

σ 遍取奇异 q- 单形，$\nu_\sigma \in R$. 它称为奇异 q- 链.

对 $q > 0, 0 \leqslant i \leqslant q$，定义 $F_q^i: \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ 为仿射映射 $(E_0, \cdots, \widehat{E_i}, \cdots, E_q)$. 对空间 X 的任一奇异 q- 单形 σ，$\sigma^{(i)} := \sigma \cdot F_q^i$ 称为 σ 的 i- 面，它是奇异 $(q-1)$- 单形. 现在定义奇异 q- 单形 σ 的边缘 $\partial\sigma$ 为奇异 $(q-1)$- 链：$\partial\sigma := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$，并且对任意奇异 q- 链 $\sum \nu_\sigma \sigma$，定义 $\partial(\sum_\sigma \nu_\sigma \sigma) := \sum \nu_\sigma \partial\sigma$. 容易验证 $\partial \cdot \partial = 0$，从而有

定义 47 $S_*(X; R) := \{S_q(X; R), \partial\}$ 称为 X 的奇异链复形. 它对应的同调群称为 X 的系数在 R 中的**奇异同调群**(实为同调模，同调群为习惯用语)，q 阶奇异同调群记为 $H_q(X; R)$.

命题 32 设 $\{X_k\}$ 为 X 的道路连通分支的族，则 $H_q(X; R) \approx \bigoplus_k H_q(X_k; R)$ $(q \geqslant 0)$.

X 的零维奇异单形 σ 就是映射 $\sigma: \Delta_0 \to X$，$E_0 \longmapsto \sigma(E_0) = x \in X$，故不妨用 x 表 σ，0 维链形如 $\sum \nu_x x$，定义一个边缘算子 $\partial^*: S_0(X; R) \to R$ 为 $\partial^*(\sum \nu_x x) = \sum \nu_x$，则

有$\partial^* \circ \partial_1 = 0$. 定义 $\widetilde{H}_0(X;R):=\mathrm{Ker}\partial^*/\mathscr{I}_m\partial_1$,称为**约化0-阶同调群**.

命题 33 $H_0(X;R)\approx\widetilde{H}_0(X;R)\oplus R$.

而对 $q>0$,定义**约化q-阶同调群** $\widetilde{H}_q(X;R):=H_q(X;R)$.

设 $f:X\to X'$ 连续,$\sigma\in S_q(X;R)$,则 $f\circ\sigma\in S_0(X',R)$,从而导出 $S_q(f):S_q(X;R)\to S_q(X';R)$ 为 $S_q(f)(\sum\nu_\sigma\sigma):=\sum\nu_\sigma(f\circ\sigma)$.

命题 34 设 $f:X\to X'$,则

1° $S_q(\mathrm{id})=\mathrm{id}_{S_q(X)}$;

2° $S_q(g\circ f)=S_q(g)\cdot S_q(f)$;

3° $\partial S_q(f)=S_{q-1}(f)\partial$,即 $S_q(f)$ 为链映射.

命题 35 设 $f:X\to X'$,若 $z\in Z_q(X;R)$ 为 q-闭链,令 $H_q(f)(\{z\}):=\{S_q(f)(z)\}$,则 $H_q(f):H_q(X;R)\to H_q(X';R)$ 且有性质:

1° $H_q(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{H_q(X;R)}$;

2° $H_q(g\circ f)=H_q(g)\circ H_q(f)$. 由是奇异同调群 $H_q(X;R)$ 是拓扑不变量.

设 $A\subset X$,则 $S_q(A;R)\subset S_q(X;R)$,如同单纯复形情形,令 $S_q(X,A;R):=S_q(X;R)/S_q(A;R)$,则得偶$(X,A)$的奇异链复形 $S_*(X,A;R)=\{S_q(X,A;R),\bar{\partial}\}$ 及偶的奇异同调群 $H_q(X,A;R)$. 它是偶的拓扑不变量.

定义 48 设 $S_*(X)$ 为拓扑空间 X 的奇异链复形,定义 X 上的q-维奇异上链 $S^q(X;R):=\mathrm{Hom}(S_q(X),R)$,则 q-维奇异上链 $c\in S^q(X;R)$ 为 R 同态 $c:S_q(X)\to R$,以$[z,c]$表 $z\in S_q(X)$ 在 c 作用下的值,易知$[,]$为一双线性配对. 上边缘运算 $\delta:\delta^q(X;R)\to S^{q+1}(X;R)$,由下式定义:$[z,\delta c]:=[\partial z,c]$,$c\in S^q(X;R)$,$z\in S_{q+1}(X)$. 由 $\partial\circ\partial=0$ 可知 $\delta\cdot\delta=0$,从而 $S^*(X;R):=\{S^q(X;R),\delta\}$ 构成上链复形. 并定义 X 的 **q-维奇异上同调群** $H^q(X;R):=\mathrm{Ker}\{\delta:S^q(X;R)\to S^{q+1}(X;R)\}/\vartheta_m\{\delta:S^{q-1}(X;R)\to S^q(X;R)\}$.

设 $f:X\to Y$,则定义模同态 $S^q(f):S^q(Y;R)\to S^q(X;R)$ 为:对 $z\in S_q(X)$,$c\in S^q(Y;R)$,

$$[z,S^q(f)c]=[S_q(f)z,c].$$

容易验证 $\delta\circ S^q(f)=S^{q+1}(f)\circ\delta$,即 $S^q(f)$ 为上链映射,过渡到商从而导出同态 $H^q(f):H^q(Y;R)\to H^q(X;R)$.

命题 36 H^q 满足:

1° $H^q(\mathrm{id})=\mathrm{id}_{H^q(X;R)}$;

2° $H^q(g\circ f)=H^q(f)\circ H^q(g)$. 即 H^q 成为反变函子.

与同调情形类似,也可定义偶(X,A)的相对上同调群 $H^q(X,A;R)$.

下面构造另一种很重要的上同调,德拉姆(de Rham)上同调. 设 M 为光滑流形,$\Omega^k(M)$ 表 M 上的 k 次微分形式,它是一个 $C^\infty(M)$ 模. 对 $\alpha\in\Omega^k(M)$,$\beta\in\Omega^l(M)$,则形式 α 与 β 的外积 $\alpha\wedge\beta\in\Omega^{k+l}(M)$. 乘法运算 $\wedge$ 是双线性并且是结合的. 用 $\Omega(M)$ 表 $\Omega^k(M)$ 的直和,则 $\Omega(M)$ 是一个代数,称为 M 上的外微分形式的代

数. 外微分运算 $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$, 满足 $d^2=d\circ d=0$, 构成上链复形:

$$\cdots\to\Omega^{k-1}(M)\xrightarrow{d}\Omega^k(M)\xrightarrow{d}\Omega^{k+1}(M)\to\cdots$$

记为 $\{\Omega^k(M),d\}$. 由此有

定义 49　由德拉姆上链复形 $\{\Omega^k(M),d\}$ 诱导的上同调群称为流形 M 的**德拉姆上同调群**, 记为 $H^k_{dR}(M):=Z^k_{dR}(M)/B^k_{dR}(M)$, $B^k_{dR}(M)\subset Z^k_{dR}(M)\subset\Omega^k(M)$, $B^k_{dR}(M):=\vartheta_m(d)$ 的元素称为 k 阶恰当微分形式, $Z^k_{dR}(M):=\ker(d)$ 的元素称为 k 阶闭微分形式.

设 $F:M\to N$ 为流形间的光滑映射. 对 $\omega\in\Omega^k(N)$, 用 $F^*\omega\in\Omega^k(M)$ 表形式 ω 由 F 所作的拉回. 则有

命题 37　设 $F:M\to N$ 和 $G:N\to W$ 为流形间的光滑映射, d 为外微分, 则

1° $F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$;

2° $(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$;

3° $\mathrm{id}_M:M\to M$, 则 $\mathrm{id}_M^*=\mathrm{id}_{\Omega^k(M)}$;

4° 若 F 为微分同胚, 则 F^* 为向量丛同构, 且 $(F^*)^{-1}=(F^{-1})^*$;

5° 对 $\alpha\in\Omega^k(N)$, $\beta\in\Omega^l(N)$, 有 $F^*(\alpha\wedge\beta)=F^*(\beta)\wedge F^*(\alpha)$, 且 $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$;

6° $F^*\circ d=d\circ F^*$;

7° $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta$, α 是 k 形式.

由上面的 7° 可知, 若 $\alpha\in Z^k_{dR}(M)$, $\beta\in Z^l_{dR}(M)$, 则 $\alpha\wedge\beta\in Z^{k+l}_{dR}(M)$, 若闭形式 ω 的同调类用 $[\omega]$ 表之, 则可定义德拉姆上同调的乘法:

$$H^k(M)\times H^l(M)\to H^{k+l}(M),\ ([\alpha],[\beta])\longmapsto[\alpha\wedge\beta].$$

用 $H^*_{dR}(M)$ 表 $H^k_{dR}(M)(k=0,1,\cdots)$ 的直和, 则在上述乘法之下, $H^*_{dR}(M)$ 成为 $\mathbf{R}$ 上的分次代数.

定理 8(德拉姆定理)　设 M 为光滑紧流形, 则 M 的德拉姆上同调 $H^k_{dR}(M)$ 同构于实奇异上同调 $H^k(M;\mathbf{R})$.

设 G 是一个群, $n\geqslant1$ 是一整数, $K(G,n)$ 是一道路连通空间, 满足

$$\pi_q(K(G,n))\approx\begin{cases}G, & 若\ q=n,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$K(G,n)$ 称为型 (G,n) 的**艾伦伯格-麦克莱恩(Eilenberg-Mac Lane)空间**. 例如 S^1 就是 $K(\mathbf{Z},1)$. 对 $K(G,n)$, 当 $n\geqslant2$ 时, 要求 G 为阿贝尔群. 由于 $\pi_q(\Omega K(G,n),\omega_0)\approx\pi_{q+1}(K(G,n),x_0)$, 所以 $\Omega^m K(G,n+m)(m=1,2,\cdots)$ 也是 $K(G,n)$, 特别 $K(G,n)$ 是 H-空间. 类似同伦群的定义, 对空间 X 及群 G, 有

定义 50　令 $H^n(X,G):=[X,K(G,n)]_0$, 由于 $K(G,n)$ 是 H-空间, $[X,K(G,n)]_0$ 有群结构, 称为空间 X 的、群 G 为系数的 n 阶上同调群.

上述定义的合理性是由于有如下命题.

命题 38　对 CW 复形 X, 上述 $H^n(X,G)$ 同构于约化奇异上同调群 $\tilde{H}^n(X,G)$.

最后来界定**切赫(Cech)上同调**. 设 X 为拓扑空间, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 X 的两个覆盖, 若 $\mathscr{B}$

是 $\mathscr{A}$ 的加细,则记为 $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$. 对 X 的任何两个覆盖 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, 令 $\mathscr{D}:=\{A\cap B \mid A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$, 则 $\mathscr{D}$ 是 X 的覆盖,且 $\mathscr{A}\prec\mathscr{D}$, $\mathscr{B}\prec\mathscr{D}$. 故 X 的一切覆盖,在偏序关系 $\prec$ 之下构成一个正向集. 设 $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}$,定义 $\lambda:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ 为对 $B\in\mathscr{B}$, $\lambda(B)\supset B$(λ 的选择有一定程度的任意性,但这并不影响后面的结论). 对 X 的每一覆盖 $\mathscr{A}$, 构造一个抽象复形 $N(\mathscr{A})$: $N(\mathscr{A})$ 的顶点是 $\mathscr{A}$ 的元素, $N(\mathscr{A})$ 的顶点 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 构成 $N(\mathscr{A})$ 的单形的充要条件是 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$. 这些顶点构成的 $N(\mathscr{A})$ 的单形记成 $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$, 容易验证 $N(\mathscr{A})$ 是一个抽象复形(这里暗含将以前抽象复形的有限性条件去掉,而扩充到任意的情形,对于单纯复形也作类似的扩充). 设 G 为一群,如同单纯链复形的办法,可构造 $N(\mathscr{A})$ 的链复形 $C_*(N(\mathscr{A});G)=\{C_k(N(\mathscr{A});G),\partial\}$ 及对应的上链复形 $C^*(N(\mathscr{A});G)=\{C^k(N(\mathscr{A});G),\delta\}$, 由此作出对应的上同调群 $H^k(N(\mathscr{A});G)$. 设 X 的覆盖 $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}$, 设 λ 为前面定义的映射 $\lambda:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$. 作抽象复形 $N(\mathscr{A})$ 和 $N(\mathscr{B})$. 由 $[B_0, B_1, \cdots, B_n]\in N(\mathscr{B})$, 据 λ 的构造有 $\lambda(B_0)\cap\lambda(B_1)\cap\cdots\cap\lambda(B_n)\neq\varnothing$, 从而当 $\lambda(B_0), \lambda(B_1), \cdots, \lambda(B_n)$ 互不相同时有 $[\lambda(B_0), \lambda(B_1), \cdots, \lambda(B_n)]\in N(\mathscr{A})$, 作线性扩张,可得映射 $\lambda_\#: C_k(N(\mathscr{B});G)\to C_k(N(\mathscr{A});G)$, 及 $\lambda^\#: C^k(N(\mathscr{A});G)\to C^k(N(\mathscr{B});G)$(对 $\lambda(B_0), \lambda(B_1), \cdots, \lambda(B_n)$ 有相同点时,将 $[\lambda(B_0), \lambda(B_1), \cdots, \lambda(B_n)]$ 看作退化单形,令其在链 $C_n(N(\mathscr{A});G)$ 中消失), 容易验证 $\lambda_\#\circ\partial=\partial\circ\lambda_\#$ 及 $\lambda^\#\circ\delta=\delta\circ\lambda^\#$, 所以 $\lambda^\#$ 为上链映射,从而诱导同态 $\lambda^*: H^k(N(\mathscr{A});G)\to H^k(N(\mathscr{B});G)$. 为表明 λ^*(以及 λ, $\lambda^\#$ 等)是由加细 $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}$ 产生的,今后记 $\lambda=\pi_{\mathscr{B}\mathscr{A}}:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$, $\lambda^*=\pi^*_{\mathscr{B}\mathscr{A}}: H^k(N(\mathscr{A});G)\to H^k(N(\mathscr{B});G)$, $(k\in\mathbf{Z})$.

定义 51　设用 J 表空间 X 的一切开覆盖所组成的正向集, J 的正向是由 $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}$ 来规定的,如上定义 $\pi^*_{\mathscr{B}\mathscr{A}}: H^k(N(\mathscr{A});G)\to H^k(N(\mathscr{B});G)$, 则 $\{H^k(N(\mathscr{A});G), \pi^*_{\mathscr{B}\mathscr{A}} \mid \mathscr{A}\in J\}$ 构成一个正向系. 空间 X 的系数在 G 中的 k-阶切赫上同调群 $\check{H}^k(X;G)$ 定义为如下的正向极限

$$\check{H}^k(X;G):=\varinjlim_{\mathscr{A}\in J} H^k(N(\mathscr{A});G),$$

类似地可以用约化群的正向极限定义**约化切赫上同调群** $\check{\tilde{H}}^k(X;G)$.

关于切赫上同调与其他上同调的关系有

命题 39　设 K 为单纯复形,则 $\check{H}^k(|K|;G)\approx H^k(K;G)$, 对约化上同调也同样正确.

例 11　将拓扑学家的正弦曲线 $\overline{S}$ 的点 $(0,-1)$ 与 $(1,\sin 1)$ 用 $\mathbf{R}^2$ 中与 $\overline{S}$ 无其他公共点的简单折线连接起来,所得空间称为闭的拓扑学家正弦曲线,记为 $X\subset\mathbf{R}^2$. 取子空间拓扑,则有

$$H^1(X)=0 \quad (\text{奇异上同调});$$

$$\check{H}^1(X)\approx\mathbf{Z} \quad (\text{切赫上同调}).$$

2.4.3　同调论公理,同调与上同调的性质

前面介绍了同调、上同调的构成方法,它们有很多性质是类似的,艾伦伯格-斯

廷罗德(Steenrod)分析、总结了这些特点,提出了同调论的公理系统.

一个同调论由 H 和∂组成如下.

一个从拓扑空间偶及偶的映射的范畴到分次阿贝尔群和同态的范畴的 0 级共变函子 H(即 $H(X,A)=\{H_q(X,A)\}$);

一个从(X,A)上的函子 H 到$(A,\varnothing)$($(A,\varnothing)$等同于 A)上的函子 H 上的 -1 级自然变换 ∂(即 $\partial(X,A)=\{\partial_q(X,A):H_q(X,A)\to H_{q-1}(A)\}$),

它们满足如下公理:

(1)(同伦公理)　设 $f_0\simeq f_1:(X,A)\to(Y,B)$,则 $H(f_0)=H(f_1):H(X,A)\to H(Y,B)$;

(2)(正合公理)　对任意偶(X,A)及包含映射 $i:A\hookrightarrow X$ 和 $j:X\subset(X,A)$,有正合序列$\cdots\xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)}H_q(A)\xrightarrow{H_q(i)}H_q(X)\xrightarrow{H_q(j)}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial_q(X,A)}H_{q-1}(A)\xrightarrow{H_{q-1}(i)}\cdots$;

(3)(切除公理)　对任意偶(X,A),及 X 的开子集 U,且满足 $\overline{U}\subset \mathrm{Int}A$,则切除映射 $j:(X\setminus U,A\setminus U)\subset(X,A)$ 诱导同构

$$H(j):H(X\setminus U,A\setminus U)\approx H(X,A);$$

(4)(维数公理)　设 P 为单点空间,则

$$H_q(P)\approx\begin{cases}0, & q\neq 0;\\ \mathbf{Z}, & q=0.\end{cases}$$

对任意同调论均可定义**约化同调群**如下.设 X 为非空空间,P 为单点空间,$c:X\to P$ 为唯一映射.诱导同态 $H(c):H(X)\to H(P)$,约化群 $\widetilde{H}(X):=\mathrm{Ker}\,H(c)$,因 c 有右逆,所以 $H(c)$ 也有右逆,从而 $H(X)\approx\widetilde{H}(X)\oplus H(P)$.

对上同调理论也有对应的公理,只是 H 改为反变函子,上边缘 δ 变为 1 级自然变换.

在同调论中系数群 G 取为 $\mathbf{Z}$ 极为重要,有了系数 $\mathbf{Z}$ 的同调,其他系数 G 的同调可以代数地确定.以下是关于奇异同调的万有系数定理.

定理 9　对拓扑空间 X,阿贝尔群 G 及整数 $q\geqslant 0$,有

$$H_q(X;G)\approx H_q(X)\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X),G).$$

对应地奇异上同调的万有系数定理为

定理 10　对拓扑空间 X,阿贝尔群 G 以及整数 $q\geqslant 0$,有

$$H^q(X;G)\approx \mathrm{Hom}(H_q(X),G)\oplus \mathrm{Ext}(H_{q-1}(X),G).$$

积空间的同伦群与因子空间的同伦群之间有简明的关系,对同调群,这一关系较复杂.

定理 11(屈内特(Künneth)公式)　对拓扑空间 X 和 Y,以及整数 $q\geqslant 0$,有

$$H_q(X\times Y)\approx\sum_{i+j=q}H_i(X)\otimes H_j(Y)\oplus\sum_{i+j=q-1}\mathrm{Tor}(H_i(X),H_j(Y)).$$

2.4.4　几个常用定理

先讨论球面映射的映射度. 对任意连续映射 $f: S^n \to S^n$. 因 $H_n(S^n) \approx \mathbf{Z}$, 所以 $f_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ 作为 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的同态, 它的作用就是乘一个整数 m, 记 $m = \deg(f)$, 称为映射 f 的**映射度**, 故对任意 $\{z\} \in H_n(S^n)$, 则 $f_*(\{z\}) = \deg(f) \cdot (\{z\})$.

命题 40　设 $f, g: S^n \to S^n$ 为连续映射, 则

1° $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$;

2° $\deg(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$;

3° 若 f 为零伦, 则 $\deg(f) = 0$;

4° 若 f 为同伦等价, 则 $\deg(f) = \pm 1$;

5° $f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \cdots, -x_i, \cdots, x_{n+1})$ 为关于第 i 个坐标面的反射, 则 $\deg(f) = -1$;

6° 若 $f(x) = -x$ 为对经映射, 则 $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

定理 12 (霍普夫(Hopf)定理)　映射 $f, g: S^n \to S^n$ 为同伦的充要条件为 $\deg(f) = \deg(g)$.

定理 13 [布劳威尔(Brouwer)不动点定理]　设 $f: D^n \to D^n$ 连续, 则必定存在不动点 $x^* \in D^n$.

定义 52　球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 的连续切向量场 v 是一个连续映射 $v: S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, 使得对每一 $x \in S^n$, 内积 $\langle x, v(x)\rangle = 0$. 满足 $v(x) = 0$ 的点 $x \in S^n$, 称为向量场 v 的奇点.

定理 14 (布劳威尔-庞加莱定理)　S^n 上存在无奇点的连续切向量场的充要条件为 n 是奇数.

设 X 与 Y 是欧氏空间的子集, 且对任意 $x \in X$, 有 $-x \in X$, 设 $f: X \to Y$ 为连续映射, 若对任意 $x \in X$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 为保经映射.

定理 15 (博尔苏克(Borsuk)定理)　设 $f: S^n \to S^n$ 为保经映射, 则 $\deg(f)$ 为奇数.

定理 16 (博尔苏克-乌兰(Ulam)定理)　设 $f: S^n \to \mathbf{R}^n$ 为连续映射, 则存在 $x \in S^n$, 使得 $f(x) = f(-x)$.

设 X 为有限胞腔复形, α_q 表 X 的 q-维胞腔数, 则有

定义 53　$\chi(X) := \sum_q (-1)^q \alpha_q$ 称为 X 的**欧拉示性数**.

定理 17 (欧拉-庞加莱公式)　设 X 为有限胞腔复形, β_q 表 X 的 q-维贝蒂数, 则

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q.$$

设 K 为单纯复形, $f: |K| \to |K|$ 为连续映射, 则 $H_q(K; \mathbf{Q})$ 为 $\mathbf{Q}$ 上的有限维线性空间, 而诱导同态 $f_{*q}: H_q(K; \mathbf{Q}) \to H_q(K; \mathbf{Q})$ 为线性变换, 用 $\mathrm{tr}\, f_{*q}$ 表 f_{*q} 的迹.

定义 54　设 $f: |K| \to |K|$ 为连续映射,整数

$$L(f) := \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q \operatorname{tr} f_{*q}$$

称为 f 的**莱夫谢茨(Lefschetz)数**.

定理 18(莱夫谢茨不动点定理)　设连续映射 $f: |K| \to |K|$ 的莱夫谢茨数 $L(f) \neq 0$,则 f 必存在不动点.

关于同伦群与整系数同调群的关系,有

定理 19(赫列维兹(Hurewicz)定理)　设 X 为 n- 连通空间($n \geqslant 2$),则

$$\widetilde{H}_q(X) = 0 (0 \leqslant q \leqslant n), 且\ \pi_{n+1}(X, x_0) \approx \widetilde{H}_{n+1}(X).$$

2.4.5　流形、对偶定理

对拓扑流形均可讨论流形的定向问题,为简单起见,这里只介绍微分流形的定向.

设 $U \subset \mathbf{R}^m$ 为开集,$f \in C^r(U, \mathbf{R}^m)(r \geqslant 1)$,若对任意 $x \in U$,有 $\det(Df(x)) > 0$,则称 f 为保持定向的 c^r 映射.

定义 55　设 M 是一个 c^r 流形($r \geqslant 1$),$\mathscr{D}' = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ 是它 c^r 结构的一个图册.若对 $\mathscr{D}'$ 的任何两个图卡 $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$,$(\varphi_\beta, U_\beta)$,每当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,即有映射 $\varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbf{R}^m$ 是保持定向的 c^r 映射.则 $\mathscr{D}'$ 是 M 的定向 c^r 图册,在 M 的微分结构 $\mathscr{D}$ 内,在保持定向的前提下对 $\mathscr{D}'$ 作极大扩张得图册 $\mathscr{D}_1$,满足 $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}$.则 $\mathscr{D}_1$ 是 $(M, \mathscr{D})$ 的一个定向.存在这样图册 $\mathscr{D}_1$ 的流形,称为可定向 c^r 流形,否则称流形 M 是不可定向的.设 $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$ 为 $(M, \mathscr{D})$ 上的两个定向,若对任意图卡 $(\varphi_\alpha, U_\alpha) \in \mathscr{D}_1$,$(\psi_\beta, V_\beta) \in \mathscr{D}_2$,每当 $U_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$,则 $\det \mathscr{D}(\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) < 0$,对一切 $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ 成立,则称 $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$ 为 $(M, \mathscr{D})$ 上相反的定向.

命题 41　设 $(M, \mathscr{D})$ 为 m 维连通 $c^r(r \geqslant 1)$ 可定向流形,则它恰有两个定向.

设 X 是一个 n 维拓扑流形,令 $\mathscr{K} := \{K \mid K \subset X 紧\}$,即 $\mathscr{K}$ 是 X 的紧致子集族,对 $K, K' \in \mathscr{K}$ 若 $K \subset K'$ 则定义 $K < K'$,则 $<$ 使得 $\mathscr{K}$ 变成正向集.对 $K \subset K' \subset X$,由包含映射 $i_{K'K}: (X, X \setminus K') \subset (X, X \setminus K)$,诱导同态 $i_{K'K}^*: H^q(X, X \setminus K; G) \to H^q(X, X \setminus K'; G)$($G$ 为阿贝尔群),则 $\{H^q(X, X \setminus K; G), i_{K'K}^* \mid K \in \mathscr{K}\}$ 构成正向系.

定义 56　令 $H_c^q(X; G) := \varinjlim\limits_{K \in \mathscr{K}} H^q(X, X \setminus K; G)$,称为**具有紧支的奇异上同调**.

若 X 紧,则有 $H_c^q(X; G) = H^q(X; G)$.

定理 20(庞加莱对偶定理)　若 X 是定向 n- 维流形,G 是任意阿贝尔群,则对一切 q

$$H_c^q(X; G) \approx H_{n-q}(X; G)$$

定理 21　(亚历山大(Alexander)对偶定理)　设 X 为紧致、连通、定向 n- 维流

形,q 是一个整数,使得 $H_q(X;G)=H_{q+1}(X;G)=0$,则对任意闭子集 $A\subset X$,有

$$\check{H}^{n-q-1}(A;G)\approx H_q(X\setminus A;G).$$

定理 22（莱夫谢茨对偶定理）　设 X 为紧致、定向、n-维带边流形,边缘为 ∂M,则

$$H^q(X,\partial X;G)\approx H_{n-q}(X;G),H^q(X;G)\approx H_{n-q}(X,\partial X;G).$$

命题 42　设 X 为连通、定向 n-维流形,则 $H_c^n(X)\approx \mathbf{Z}$.

3° 微分拓扑学

3.1　映射空间 $C^r(M,N)$

3.1.1　$C^r(M,N)$ 上的弱拓扑与强拓扑

设 M、N 为 C^r 流形($r\in\mathbf{Z}_+:=\{0,1,\cdots\}$),$C^r(M,N):=\{f\mid f:M\to N$ 为 C^r 映射$\}$.

定义 1　设 $f\in C^r(M,N)$,令 (φ,U),(ψ,V) 分别是 M 和 N 上的图卡;令 $K\subset U$ 为紧集且满足 $f(K)\subset V$;令 $0<\epsilon<\infty$,定义 f 的弱亚基邻域 $\mathscr{N}^r_W(f;(\varphi,U),(\varphi,V),K,\epsilon)$ 为一切 C^r 映射 $g:M\to N$ 之集,g 满足条件:$g(K)\subset V$ 且对所有 $x\in\varphi(K)$ 和 $0\leqslant k\leqslant r$ 有 $\|D^k(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x)-D^k(\psi\circ g\circ\varphi^{-1})(x)\|<\epsilon$. 由 f 的这样的弱亚基邻域的有限交生成 f 的弱基邻域系,由这样的局部邻域系决定的 $C^r(M,N)$ 的拓扑,称为 $C^r(M,N)$ 上的**弱 C^r 拓扑**或**紧-开 C^r 拓扑**,$C^r(M,N)$ 带有此拓扑记为 $C^r_W(M,N)$.

当 M 不是紧空间时,弱拓扑不能很好地控制映射在紧集之外的性态,为此引进强 C^r 拓扑.

定义 2　设 $f\in C^r(M,N)$,令 $\Phi=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 为 M 的一个局部有限的图册,$\Psi=\{(\psi_\beta,V_\beta)\mid\beta\in B\}$ 为 N 的一个图册,$\mathscr{K}=\{K_\alpha\mid K_\alpha\subset M$ 紧$,\alpha\in A\}$ 满足 $K_\alpha\subset U_\alpha(\alpha\in A)$,对每一 $\alpha\in A$,存在 $\beta(\alpha)\in B$,使得 $f(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}$,$\epsilon=\{\epsilon_\alpha\mid\epsilon_\alpha$ 为正实数$,\alpha\in A\}$,对上述 $f,\Phi,\Psi,\mathscr{K},\epsilon$ 定义 f 的强基邻域 $\mathscr{N}^r_S(f;\Phi,\Psi,\mathscr{K},\epsilon)$ 为一切 C^r 映射 $g:M\to N$ 之集,g 满足条件:$g(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}(\alpha\in A)$ 且对所有 $x\in\varphi_\alpha(K_\alpha)$,$0\leqslant k\leqslant r$ 有 $\|D^k(\psi_{\beta(\alpha)}\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})(x)-D^k(\psi_{\beta(\alpha)}\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1})(x)\|<\epsilon_\alpha$. 一切这样的 $\mathscr{N}^r_S(f;\Phi,\Psi,\mathscr{K},\epsilon)$ 构成 f 的基邻域系,它所确定的 $C^r(M,N)$ 的拓扑称为**强 C^r 拓扑**,或**精细 C^r 拓扑**,或**惠特尼(Whitney)C^r 拓扑**,记为 $C^r_S(M,N)$.

设 X 是一个集合,$\{(Y_\lambda,\mathscr{T}_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是一族拓扑空间,$f_\lambda:X\to Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$. 以 $\varphi:=\{f_\lambda^{-1}(O_\lambda)\mid O_\lambda\in\mathscr{T}_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 为亚基生成的 X 上的拓扑称为 X 上关于拓扑族

$\{\mathscr{T}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和映射族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的**初始拓扑**,它是 X 上使得一切 f_λ 均连续的最粗拓扑.

定义 3 对 $C^\infty(M,N)$,令 $i_r: C^\infty(M,N)\to C^r_W(M,N)$ 表包含映射($r\in \mathbf{Z}_+$),则 $C^\infty(M,N)$ 上由拓扑空间族 $\{C^r_w(M,N)\}_{r\in\mathbf{Z}_+}$ 和映射族 $\{i_r\}_{r\in\mathbf{Z}_+}$ 生成的初始拓扑称为弱 C^∞ 拓扑,记作 $C^\infty_w(M,N)$.

定义 4 对 $C^\infty(M,N)$,令 $j_r: C^\infty(M,N)\to C^r_s(M,N)$ 为包含映射($r\in\mathbf{Z}_+$),则 $C^\infty(M,N)$ 上由拓扑空间族 $\{C^r_s(M,N)\}_{r\in\mathbf{Z}_+}$ 和映射族 $\{j_r\}_{r\in\mathbf{Z}_+}$ 生成的初始拓扑称为强 C^∞ 拓扑,或称惠特尼 C^∞ 拓扑,记为 $C^\infty_s(M,N)$.

3.1.2 映射的逼近

命题 1 C^r 浸入的集合 $\mathrm{Imm}^r(M,N)$ 是 $C^r_s(M,N)$ 中的开集,$r\geq 1$.

命题 2 C^r 淹没的集合 $\mathrm{Subm}^r(M,N)$ 是 $C^r_s(M,N)$ 中的开集,$r\geq 1$.

命题 3 M 在 N 中 C^r 嵌入的集合 $\mathrm{Emb}^r(M,N)$ 是 $C^r_s(M,N)$ 中的开集,$r\geq 1$.

设 X,Y 为拓扑空间,$f: X\to Y$,若对任意紧集 $K\subset Y$,有 $f^{-1}(K)\subset X$ 为紧集,则称 f 为正常映射.

命题 4 正常 C^r 映射 $M\to N$ 之集 $\mathrm{P_{rop}}^r(M,N)$ 是 $C^r_s(M,N)$ 中的开集,$r\geq 0$.

命题 5 设 M 和 N 是 C^r 无边流形($1\leq r\leq+\infty$),则从 M 到 N 上的 C^r 微分同胚之集 $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ 是 $C^r_s(M,N)$ 中的开集.

3.2 横 截 性

3.2.1 正则值与莫尔斯 - 萨德定理

设 M、N 分别为 m 维和 n 维 C^r 流形($r\geq 1$),$f: M\to N$ 为 C^k 映射($1\leq k\leq r$).

定义 5 若 $p\in M$,且 $\mathrm{rank}_p f<n$,则 p 称为 f 的**临界点**,以 $C_f\subset M$ 记 f 的临界点集;若 $\mathrm{rank}_p f=n$,则称 p 为 f 的**正则点**,$M\setminus C_f$ 为 f 的正则点集;对 $q\in N$,若 $f^{-1}(q)\cap C_f\neq\varnothing$,则 q 称为 f 的**临界值**,N 中非临界值的点称为 f 的**正则值**,$f(C_f)\subset N$ 为 f 的临界值集,$N\setminus f(C_f)$ 为 f 的正则值集.

对于流形,通过局部坐标,及欧氏空间的勒贝格测度,可以对流形的子集引入零测集的概念,它不依赖于流形上图卡的选择.

定理 1(莫尔斯 - 萨德(Morse-Sard)定理) 设 M、N 为 C^r 流形($r\geq 1$),$\dim M=m$,$\dim N=n$,$f: M\to N$ 为 C^k 映射($1\leq k\leq r$),若 $k>\max\{0,m-n\}$,则在 N 中 $\mathrm{mes} f(C_f)=0$,f 的正则值集为剩余集,从而在 N 中是稠密的.

定理 2(正则值原像定理) 设 M、N 是 C^r 流形($r\geq 1$),$f: M\to N$ 为 C^r 映射,$q\in f(M)$ 是 f 的正则值,则 $S:=f^{-1}(q)$ 是 M 的 C^r 正则子流形,且 $\dim S=\dim M-\dim N$.

这一定理是构造正则子流形的重要工具.

3.2.2　横截性定理

设 M,N 为微分流形，$f:M\to N$ 为可微映射，对任意 $p\in M$，则有 $T_pf:T_pM\to T_{f(p)}N$，此处 T_pM、$T_{f(p)}N$ 分别表流形 M、N 在 p、$f(p)$ 点处的切空间，T_pf 表 f 在 p 点处的切映射（若在 p 和 $f(p)$ 处引入局部坐标系，则 T_pf 即为 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)$ 处的微分 $(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}$，它是切空间之间的线性映射）.

定义 6　设 M,N 为 C^r 流形（$r\geqslant1$），$f:M\to N$ 为 C^k 映射（$1\leqslant k\leqslant r$），$A\subset N$ 为 C^r 正则子流形，$K\subset M$ 为子集，若对 $p\in K\cap f^{-1}(A)$ 有

$$T_pf(T_pM)+T_{f(p)}A=T_{f(p)}N,$$

则称 f 在 p 点横截于 A，记为 $f\pitchfork_pA$. 若 f 对 $K\cap f^{-1}(A)$ 的每一点均横截，则称 f 在 K 上横截于 A，记为 $f\pitchfork_KA$. 若 $f\pitchfork_MA$，称为 f 与 A 横截，简记为 $f\pitchfork A$. 注意，若 $K\cap f^{-1}(A)=\varnothing$，则认为上述横截性条件自动成立，也认为 $f\pitchfork_KA$ 成立. 定义 $\pitchfork_K^r(M,N;A):=\{f\in C^r(M,N)\mid f\pitchfork_KA\}$ 及 $\pitchfork^r(M,N;A):=\pitchfork_M^r(M,N;A)$.

定理 3（横截原像定理）　设 M、N 是 C^r 流形（$r\geqslant1$），$A\subset N$ 为 C^r 正则子流形，$f:M\to N$ 为 C^r 映射，若 $f\pitchfork A$ 且 $f^{-1}(A)\neq\varnothing$，则 $f^{-1}(A)$ 为 M 的正则子流形，且 $\mathrm{Codim}f^{-1}(A)=\mathrm{Codim}A$，这里 Codim 表子流形的余维数，即 $\mathrm{Codim}f^{-1}(A)=\dim M-\dim f^{-1}(A)$，$\mathrm{Codim}A=\dim N-\dim A$.

定理 4（托姆(Thom)横截性定理）　设 M、N 为 C^r 流形（$r\geqslant1$），$A\subset N$ 为闭正则子流形，$K\subset M$ 为闭子集，$f:M\to N$ 为 C^r 映射，且 $f\pitchfork_KA$. 则存在 C^r 映射 $g:M\to N$，使得

1° g 是 f 的强 $C^r-\mathscr{N}_s^r(f;\Phi,\Psi,\mathscr{K},\varepsilon)$ 逼近；

2° $g\pitchfork A$；

3° $g|_K=f|_K$.

定理 5　设 M 为 C^r 流形（$r\geqslant1$），N 为 C^r 带边流形，$A\subset N$ 为 C^r 正则子流形，则

1° $\pitchfork^r(M,N;A)$ 在 $C_s^r(M,N)$ 与 $C_W^r(M,N)$ 中都是剩余的，从而也是稠密的；

2° 若 $A\subset N$ 还是闭的，$K\subset M$ 为闭集（或紧致集），则 $\pitchfork_K^r(M,N;A)$ 在 $C_s^r(M,N)$（或 $C_W^r(M,N)$）中是稠密开子集.

定义 7　设 $M\subset N$ 为 C^r 正则子流形，则 M 关于 (N,M) 的一个 C^r 管状邻域是一个偶 (λ,ξ)，其中 $\xi=(E,M,\pi,\mathbf{R}^{n-m})$ 为一 C^r 向量丛（$n=\dim N$，$m=\dim M$），$\lambda:E\to N$ 为一 C^r-嵌入，使得

1° $\lambda|_M=\mathrm{id}_M$，其中 E 的零截面等同于 M，$\lambda(0_p)=p=\mathrm{id}_M(p)$；

2° $\lambda(E)$ 是 M 在 N 中的一个开邻域.

定理 6（管状邻域定理）　设 M、N 为 C^r 流形（$r\geqslant1$），$f:M\to N$ 为 C^r 嵌入，则存在 $f(M)$ 在 N 中的一个 C^r 管状邻域.

命题 6（唱片引理） 设 M、N 为 C^r 流形（$r \geqslant 1$），M 是紧致的，$\dim M = \dim N$. $f: M \to N$ 为 C^1 映射，若 $q \in N$ 为 f 的正则值且 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$，则

1° $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset M$ 为有限点集；

2° 存在 q 在 N 中的开邻域 V，使得 $f^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$，其中 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 是两两不相交的开集，$p_i \in U_i$，且 $f \mid U_i: U_i \to V$ 为 C^1 同胚（$1 \leqslant i \leqslant k$）.

3.2.3 映射度

以前曾讨论映射 $f: S^n \to S^n$ 的映射度，现在讨论同维流形间映射的映射度，这是拓扑学中重要的工具，有很多用途.

设 M 为紧致定向流形，$\mathscr{D}^+_M$ 为 M 的一个正定向微分结构，N 为连通定向流形，$\mathscr{D}^+_N$ 为 N 的一个正定向微分结构. 它们都是 C^r 流形（$r \geqslant 1$），且 $\dim M = \dim N$. 对 $f \in C^1(M, N)$，设 $q \in N$ 为 f 的正则值，$p \in f^{-1}(q) \neq \varnothing$. 则 $T_p f: T_p M \to T_{f(p)} N$ 为线性同构，设 $(\varphi, U) \in \mathscr{D}^+_M$，$(\psi, V) \in \mathscr{D}^+_N$ 分别为 p, q 的图卡，不妨设 $f(U) \subset V$，若 $\det D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) > 0$，则称 $T_p f$ 为保向的，若 $\det D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) < 0$，则称 $T_p f$ 为反向的，由定向微分结构的定义知 $T_p f$ 为保向或反向是无歧义的确定的，并不依赖于 $\mathscr{D}^+_M$ 与 $\mathscr{D}^+_N$ 中图卡 (φ, U) 与 (ψ, V) 的特殊选择. 当 $T_p f$ 保向时，记 $\deg_p f = 1$；当 $T_p f$ 反向时，记 $\deg_p f = -1$，$\deg_p f$ 称为 f 在 p 处的度.

定义 8 关于 M, N, f 的假设同上，若 $q \in N$ 为 f 的正则值，当 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ 时

$$\deg(f, q) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f,$$

当 $f^{-1}(q) = \varnothing$ 时，定义 $\deg(f, q) := 0$，$\deg(f, q)$ 称为 f 关于正则值 q 的**布劳威尔度**. 显然，反转 M 或 N 之一的定向，则 $\deg(f, q)$ 改变符号.

由唱片引理知 $\deg(f, q)$ 是 $N \setminus f(C_f)$ 上的局部常值函数，从而也是 $N / f(C_f)$ 的道路连通分支上的常值函数.

命题 7 设 M、N 为同维紧致、定向 C^1 流形，N 是连通的，$f: M \to N$ 为 C^1 映射，则 $\deg(f, q)$ 不依赖于 f 的正则值 q 的选取.

定义 9 命题7中与 q 无关的整数 $\deg(f, q)$，记为 $\deg f$，称为 f 的布劳威尔度.

命题 8 设 M, N 为同维、定向 C^1 流形，M 紧致，N 连通，若 C^1 映射 $f, g: M \to N$ 为 C^0 同伦，则 $\deg f = \deg g$.

命题 9 设 M, N 为 C^r 流形（$r \geqslant 1$），$f: M \to N$ 为连续映射，则 f 可由同伦于 f 的 C^1 映射 $g: M \to N$ 来逼近.

定义 10 设 M 为 C^1 紧致定向流形，N 为 C^1 连通定向流形，$\dim M = \dim N \geqslant 1$，$f: M \to N$ 为 C^0 映射，设 $g \in [f] \cap C^1(M, N)$，$[f]$ 表 f 的同伦类，则定义 f 的布劳威尔度为 $\deg f := \deg g$. 由上述命题 7, 8 和 9 知 $\deg f$ 是无歧义地定义了的.

定理 7（霍普夫定理） 设 M 为 m 维紧致、连通、定向、无边 C^1 流形（$m \geqslant 1$），$f, g: M \to S^m$ 为连续映射，则 $f \simeq g$ 的充要条件为 $\deg f = \deg g$；对任意 $n \in \mathbf{Z}$，存在连续映射 $f: M \to S^m$，使得 $\deg f = n$.

定理 8 设 M 为紧致、定向光滑流形，N 为连通、定向光滑流形，$\dim M = \dim N$

$= n$，$f: M \to N$ 为光滑映射，$\omega \in \Omega^n(N)$，由 $\mathrm{Supp}\,\omega \subset N$ 为紧集，$f^*\omega \in \Omega^n(M)$ 为 ω 的回拖形式，则

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega.$$

3.2.4 向量场与庞加莱-霍普夫定理

设 $U \subset \mathbf{R}^m$ 为开集，$v: U \to \mathbf{R}^m$ 为一光滑向量场，以 $z \in U$ 为孤立零点（亦称为向量场的奇点），定义映射

$$\overline{v}(x) := v(x)/\| v(x) \|,$$

则 $\overline{v}$ 将以 z 为中心的小球映到单位球中（这两球均由 $\mathbf{R}^m$ 的标准定向诱导定向），定义向量场 v 在零点 z 处的指数 $\mathrm{Ind}_z v := \deg \overline{v}$.

设 M，N 为同维光滑流形，$f: M \to N$ 为光滑同胚，$\tau_M := \{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(m, \mathbf{R}), \mathbf{R}^m\}$ 为 M 的切丛，M 上的向量场 X 就是切丛的一个截面. 由 f 诱导 $T_xf: T_xM \to T_{f(x)}N$（对任意 $x \in M$），对任意 $y \in N$，令 $V(y) := T_{f^{-1}(y)}f \circ X(f^{-1}(y)) \in T_yN$，则定义了 N 上的一个光滑向量场 V.

设 M 为一 m 维光滑定向流形，X 为 M 上的光滑向量场，p 为 X 的孤立零点，令 (φ, U) 为包含 p 的 M 的正定向图卡，且 X 在 U 中仅有零点 p，不妨设 $\varphi(p) = 0 \in \mathbf{R}^m$，则 $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m$ 为光滑同胚. 通过 φ 将 U 上的向量场 $X|_U$ 对应为 $\varphi(U)$ 上的向量场 V，0 是 $\mathbf{R}^m$ 中开集 $\varphi(U)$ 上的光滑向量场 V 的孤立零点，因而 $\mathrm{Ind}_0 V$ 有定义. 不难验证，整数 $\mathrm{Ind}_0 V$ 与 p 处正定向图卡 (φ, U) 的选择无关，因此

定义 11 光滑定向流形 M 上光滑向量场 X 在孤立零点 p 处的局部指数 $\mathrm{Ind}_p X$ 定义为 $\mathrm{Ind}_0 V$.

定理 9（庞加莱-霍普夫指数定理） 设 M 为一光滑紧致定向流形，X 为 M 上仅具孤立零点的光滑向量场（从而 X 的零点个数有限），则

$$\sum_{X(p)=0} \mathrm{Ind}_p X = \chi(M),$$

其中 $\chi(M)$ 为流形 M 的欧拉示性数.

3.3 莫尔斯理论

莫尔斯理论研究光滑流形上光滑实函数的临界点与流形拓扑的关系，是微分拓扑的重要分支.

定义 12 设 M 为 n 维光滑流形，$f: M \to \mathbf{R}$ 为 C^2 映射. 若 $T_pf: T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$ 为零映射（以后 T_pf 简记为 f_{*p} 或 f_*），则点 $p \in M$ 称为 f 的临界点. 即对 p 处的图卡 (φ, U) 及局部坐标系 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$ （$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ 实为 $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$ 的简写），$f(p)$ 是 f 的临界值. 当矩阵 $[\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p)]$ 是非异时，称临界点 p 是非退化的（临界点和它的非退化性是用局

部坐标系定义的,实际上它们与图卡(φ, U)的选择无关).否则临界点称为退化的.此矩阵称为函数f的黑塞(Hesse)矩阵.若f的所有临界点都是非退化的,称f为**莫尔斯函数**.

用A记f的黑塞矩阵,对$x \in \mathbf{R}^n$,则(Ax, x)是一个二次型,称为f在p点处的黑塞二次型,由于A是对称矩阵,故可通过非异线性变换,选取适当坐标$y^1, y^2, \cdots, y^n$,将(Ax, x)化为标准型:

$$(Ax, x) = -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \cdots + y_h^2 \quad (h \leqslant n),$$

λ称为f在点p的指数,$n - h$称为f在点p的零化数.这二个数都不依赖于p点处图卡(φ, U)的选择,当p为**非退化临界点**时,则$h = n$.

定理 10(莫尔斯引理)　设p是$f: M \to \mathbf{R}$的一个非退化临界点,则存在图卡(φ, U)及相应的局部坐标系$\{y^1, y^2, \cdots, y^n\}$,使得对一切$i$有$y^i(p) = 0$,并且在整个邻域$U$中有恒等式

$$f(q) = f(p) - (y^1(q))^2 - \cdots - (y^\lambda(q))^2 + (y^{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (y^n(q))^2,$$

其中$q \in U, \varphi(q) = (y^1(q), y^2(q), \cdots, y^n(q))$,$\lambda$为$f$在$p$处的指数.由此知$p$为$f$的孤立临界点.从而紧致流形上的莫尔斯函数仅有有限个临界点.

关于莫尔斯函数的存在性问题,有如下定理

定理 11　设M为光滑流形,则莫尔斯函数构成$C_S^r(M, \mathbf{R})(r \geqslant 2)$中的稠密开子集.

定理 12　设M为带紧致边界∂M的光滑流形,并且$\partial M = V_0 \cup V_1$,其中$V_0$,$V_1$是紧致的并且没有公共点.则存在莫尔斯函数$f: M \to I = [0,1]$,满足

1° 在∂M的某邻域内f没有临界点;

2° $f^{-1}(0) = V_0, f^{-1}(1) = V_1$;

3° f在不同的临界点上,它的函数值是各不相同的.

设$f: M \to \mathbf{R}$,令$M^a := \{p \in M \mid f(p) \leqslant a\} = f^{-1}(-\infty, a]$.利用莫尔斯函数$f$在临界点的指数的信息可以确定光滑流形$M$的同伦型.下述三个定理说明这一点.

定理 13　设f是流形M上的光滑实值函数,$a < b$.若集合$f^{-1}[a, b] = \{p \in M \mid a \leqslant f(p) \leqslant b\}$为紧致集,且不含$f$的任何临界点,则$M^a$微分同胚于$M^b$,此外,$M^a$是$M^b$的形变收缩核,所以包含映射$M^a \to M^b$是一个同伦等价.

定理 14　设$f: M \to \mathbf{R}$为一光滑函数,p是一个非退化临界点,其指数为λ,$f(p) = c$.假设:对某个$\epsilon > 0$,集合$f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$是紧致的,并且除点$p$外不再含有$f$的其他临界点.于是,当$\epsilon$充分小时,$M^{c-\epsilon}$粘上一个$\lambda$维胞腔$e^\lambda$后所得贴附空间$M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$为$M^{c+\epsilon}$的形变收缩核,从而,$M^{c+\epsilon} \simeq M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$.

定理 15　设f是流形M上的光滑函数,没有退化临界点,并且每个M^a都是紧致集,则M具有CW复形的同伦型:对于指数为λ的每个临界点,这个CW复形有一个λ维胞腔与之对应.

设M是紧致光滑流形,$f: M \to \mathbf{R}$是莫尔斯函数,C_f表f的临界点集,对$p \in C_f$,λ_p为它的指数,f的**莫尔斯级数**定义为

$$\mu_t(f):=\sum_{p\in C_f}t^{\lambda_p}=\sum_k m_k t^k.$$

设 F 是一个域,则 M 的**庞加莱级数**定义为

$$P_t(M):=\sum_k t^k \dim H^k(M;F)=\sum_k b_k t^k.$$

由于 M 是紧流形,这两个级数都是有穷级数.莫尔斯理论断言有

定理 16 莫尔斯级数 $\mu_t(f)$ 和庞加莱级数 $P_t(M)$ 满足

$$\mu_t(f)-P_t(M)=(1+t)Q(t),$$

$Q(t)=\sum a_k t^k$ 是一个具有非负系数 a_k 的多项式.

特别,定理 16 蕴含了

定理 17 (莫尔斯不等式) 设 $\dim M=n$,则

$$b_k-b_{k-1}+\cdots\pm b_0\leqslant m_k-m_{k-1}+\cdots\pm m_0\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

定理 17 蕴含了

定理 18 (弱性莫尔斯不等式) b_k,m_k 满足

$$b_k\leqslant m_k,\qquad k=0,1,\cdots,n,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k=\chi(M)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k m_k.$$

莫尔斯理论在数学及现代物理中有广泛的应用,博特(Bott)关于典型李群的同伦的周期性定理是突出的成果.酉群 $U(m)$,正交群 $O(m)$,辛群 $S_p(m)$ 分别有标准嵌入:$U(m)\subset U(m+1)$,$O(m)\subset O(m+1)$,$S_p(m)\subset S_p(m+1)$,从而构成群的正向系 $\{U(m)\}$,$\{O(m)\}$,$\{S_p(m)\}$,它们的正向极限是:

$$U(\infty):=\varinjlim_{m\to\infty}U(m),\quad \text{无限酉群};$$

$$O(\infty):=\varinjlim_{m\to\infty}O(m),\quad \text{无限正交群};$$

$$S_p(\infty):=\varinjlim_{m\to\infty}S_p(m),\quad \text{无限辛群}.$$

关于这些群的同伦群有如下结果,称为博特周期性定理.

定理 19 $U(\infty)$ 的同伦群有周期 2,即

$$\pi_n(U(\infty))\approx\pi_{n+1}(U(\infty)),\quad n\geqslant 0.$$

事实上,群

$\pi_0(U(\infty))\approx\pi_2(U(\infty))\approx\pi_4(U(\infty))\approx\cdots$ 是零群,而群

$\pi_1(U(\infty))\approx\pi_3(U(\infty))\approx\pi_5(U(\infty))\approx\cdots$ 是无限循环群.

定理 20 $O(\infty)$,$S_p(\infty)$ 的同伦群有周期 8,即对 $n\geqslant 0$ 有

$$\pi_n(O(\infty))\approx\pi_{n+8}(O(\infty)),$$

$$\pi_n(S_p(\infty))\approx\pi_{n+8}(S_p(\infty)),$$

并且有

$$\pi_n(S_p(\infty))\approx\pi_{n+4}(O(\infty)),$$

$$\pi_n(O(\infty))\approx\pi_{n+4}(S_p(\infty)).$$

这些同伦群实际上有如表 3-1 所示结果.

表 3-1

n mod 3	$\pi_n(O(\infty))$	$\pi_n(S_p(\infty))$
0	$\mathbf{Z}_2$	0
1	$\mathbf{Z}_2$	0
2	0	0
3	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
4	0	$\mathbf{Z}_2$
5	0	$\mathbf{Z}_2$
6	0	0
7	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$

3.4 示性类、广义上同调

3.4.1 万有丛和分类空间

设 $\xi = \{E, M, \pi, G, F, \mathscr{B}\}$ 为一 C^r 纤维丛.则对 $f: N \to M$,可以构造诱导丛 $f^*\xi = \{f^*E, N, \pi^*, G, F, \mathscr{B}^*\}$.注意,拉回有助于"简化"一个丛,因 ξ 的转换映射 $g_{\beta\alpha}$ 与 $f^*\xi$ 的转换映射 $g'_{\beta\alpha}$ 有如下关系:$g'_{\beta\alpha}(p) = g_{\beta\alpha} \circ f(p)$.因此,若映射很简单,例如 f 是常值映射,则不论 $g_{\beta\alpha}$ 如何复杂,$g'_{\beta\alpha}$ 总是常值映射.故拉回与丛的构造群 G 的化约有关,即丛 $f^*\xi$ 实际上可能只使用到 G 的一个子群 H 作为构造群.反过来问是否存在一个足够复杂的主 G-丛 $P_G = \{E_G, BG, \pi_G, G\}$,使得对任意主 G 丛 $\xi = \{E, M, \pi, G\}$,存在映射 $f: M \to BG$,使得 $\xi = f^*P_G$ 或 $\xi \approx f^*P_G$.丛 P_G 称为**万有 G 丛**,底空间 BG 被称为 G 的**分类空间**.上述拉回的存在性也等价于存在丛映射 $\tilde{f}: E \to E_G$ 覆盖了 f.下面我们来讨论万有丛的存在问题.设 X 是拓扑空间,若 $\pi_n(X) = 0$ 对一切 n 成立,则称 X 是同伦平凡的.

命题 10 设 $E \to B$ 为一主 G-丛,而其全空间 E 是同伦平凡的,则对在单纯复形(或 CW 复形)B_1 上的任一主 G-丛 $\pi: E_1 \to B_1$ 均有丛映射 $\tilde{f}: E_1 \to E$.

这样,全空间 E 同伦平凡的主 G-丛 $E \to B$ 是万有的,至少对于单纯复形上的丛是如此,由于微分流形均可单纯剖分,所以这一结果适用所有微分流形上的主 G-丛.若 E 仅是 n 连通的(对某个有限的 n),则它对于 $\dim B_1 \leqslant n+1$ 的单纯复形 B_1 上的主 G-丛 $E_1 \to B_1$ 也是万有的.设 $O(k) := O(k, \mathbf{R})$ 表实正交 k 阶方阵群.用 $G_k(m, \mathbf{R})$ 表 $\mathbf{R}^m$ 中通过原点的 k 维平面之集.它是一个 $k(m-k)$ 维 C^ω 流形,$G_k(m, \mathbf{R}) \cong O(m)/(O(k) \times O(m-k))$,称为**格拉斯曼**(Grassmann)**流形**.特别,$G_1(m, \mathbf{R})$ 即 $\mathbf{R}P^{m-1}$,$m-1$ 维实射影空间,类似地可以定义 $G_k(m, \mathbf{C})$,$G_k(m, \mathbf{H})$,它们满足:$G_k(m, \mathbf{C}) \cong U(m)/(U(k) \times U(m-k))$,$G_k(m, \mathbf{H}) \cong S_p(m)/(S_p(k) \times S_p(m-k))$.$\mathbf{R}^m$ 中正交归一 $k(\leqslant n)$ 标架的集合 $V_k(m, \mathbf{R})$ 称为**斯蒂弗尔**(Stiefel)

流形,它有 $V_k(m,\mathbf{R})\cong O(m)/O(m-k)$,注意,$\mathbf{R}^m$ 中每一个正交归一 k 标架属于一个唯一的 k 维线性子空间,故有自然投射:$V_k(m,\mathbf{R})\to G_k(m,\mathbf{R})$. $V_k(m,\mathbf{R})$ 上是 $G_k(m,\mathbf{R})$ 上的丛,其纤维和构造群都是 $O(k)$. $V_k(m,\mathbf{R})$ 是 $m-k-1$ 连通流形. 由典范嵌入:$\mathbf{R}^1\subset\mathbf{R}^2\subset\mathbf{R}^3\subset\cdots$;$G_k(k,\mathbf{R})\subset G_k(k+1,\mathbf{R})\subset G_k(k+2,\mathbf{R})\subset\cdots$;$V_k(k,\mathbf{R})\subset V_k(k+1,\mathbf{R})\subset V_k(k+2,\mathbf{R})\subset\cdots$,取正向极限,得 $\mathbf{R}^\infty:=\varinjlim_{k\to\infty}\mathbf{R}^k$;$G_k(\infty,\mathbf{R}):=\varinjlim_{m\to\infty}G_k(m,\mathbf{R})$;$V_k(\infty,\mathbf{R}):=\varinjlim_{m\to\infty}V_k(m,\mathbf{R})$. 则无限格拉斯曼流形 $G_k(\infty,\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^\infty$ 中所有 k 维线性子空间之集;无限斯蒂弗尔流形 $V_k(\infty,\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^\infty$ 中所有正交归一 k 标架之集. $V_k(\infty,\mathbf{R})\to G_k(\infty,\mathbf{R})$ 是以 $O(k)$ 为群的主丛,这是一个万有 $O(k)$- 丛.

设 $E\to B$ 是一个万有 G- 丛,E 是同伦平凡的,$H\subset G$ 为子群,则有主 H- 丛 $E\to E/H$,它是一个万有主 H- 丛. 由李群论中的彼得 - 外尔(Peter-Weyl)定理知,任意紧致李群 G 均可嵌入到某个正交群 $O(k)$ 中,所以上述结果对紧致李群 G 解决了万有丛的存在性问题.

设 $\xi=\{P,M,\pi,G\}$ 为一主 G- 丛,F 为一左 G 空间,作积 $P\times F$ 并定义 G 在其上的右作用为:$(p,f)\cdot g:=(p\cdot g,g^{-1}f)$,$(p,f)\in P\times F$,$g\in G$. 令 $P_F:=(P\times F)/G$,且投射 $\pi_F:P_F\to M$ 定义为复合 $P\times F\xrightarrow{pr_p}P\xrightarrow{\pi}M$,显然有 $\pi_F((p,f)G)=\pi(p)$. 这定义了纤维丛 $\xi[F]:=\{P_F,M,\pi_F,G,F\}$,底空间仍为 M,G 为构造群,F 为纤维,纤维 $\xi[F]$ 称为主丛 ξ 以 F 为纤维的伴丛.

令 $\mathscr{P}(B,G)$ 表空间 B 上所有主 G- 丛同构类之集,$\mathscr{B}(B,(G,F))$ 表 B 上以 G 为构造群、F 为纤维所有纤维丛的同构类之集.

命题 11 $\mathscr{B}(B,(G,F))\approx\mathscr{P}(B,G)$.

定理 21 设 M 为微分流形,G 为李群,$\xi(G)=\{E_G,BG,\pi_G,G\}$ 为万有主 G- 丛,以 BG 为分类空间,则 $\mathscr{P}(M,G)\approx[M,BG]$,而 $[M,BG]$ 表一切映射 $f:M\to BG$ 的同伦类的集合.

3.4.2 K- 理论

K- 理论可以看作是向量丛的上同调理论,它是最重要的广义上同调理论之一,这里广义的一词意指 K- 理论并不满足艾伦伯格 - 斯廷罗德上同调公理的全部.

设 M 为 n 维微分流形,考虑 M 上的实或复向量丛,令 I^j 表示秩为 j 的平凡向量丛,即 $I^j\approx M\times\mathbf{R}^j$ 或 $I^j\approx M\times C^j$,K 理论考察 M 上的所有向量丛,并将它们分成二种等价类. 先考虑第一种等价关系,设 E,F 均为 M 上的向量丛,若存在平凡丛 I^j 与 I^k,使得有丛同构:

$$E\oplus I^j\approx F\oplus I^k,$$

则称向量丛 E 和 F 是稳定等价的,记之为 $E\overset{s}{\sim}F$.

命题 12 设 E,F 和 G 都是 M 上的向量丛,若 $E\oplus G\approx F\oplus G$,则 $E\overset{s}{\sim}F$.

注意,由 $E\oplus G\approx F\oplus G$ 并不能推出 $E\approx F$,若用 $\mathrm{vect}(M)$ 表 M 上向量丛的

全体，则直和运算 $\oplus$ 提供了 Vect(M) 一个加法运算，但没能定义减法，从而 (Vect(M), $\oplus$) 构成一个阿贝尔半群. 然而，代数中有系统方法由阿贝尔半群造出一个阿贝尔群. 简介如下，设 $(S, +)$ 是一个加法半群，作积 $S \times S$，并在它上面定义等价关系 ~ 为：当且仅当存在 $u \in S$ 使得 $s_1 + t_2 + u = s_2 + t_1 + u$ 时，$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$. 定义 $G(S) := S \times S/\sim$，$G(S)$ 是一个加法群，并且偶 (s, t) 将看作形式差 $s - t$. 现在令 $(S, +)$ 是 (Vect(M), $\oplus$)，商 $G(S) := (\mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M))/\sim$，单个向量丛 E 对应的等价类记为 $[E]$，而 G(S) 的一般元素是 $[E] - [F]$，它对应于形式差 $E - F$.

定义 13 在 M 上向量丛 Vect(M) 的形式差的等价类的群 $K(M)$ 定义为

$$K(M) := (\mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M))/\sim .$$

定义 14 在 M 向量丛 Vect(M) 的一切稳定等价类的集合构成 M 的**约化 K-理论**，记作 $\widetilde{K}(M)$.

命题 13 群 $K(M) \approx \widetilde{K}(M) \oplus \mathbf{Z}$.

设 N, M 是二个流形，$\alpha: N \to M$ 为连续映射，则 α 诱导上同调环的同态 $\alpha^*: H^*(M; \mathbf{Z}) \to H^*(N; \mathbf{Z})$，类似地，设 E 为 M 上的丛，则 $F := \alpha^* E$ 为 N 上的拉回丛，从而诱导出同态（仍记为 α^*）$\alpha^*: K(M) \to K(N)$.

$K(M)$ 和 $\widetilde{K}(M)$ 都是加法群，在它们上面还可利用向量丛的张量积 $E \otimes F$ 诱导乘法运算，这一乘法运算关于加法是分配的，从而它们都有环结构.

命题 14 设 $\mathrm{Vect}_k(M)$ 表 M 上所有秩为 k 的实向量丛，则 $\mathrm{Vect}_k(M) \approx [M, G_k(\infty, \mathbf{R})] = [M, BO(k)]$. 这里 $BO(k)$ 是 $O(k)$ 的分类空间.

对于 M 上秩 k 的实、复、四元向量丛的集合分别记为 $\mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{R})$，$\mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{C})$、$\mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{H})$，对群 $O(k)$，$U(k)$，$S_p(k)$ 的分类空间分别为：$BO(k) = G_k(\infty, \mathbf{R})$；$BU(k) = G_k(\infty, \mathbf{C})$；$BS_p(k) = G_k(\infty, \mathbf{H})$，对应的 $\widetilde{K}$ 记为 $\widetilde{K}O(M)$，$\widetilde{K}U(M)$，$\widetilde{K}S_p(M)$.

定理 22 设 M 为实维数为 n 的微分流形，则

1° 当 $k > n$ 时，$\widetilde{K}O(M) = [M, BO(k)] \approx \mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{R})$；

2° 当 $k > \frac{n}{2}$ 时，$\widetilde{K}U(M) = [M, BU(k)] \approx \mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{C})$；

3° 当 $k > \frac{n}{4}$ 时，$\widetilde{K}S_p(M) = [M, BS_p(k)] \approx \mathrm{Vect}_k(M, \mathbf{H})$.

3.4.3 示性类

先介绍一般想法，设 BG 是群 G 的分类空间，E_G 是对应的万有丛，设 R 是一个有单位元的交换环，则 $H^*(BG; R)$ 表 BG 系数在 R 中的上同调环，生成元 $C_i \in H^*(BG; R)$ 称为**万有示性类**. 设映射 $f: M \to BG$，则对万有丛 E_G，$E := f^* E_G$ 是 f 在 M 上的诱导丛，由于 $f^*: H^*(BG; R) \to H^*(M; R)$，$C_i$ [illegible]，$f^* C_i \in H^*(M;$

R)称为属于丛 E 的示性类.

对于 G 为 $O(n)$ 及 $U(n)$ 情形,设 M 分别为实微分流形或复流形,它们的实或复维数为 n,取 $R = Z$ 为整数环.则由 $H^*(BO(n);\mathbf{Z})$ 或 $H^*(BU(n);\mathbf{Z})$ 分别诱导的示性类 $f^* C_i \in H^*(M;\mathbf{Z})$ 分别称为庞特里亚金(Pontryagin)类与陈[省身]类;对实的情形,取 $G = O(n)$, $R = \mathbf{Z}_2$,由 $H^*(BO(n);\mathbf{Z}_2)$ 的生成元拉回到 $H^*(M;\mathbf{Z}_2)$ 所得的示性类称为斯蒂弗尔 - 惠特尼类;当群 G 由 $O(n)$ 约化为 $SO(n)$(考虑定向流形),及 n 为偶数则导致欧拉类.

先从陈类开始.设 X 是一个拓扑空间,Vect$(X,\mathbf{C})$ 表 X 上一切复向量丛之集.$BU(k)$ 是 $U(k)$- 丛的分类空间,$E_{U(k)}$ 是 $BU(k)$ 上的万有丛,映射 $f: X \to BU(k)$,丛 $E := f^* E_{U(k)}$,因 $H^*(BU(k);\mathbf{Z})$ 有偶维生成元 $C_i(E_{U(k)}) \in H^{2i}(BU(k);\mathbf{Z})$,令 $C_i(E) := f^*(C_i(E_{U(k)})) \in H^{2i}(X;\mathbf{Z})$, $i = 1,2,\cdots,k$.

定义 15 $C_i(E)$ 称为 E 的陈[省身]类,并定义全陈类 $C(E) := 1 + C_1(E) + C_2(E) + \cdots + C_k(E)$.

命题 15 设 $E, F \in$ Vect$(X,\mathbf{C})$,则 E, F 的惠特尼和 $E \oplus F$ 的陈类满足 $C(E \oplus F) = C(E)C(F)$.

设 E 是一秩为 k 的向量丛,$L_1, L_2, \cdots, L_k$ 为线丛,且 $E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$.因 L_i 是线丛,所以 $C(L_i) = 1 + C_1(L_i)$,从而 $C(E) = C(L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k) = \prod_{i=1}^{k} C(L_i) = \prod_{i=1}^{k}(1 + x_i)$,其中 $x_i = C_1(L_i)$.由此得

命题 16 E 的陈类 $C_i(E)$ 可用诸 $x_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 表示如下:

$$C_1(E) = \sum_i x_i, \quad C_2(E) = \sum_{i<j} x_i x_j, \cdots,$$

$$C_j(E) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}, \cdots, C_k(E) = x_1 x_2 \cdots x_k.$$

由上看出 $C_i(E)$ 是诸 x_i 的初等对称函数.

定义 16 设 $E \in$ Vect$(X,\mathbf{C})$ 为秩 k 向量丛,E 的陈特征 ch(E) 定义为

$$\mathrm{ch}(E) := \sum_{i=1}^{k} e^{x_i}, \quad x_i = C_1(L_i).$$

陈特征 ch(E) 的表达式是一类母函数,事实上,由此知 ch(E) 是 x_i 带有系数 $1/i!$ 的有理线性组合.所以 ch$(E) \in H^*(X;Q)$.

命题 17 陈特征满足如下关系:

1° $\mathrm{ch}(E) = k + C_1(E) + \frac{1}{2}(C_1^2(E) - 2C_2(E)) + \cdots$;

2° $\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F)$;

3° $\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(F)$.

定义 17 令 $K(X)$ 表复 K- 理论,定义映射:ch: $K(X) \to H^*(X;Q)$, $[E] - [F] \mapsto \mathrm{ch}(E) - \mathrm{ch}(F)$.由于陈类 $c_i(E)$ 全是偶数维的,所以事实上有:ch: $K(X) \to \bigoplus_{i \geqslant 0} H^{2i}(X;Q)$.

定义 18 设 $E \in$ Vect$(X,\mathbf{C})$ 为秩 k 的复向量丛,$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, L_i

为线丛,则 E 的托德(Todd) 类 td(E) 定义为

$$\mathrm{td}(E):=\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{1-e^{-x_i}},\quad x_i=c_1(L_i).$$

命题 18 托德类满足 $\mathrm{td}(E\oplus F)=\mathrm{td}(E)$ 和 $\mathrm{td}(F)$. 并且 $\mathrm{td}(E)=1+\frac{1}{2}C_1(E)+\frac{1}{12}(C_1^2(E)+C_2(E))+\frac{1}{24}C_1(E)C_2(E)+\cdots$.

设 $V\in \mathrm{Vect}(X,\mathbf{R})$ 是一秩 k 的实向量丛,令 $V_{\mathbf{C}}:=V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 表示 V 的复化丛.

定义 19 实向量丛 V 的第 i 个庞特里亚金类 $p_i(V):=(-1)^iC_{2i}(V_{\mathbf{C}})\in H^{4i}(X;\mathbf{Z})$. 全庞特里亚金类 $p(V):=1+p_1(V)+\cdots+p_{[k/2]}(V)\in H^*(X;\mathbf{Z})$, $[k/2]$ 表示 $k/2$ 的整数部分.

命题 19 设 $V,W\in \mathrm{Vect}(X,\mathbf{R})$,则

$$p(V\oplus W)=p(V)p(W)\quad \mathrm{mod}H^*(X;\mathbf{Z})\text{中的二阶元素}.$$

设 $E\in \mathrm{Vect}(X,\mathbf{C})$,其秩为 k, E 的底实丛 E_r 的实秩为 $2k$,则 E 的全庞特里亚金类定义为 $p(E):=p(E_r)$,应用实丛 E_r 上 p_i 的定义(以下 $\bar{E}$ 表 E 的复共轭丛)有

$$p_i(E)=p_i(E_r)=(-1)^iC_{2i}(E_r\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})=(-1)^iC_{2i}(E\oplus\bar{E}),$$

由 $C(E\oplus\bar{E})=C(E)\cdot C(\bar{E})=(1+C_1(E)+\cdots+C_k(E))(1-C_1(E)+\cdots+(-1)^kC_k(E))$ 得

命题 20

1° 秩 k 的复向量丛 E 的庞特里亚金类与陈类有如下关系:

$p_1(E)=C_1^2(E)-2C_2(E)$, $p_2(E)=C_2^2(E)-2C_1(E)C_3(E)+2C_4(E),\cdots$,

$$p_i(E)=\sum_{j=0}^{2i}(-1)^{j-i}C_j(E)C_{2i-j}(E);$$

2° 若 $E=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_k$, L_i 为线丛,则

$$p_1(E)=\sum_i x_i^2,\ p_2(E)=\sum_{i<j}x_i^2x_j^2,\cdots,p_k(E)=x_1^2x_2^2\cdots x_k^2,\ x_i=C_1(L_i).$$

设 V 是一个在定向流形 X 上的秩为 k 的实向量丛,由于 X 可定向, V 的构造群由 $O(k)$ 约化为 $SO(k)$,即 $\xi=\{V,X,\pi,SO(k),\mathbf{R}^k\}$,将 X 等同于全空间 V 的零截面,令 $V_0:=V\setminus X$,对任意 $x\in X$, ξ_x 表 x 上的纤维,设 $\xi_x\cong\mathbf{R}^k$ 为保持定向的同胚,则诱导同构:

$$H^k(\xi_x,\xi_x\setminus\{0\};\mathbf{Z})\approx H^k(\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^k\setminus\{0\};\mathbf{Z})\approx\mathbf{Z}.$$

取 $H^k(\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^k\setminus\{0\};\mathbf{Z})$ 的一个生成元 u,由上之同构唯一决定了 $H^k(\xi_x,\xi_x\setminus\{0\};\mathbf{Z})$ 的一个生成元 U_x,称为纤维 ξ_x 的定向类.

定理 23 (托姆(Thom)同构定理) 设 $\xi=\{V,X,\pi,SO(k),\mathbf{R}^k\}$ 为 X 上的定向向量丛.则存在唯一的上同调类 $U(\xi)\in \mathbf{H}^k(V,V_0;\mathbf{Z})$,使得

1° $U(\xi)$ 在每一纤维 ξ_x 上的限制恰为 U_x;

2° 映射 $H^i(X;\mathbf{Z})\mapsto H^{i+k}(V,V_0;\mathbf{Z})\quad x\mapsto\pi^*(x)\smile U(\xi)$ 是一个同构.

上同调类 $U=U(\xi)$ 称为 ξ 的托姆类.

定义 20 设 $\xi=\{V,X,\pi,SO(k),\mathbf{R}^k\}$ 为一定向向量丛, $\sigma:X\to V$ 为零截面映

射,称

$$e(\xi):=\sigma^*(U(\xi))\in H^k(X;\mathbf{Z})$$

为 ξ 的欧拉类,$e(\xi)$ 亦记为 $e(V)$.

命题 21

1° 若定向向量丛 V 的秩 k 为偶数,则 $e^2(V)=p_{k/2}(V)$;

2° 设 V,W 为 X 上两个实的定向向量丛,则 $e(V\oplus W)=e(V)e(W)$.

定义 21 设 $E\in \mathrm{Vect}(X,\mathbf{C})$ 的秩为 k,E_r 表 E 的底实向量丛,则定义 E 的欧拉类为

$$e(E):=e(E_r)$$

命题 22 设 $E\in \mathrm{Vect}(X,\mathbf{C})$ 秩为 k,则

$$e(E)=C_k(E).$$

3.5 关于低维流形分类的某些结果

3.5.1 一维和二维流形的分类

关于一维光滑流形有

定理 24 任一光滑连通的一维流形或者微分同胚于圆周 S^1,或者微分同胚于 $\mathbf{R}^1$ 的某一区间.

定义 22 设 W 和 W' 为两个 n 维流形,设(φ,U)、(ψ,V) 分别为 W、W' 上的两个图卡,$\varphi:U\xrightarrow{\cong}\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$,$\psi:V\xrightarrow{\cong}\psi(V)\subset\mathbf{R}^n$,$\varphi(U)$,$\psi(V)$ 均为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,不妨设 $\varphi(U)\supset D$,$\psi(V)\supset D$,其中 $D:=\{x\in\mathbf{R}^n\mid \|x\|\leqslant 1\}$,令 $\tilde{D}:=\varphi^{-1}(D)\subset U$,$\tilde{D}':=\psi^{-1}(D)\subset V$.$\partial\tilde{D}=S$,$\partial\tilde{D}'=S'$,$S\cong S^{n-1}\cong S'$,令 $\alpha:S'\to S$ 为一同胚映射,则 W 与 W' 的连通和 $W\# W'$ 定义为贴附空间$(W\setminus\mathrm{int}(\tilde{D}))\cup_\alpha(W'\setminus\mathrm{int}(\tilde{D}'))$.

定义 23 $T_0:=S^2$ 为球面,$T_1:=S^1\times S^1$ 称为环面,$T_{p+1}:=T_p\# T_1$,T_p 称为亏格为 p 的可定向曲面($p\geqslant 0$).设 M 表默比乌斯(Möbius)带,它的边界 ∂M 同胚于 S^1,D 表 2 维圆盘,它的边界 ∂D 也同胚于 S^1,作 ∂M 与 ∂D 之间的一个同胚,得贴附空间 $D\cup M$,此空间同胚于实射影平面 $\mathbf{RP}^2$,记为 U_1,归纳定义 $U_{q+1}:=U_q\# U_1$,U_q 称为亏格为 q 的不可定向曲面($q\geqslant 1$).

用莫尔斯理论证明了

定理 25 任一连通、紧致、无边二维流形或同胚于 T_p($p\geqslant 0$),或同胚于 U_q($q\geqslant 1$).

命题 23 T_p 与 U_q 的欧拉示性数为

$$\chi(T_p)=2-2p;\quad \chi(U_q)=2-q.$$

3.5.2 3维流形的莫尔斯函数与赫戈(Heegaard)分裂

设M^3是一个定向、连通、闭(即紧致且无边)、3-维光滑流形,$f: M^3 \to \mathbf{R}$是一个莫尔斯函数,满足如下条件:恰有一个极小点p和一个极大点p'.其他临界点的指数为1或2,并且临界值随着临界点指数的增加而增加(这样的函数称为斯梅尔(Smale)函数,它的存在性是已经证明了的),事实上,可以设f满足$f(M) = [0,1]$,$f(p) = 0, f(p') = 1$,所有指数为1的临界点都在水平面$f = \frac{1}{3}$上,所有指数为2的临界点都在水平面$f = \frac{2}{3}$上.由庞加莱对偶定理可以推知流形M^3的贝蒂数$\beta_1 = \beta_2$,并且莫尔斯函数f的指数为1的临界点数m_1等于指数为2的临界点数m_2,记$q = m_1 = m_2$.考察水平面$\{x \in M^3 \mid f(x) = \frac{1}{2}\}$,因为在此曲面上不存在临界点,$\frac{1}{2}$是$f$的正则值,所以$M^2 := \{x \in M^3 \mid f(x) = \frac{1}{2}\} \subset M^3$是一个2维、闭、光滑子流形,并且是连通的(由于$f$仅有一个极小点和一个极大点),可定向的(它是可定向带边流形$\{x \in M^3 \mid 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}\}$的边界).故根据闭2-维流形的分类定理,$M^2$同胚于$T_r$,将$M^2$记成$M_r^2$,它是亏格为$r$,即有$r$个柄的定向闭曲面,$M_r^2$是两个3-维带边流形

$$\Pi_1 := \{x \in M^3 \mid 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}\}, \quad \Pi_2 := \{x \in M^3 \mid \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1\}$$

的公共边界.由用莫尔斯函数的临界点的指数刻划流形的同伦型的定理知

$$\Pi_1 \simeq \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{q\text{个}}; \quad \Pi_2 \simeq \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{q\text{个}}$$

因此,Π_1和Π_2都是有$\mathbf{R}^3$中闭区域的同伦型,区域的边界是亏格$q = r$的定向闭曲面(这样的带边流形同胚于有r个柄的实心柄体),这两个边界曲面粘合起来就得到M^3.

定义 24 一个3维流形M^3分解为两个亏格为r的柄体,沿着它们的边界通过一个微分同胚$\alpha: M_r^2 \to M_r^2$粘合起来.这样一种分解称为M^3的(亏格为r的)赫戈分裂,$M^3 = \Pi_1 \cup_\alpha \Pi_2$.

显然,微分同胚α起了关键的作用,这流形用$M^3(\alpha)$表之.显然,若α_1, α_2在微分同胚$M_r^2 \to M_r^2$的类中同伦,则$M^3(\alpha_1)$微分同胚于$M^3(\alpha_2)$.

定理 26 每一个可定向、连通、闭的3-维光滑流形M^3均有赫戈分裂表示(不唯一),$M^3(\alpha) = \Pi_1 \cup_\alpha \Pi_2$.

定理 27 一个可定向、闭、光滑3-维流形若容许一个亏格为1的赫戈分裂,则它同胚于(从而也微分同胚于)如下流形之一:

1° 3-维球S^3;

2° $S^1 \times S^2$;

3° 透镜空间$L_m^3(1,k)$,其中$(m,k) = 1$.

上述定理中的透镜空间 $L_m^3(1,k)$ 定义为 $\mathbf{Z}_m$ 在 $S^3:=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2 \mid |z|^2+|w|^2=1\}$ 上作用的轨道空间 $S^3/\mathbf{Z}_m$，其中 $\mathbf{Z}_m$ 的生成元 1 按如下公式作用在 S^3 上：$(z,w)\mapsto(e^{2\pi i/m}z, e^{2\pi ik/m}w)$.

对于具有亏格 $r>1$ 的赫戈分裂 $M^3(\alpha)$ 的 3-维流形，并不知道上述那样的分类定理.

3.5.3 关于 4-维流形分类的几个定理

设 M 是一个单连通拓扑 4-维流形，可定向的并且已经指定了一个定向. 这相当于在 M 的最高维同调群 $H_4(M;\mathbf{Z})$ 指定了一个称为基本类的生成元 $[M]$. 在 M 的上同调环上可以构造一个称为**相交形式**的对称双线性形式 ω 如下，若 $\alpha,\beta\in H^2(M,\mathbf{Z})$，则上积 $\smile: H^2(M;\mathbf{Z})\times H^2(M;\mathbf{Z})\to H^4(M;\mathbf{Z})$，定义

$$\omega(\alpha,\beta):=(\alpha\smile\beta)[M]\in\mathbf{Z}.$$

所以 $\omega: H^2(M;\mathbf{Z})\times H^2(M;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z}$ 为对称双线性形. 并且根据庞加莱对偶定理，形式 ω 是幺模的(即 ω 的任何矩阵表示的行列式等于 ± 1). 若 ω 的对角元都是偶数(这等价于，对所有 $\alpha\in H^2(M;\mathbf{Z})$，$\omega(\alpha,\alpha)\in 2\mathbf{Z}$)，形式 ω 称为偶型的，否则，称为奇型的.

定理 28 (弗里德曼(Freedman)定理) 给定一个幺模偶形式，则恰恰存在一个单连通、闭、拓扑 4-维流形，它的相交形式 ω 用此给定形式表示；给定一个幺模奇形式，则恰恰存在两个单连通、闭、拓扑 4-维流形，它们的相交形式 ω 都由此给定形式表示.

这是一个非常有力的结果，说明相交形式 ω 几乎完全确定了闭的单连通 4-维拓扑流形的同胚类.

而关于单连通、闭、4-维光滑流形的情形与拓扑情形大不相同. 对于 4-维流形 M 的相交形式 ω 若为定号的，则适当选取 M 的定向，即适当选取 $H_4(M;\mathbf{Z})$ 的生成元 $[M]$，就可使 ω 为正定的.

定理 29 (唐纳森(Donaldson)定理) 一个单连通、闭、光滑 4-维流形，若它的相交形式 ω 是正定的，则在整数环 $\mathbf{Z}$ 上，ω 等价于对角形式 $\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$.

由此定理可知任何非零偶型正定形式都不是一个单连通、闭、光滑 4-维流形的相交形式. 结合前述弗里德曼定理即知存在很多单连通、闭、拓扑 4-维流形，在它上面不存在微分结构. 但这是指紧致流形，对非紧流形有

定理 30 (奎因(Quinn)定理) 任意非紧 4-维流形均可光滑化.

定理 31 在 $\mathbf{R}^4$ 上存在怪的光滑结构，即有 4-维光滑流形，它同胚于标准的 $\mathbf{R}^4$，但不微分同胚于标准的 $\mathbf{R}^4$.

注意，这是 4-维特有的情况，人们早就知道对任意 $\mathbf{R}^n\,(n\neq 4)$，则 $\mathbf{R}^n$ 上只有一种微分结构，即标准的微分结构.

定理 32 (冈普夫(Gompf)定理) 在 $\mathbf{R}^4$ 上存在连续那样多种互不微分同胚的怪微分结构.

凡此种种说明 4-维流形有很多特异之处.

参 考 文 献

1 熊金城编.点集拓扑讲义.北京:人民教育出版社,1982.

2 J.L.凯莱著.一般拓扑学.吴从炘,吴让泉译.北京:科学出版社,1982.

3 蒲保明,蒋继光,胡淑礼编.拓扑学.北京:高等教育出版社,1985.

4 J.R.曼克勒斯著.拓扑学基本教程.罗嵩龄,许依群,徐定宥等译.北京:科学出版社,1987.

5 沙爱福,施雷发著.拓扑学.江泽涵译.上海:商务印书馆,1949.

6 江泽涵.拓扑学引论.上海:上海科学技术出版社,1979.

7 A.格拉曼著.曲面拓扑学.张耀成译.北京:科学出版社,1981.

8 Armstrong M A 著.基础拓扑学.孙以丰译.北京:北京大学出版社,1983.

9 I.M.辛格,J.A.索普著.拓扑与几何学基础讲义.干丹岩译.上海:上海科学技术出版社,1985.

10 李元熹,张国梁编.拓扑学.上海:上海科学技术出版社,1986.

11 陈吉象编.代数拓扑基础讲义.北京:高等教育出版社,1987.

12 C.T.C.Wall 著.季文铎,张增喜译.拓扑学的几何导引.北京:高等教育出版社,1988.

13 何伯和,廖公夫.基础拓扑学.北京:高等教育出版社,1991.

14 Ю.Г.鲍里索维奇,Н.М.勃利兹尼亚科夫,Я.А.伊兹拉依列维奇等.拓扑学导论.盛立人,金成桴,吴利生等译.北京:高等教育出版社,1992.

15 尤承业编著.基础拓扑学讲义.北京:北京大学出版社,1997.

16 P.J.希尔顿著.同伦论.刘华译.北京:科学出版社,1960.

17 吴文俊.可剖形在欧氏空间中的实现问题.北京:科学出版社,1978.

18 J.米尔诺著.莫尔斯理论.江嘉禾译.北京:科学出版社,1988.

19 徐森林,薛春华.流形.北京:高等教育出版社,1991.

20 张筑生编著.微分拓扑讲义.北京:北京大学出版社,1996.

21 徐森林.微分拓扑.天津:天津教育出版社,1997.

22 Dugundji J. Topology. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

23 Engelking R. General topology. Warszawa: PWN, 1977.

24 Hocking J C, Young G S. Topology. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1961.

25 Fulton W. Algebraic topology, A First Course. New York: Springer-Verlag, 1995.

26 Alexandroff P, Hopf H. Topologie. Berlin: Springer-Verlag, 1935.

27 Lefschetz S. Algebraic topology. American Mathematical Society Colloquium Series. Vol. 27. New York, 1942.

28 Eilenberg S, E. Steenrod N. Foundations of algebraic topology. Princeton: Princeton University Press, 1952.

29 Rotman J. J. An introduction to algebraic topdogy. New York: Springer Verlag, 1988.

30　Munkres J R. Elements of algebraic topology. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1984.
31　Maunder C R F. Algebraic topologg. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
32　Adams J F. Algebraic topology: a student's guide Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
33　Hilton P J, Wylie S. Homology theory; an introduction to algebraic topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
34　Dold A. Lectures on algebraic topology. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
35　Hu S-T. Homotopy theory. New York: Academic Press, Inc, 1959.
36　Whitehead. G W. Elements of homotopy theory. New York: Springer-Verlag, 1978.

·近代数学卷·

第5篇

流形上的微积分

编　者　徐森林
审校者　陆柱家

目　　录

引　言

在研究欧几里德(Euclid)空间中大量的光滑曲线、光滑曲面的基础上，人们引进了局部坐标和 C^r 微分流形的概念. 局部坐标的引入，使得可用微分学的知识，介绍 C^r 微分流形之间映射的可微性和浸入、嵌入、微分同胚等重要概念，进而在 n 维 A_2 的 C^r 微分流形上可证明 C^r 单位分解的存在性定理. 应用此定理立得惠特尼(H. Whitney)嵌入定理(一个 n 维 A_2 的 C^r 微分流形可以 C^r 嵌入到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中作为它的闭正则子流形).

为建立 C^∞ 映射 $f: M_1 \to M_2$ 在 p 点处的微分或雅可比(C. G. J. Jacobi)映射 $f_{*p} = df|_p$，必须在一点处线性化，即引进切向量和切空间 T_pM 的概念. 将 M 上的切空间族按一定方式使其成为切丛 TM. 切丛上的 C^k 截面就是 M 上的 C^k 切向量场. 研究 C^∞ 切向量场与积分曲线之间的关系是很重要的.

切丛将使更多的代数构造渗入流形，从而使流形进一步代数化. n 次 C^∞ 外微分形式 ω(反称协变张量场)经 C^∞ 单位分解在 n 维 C^∞ 定向流形 M 上定义外微分形式的积分(第二型曲线、曲面积分的推广)$\int_M \omega$. 再引进外微分运算 d 和边界流形 ∂M 的诱导定向流形 $\overrightarrow{\partial M}$，对 $n-1$ 次 C^∞ 外微分形式 ω 有极其重要的斯托克斯(Stokes)定理 $\int_M d\omega = \int_{\overrightarrow{\partial M}} \omega$. 应用单位分解或惠特尼嵌入定理还可证明 n 维 A_2 的 C^r 微分流形 M 上存在 C^r 黎曼(Riemann)度量 g，使得(M, g)成为 C^r 黎曼流形. 于是，长度、面积、体积、第一型积分以及欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的许多微积分内容都可自然地搬到流形上.

1　微分流形

1.1　微分流形

1.1.1　拓扑空间

设 M 为非空集合，如果它的子集族 τ 满足:

1° $M, \varnothing \in \tau$;

2° 若 $U_1, U_2 \in \tau$，则 $U_1 \cap U_2 \in \tau$;

3° 若 $U_\alpha \in \tau, \alpha \in \Gamma$(指标集)，$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha \in \tau$，则称 τ 为 M 上的一个拓扑，而$(M,$

τ)为 M 上的一个**拓扑空间**. τ 中的元素 U 称为(M,τ)的开集,开集 U 的余(补)集 $U^c = M - U$ 称为(M,τ)的闭集.

设 $A \subset M, x \in M$,如果对 x 的任何开邻域(含 x 的开集)U,必有 $a \in A \cap (U - \{x\})$,则称 x 为 A 的聚点(或极限点).记 A' 为 A 的聚点的全体,称为 A 的导集. $A - A'$ 中的点称为 A 的孤立点.称 $\bar{A} = A \cup A'$ 为 A 的闭包.易知

$$A \text{ 为闭集} \Leftrightarrow A' \subset A \Leftrightarrow \bar{A} = A.$$

1.1.2 T_2(豪斯多夫)空间和 A_2(具有第二可数性公理)空间

设(M,τ)为拓扑空间,如果对任何 $x, y \in M, x \neq y$,必存在 x 的开邻域 U 和 y 的开邻域 V,使得 $U \cap V = \varnothing$,则称(M,τ)为 T_2(豪斯多夫)空间.

设 τ' 为 M 的一个子集族,如果它满足:

1° $\bigcup\limits_{U \in \tau'} U = M$;

2° 若 $U, V \in \tau', x \in U \cap V$,则存在 $W \in \tau'$ 使得 $x \in W \subset U \cap V$,

则称 τ' 为 M 的一个拓扑基.如果拓扑 $\tau = \{U \mid U$ 为 τ' 的若干成员的并集$\}$,则称拓扑 τ 是由拓扑基 τ' 所诱导的拓扑;而 τ' 也称为拓扑空间(M,τ)的一个拓扑基.

如果拓扑空间(M,τ)具有可数拓扑基 $\tau' = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$,其中 Γ 为有限集或可列集(与自然数集 $\mathbf{N}$ 一一对应的集合),则称(M,τ)为 A_2 空间.

例 1 设(M,ρ)为度量空间,$\rho: M \times M \to \mathbf{R}$(实数集)为距离函数,即满足:

1° $\rho(x,y) \geqslant 0$ 且 $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$(正定性);

2° $\rho(x,y) = \rho(y,x)$(对称性);

3° $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(x,z)$(三角形不等式).

易证 M 的子集族

$\tau_\rho = \{U \mid \forall x \in U$,存在 $\delta > 0$,使得开球 $B(x,\delta) = \{y \mid y \in M, \rho(x,y) < \delta\} \subset U\}$

为 M 上的一个拓扑,(M,τ)为由 ρ 诱导的拓扑空间.显然,开球体 $B(x,\delta)$ 为(M,τ_ρ)的开集. $\{B(x,\delta) \mid x \in M, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\}$ 为(M,τ_ρ)的一个拓扑基.

例 2 设(M,τ)为拓扑空间,$A \subset M$.易证

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$$

为 A 上的一个拓扑,(A,τ_A)称为(M,τ)的子拓扑空间.

例 3 设 $\mathbf{R}^n = \{(x^1, x^2, \cdots, x^n) \mid x^i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 n 维欧几里德空间,定义距离函数为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right]^{1/2},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^n), \boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in \mathbf{R}^n.$$

根据例 3,($\mathbf{R}^n,\rho$)自然诱导出 $\mathbf{R}^n$ 上通常的拓扑空间($\mathbf{R}^n,\tau_\rho$).

因为对任何 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$,有 $\boldsymbol{x}$ 的开邻域 $B(\boldsymbol{x},\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/2)$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的开邻域 $B(\boldsymbol{y},\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/2)$,使得

$$B(x,\rho(x,y)/2) \cap B(y,\rho(x,y)/2) = \varnothing,$$

所以，$(\mathbf{R}^n,\tau_\rho)$ 为 T_2 空间.

此外，易见 $\tau' = \{B(x,\delta) \mid x = (x^1,x^2,\cdots,x^n) \in Q^n, \delta \in Q$(有理数集)，$\delta > 0\}$ 为 $(\mathbf{R}^n,\tau_\rho)$ 的可数拓扑基，从而 $(\mathbf{R}^n,\tau_\rho)$ 为 A_2 空间.

例 4　设 (M,ρ) 为度量空间，它诱导的拓扑空间为 (M,τ_ρ)，而 $A \subset M$. 不难验证 $(\tau_\rho)_A = \tau_{\rho|_A}$. 应注意的是 A 中开球 $B_A(x,\delta) = \{y \in A \mid \rho(x,y) < \delta\} = A \cap B(x,\delta)$.

1.1.3　连续映射和同胚映射

设 (M_1,τ_1) 和 (M_2,τ_2) 为拓扑空间，$f: M_1 \to M_2$ 为映射，$x_0 \in M_1$，$y_0 = f(x_0) \in M_2$. 如果对 $y_0 = f(x_0)$ 的任何开邻域 V，必有 x_0 的开邻域 U，使得 $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subset V$，则称 f 在点 x_0 连续. 如果 f 在 M_1 的每一点都连续，则称 f 为连续映射. 从连续的定义和拓扑的性质立即有

f 连续 $\Leftrightarrow$ 对 (M_2,τ_2) 的任何开集 V，必有 $f^{-1}(V) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in V\}$ 为 (M_1,τ_1) 的开集 $\Leftrightarrow$ 对 (M_2,τ_2) 的任何闭集 F，必有 $f^{-1}(F) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in F\}$ 为 (M_1,τ_1) 的闭集.

如果 $f: M_1 \to M_2$ 为一一映射，且 f 和 f^{-1} 都为连续映射，则称 f 为同胚(或拓扑)映射.

1.1.4　拓扑流形

设 M 为 T_2 豪斯多夫空间. 如果对任何 $p \in M$，都存在 p 在 M 中的开邻域 U 和同胚 $\varphi: U \to \varphi(U)$，其中 $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ 为开集(局部欧)，则称 M 为 n 维**拓扑流形**或 C^0 流形。

(U,φ) 称为局部坐标系(坐标卡，图片)，U 称为局部坐标邻域，φ 称为局部坐标映射，$x^i(p) = (\varphi(p))^i$，$1 \leqslant i \leqslant n$ 为 $p \in U$ 的局部坐标，简记为 $\{x^i\}$，有时也称它为局部坐标系. 拓扑流形就是由局部坐标系的全体 $\mathscr{D}^0$ 中的图片粘成的图册. 如果 $p \in U$，则称 (U,φ) 为 p 的局部坐标系.

1.1.5　微分流形

设 $(M,\mathscr{D}^0)$ 为 n 维拓扑流形，Γ 为指标集，如果 $\mathscr{D} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\} \subset \mathscr{D}^0$ 满足：

1° $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha = M$；

2° 相容性：如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$(U_\beta,\varphi_\beta) \in \mathscr{D}$，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 C^r 类的，即

$$\begin{cases} y^1 = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,x^2,\cdots,x^n); \\ \quad\cdots \\ y^n = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_n(x^1,x^2,\cdots,x^n) \end{cases}$$

是 C^r 类的，$r \in \{1,2,\cdots,\omega\}$（$1 \leqslant r < \infty$，$C^r$ 表示 $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_i$ 有直至 r 阶连续偏导数；C^∞ 表示 $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_i$ 有各阶连续的偏导数；C^ω 表示 $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_i$ 在每一点可展开成收敛的幂级数）；

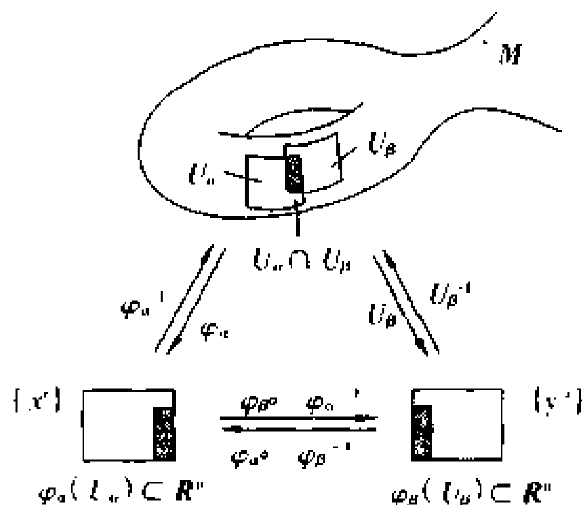


图 1-1

3° 最大性：$\mathscr{D}$ 关于 2° 是最大的，也就是说，如果 $(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0$，且它与任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \mathscr{D}$ 是 C^r 相容的，则 $(U,\varphi) \in \mathscr{D}$.

称 $\mathscr{D}$ 为 M 上的 C^r（微分）构造，$(M,\mathscr{D})$ 为 M 上的 C^r（微分）流形．当 $r = \omega$ 时，称 $(M,\mathscr{D})$ 为实解析流形（图 1-1）．

类似拓扑流形，C^r 微分流形就是由 $\mathscr{D}$ 中图片光滑（C^r，$r \geqslant 1$）粘成的图册．

容易看出，2° 中相应的雅可比行列式

$$\frac{\partial(y^1,y^2,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)} \neq 0.$$

为得到微分构造，有

定理 1　设 $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}^0$ 满足 1° 和 2°，则它唯一确定了一个 C^r 微分构造（$r \geqslant 1$）$\mathscr{D} = \{(U,\varphi) \in \mathscr{D}^0 \mid (U,\varphi)$ 与 $\mathscr{D}'$ C^r 相容$\}$．显然，$\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$（称 $\mathscr{D}'$ 为 $\mathscr{D}$ 的一个基）．

进而，设 $\mathscr{D}_1', \mathscr{D}_2' \subset \mathscr{D}^0$ 满足 1° 和 2° 且彼此的元素 C^r 相容，则它们所确定的 C^r 微分构造是相同的，即 $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$.

例 5　设 M 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$\mathscr{D}' = \{(M,\mathrm{Id}_M) \mid \mathrm{Id}_M : M \to M, \mathrm{Id}_M(p) = p\}$，则由 $\mathscr{D}'$ 唯一确定了一个 C^ω 流形（由定理 1，它也唯一确定了一个 C^r 流形，$r \in \{0,1,2,\cdots,\infty\}$，但当 r 增大时，坐标卡严格减少）．

例 6　设 $(M,\mathscr{D}_M)$ 为 n 维 C^r 流形，$U \subset M$ 为开集，$\mathscr{D}_M = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$，令

$$\mathscr{D}_U = \{(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha \mid U \cap U_\alpha) \mid U \cap U_\alpha \neq \varnothing, \alpha \in \Gamma\},$$

易证 $(U,\mathscr{D}_U)$ 也是一个 n 维 C^r 流形，称为 $(M,\mathscr{D}_M)$ 的 C^r 开子流形．

例 7　n 维球面 $S^n = \{(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum\limits_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1\}$ 为 n 维 C^ω 流形．

对任何 $i = 1,2,\cdots,n+1$，令

$$U_i^+ = \{(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) \in S^n \mid x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1}) \in S^n \mid x^i < 0\},$$

$$\varphi_i^{\pm}: U_i^{\pm} \to \varphi_i^{\pm}(U_i^{\pm}) = \{(x^1, x^2, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n+1}) \mid \sum_{j \neq i}(x^j)^2 < 1\},$$

$$\varphi_i^{\pm}(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, x^2, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n+1}),$$

称$\{x^1, x^2, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n+1}\}$为$U_i^{\pm}$中的局部坐标($\widehat{x^i}$表示删去$x^i$).易见$\mathscr{D}' = \{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}) \mid i = 1, \cdots, n+1\}$为$C^\omega$微分构造的一个基,它唯一确定了一个$C^\omega$微分构造$\mathscr{D} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi)$与$\mathscr{D}'$中元素$C^\omega$相容$\}$,因而$(S^n, \mathscr{D})$成为一个$n$维$C^\omega$流形.

例 8 n维实射影空间$P^n(\mathbf{R})$为n维C^ω流形.

设$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$, $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \cdots, y^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$. $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}$, $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$. $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$的等价类$[\boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \mid \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}\}$,等价类的全体为

$$P^n(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\sim = \{[\boldsymbol{x}] \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}\}.$$

投影$\pi: \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to P^n(\mathbf{R})$, $\pi(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]$.设$\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$的拓扑为$\tau$,易证$\tau' = \{U \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\}$为$P^n(\mathbf{R})$上的一个拓扑,于是,$(P^n(\mathbf{R}), \tau')$为$(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})$的商拓扑空间,称为$n$维实射影空间.下面证明$P^n(\mathbf{R})$为$n$维$C^\omega$流形.对任何$[\boldsymbol{x}]$, $[\boldsymbol{y}] \in P^n(\mathbf{R})$, $[\boldsymbol{x}] \neq [\boldsymbol{y}]$,则存在含$\pi^{-1}([\boldsymbol{x}])$的以原点为中心的去心开锥体$V_x$和含$\pi^{-1}([\boldsymbol{y}])$的以原点为心的去心开锥体$V_y$,使得$V_x \cap V_y = \varnothing$,因而$\pi(V_x)$和$\pi(V_y)$分别是含$[\boldsymbol{x}]$和$[\boldsymbol{y}]$的不相交的开集,故$(P^n(\mathbf{R}), \tau')$为$T_2$空间.令

$$U_k = \{[\boldsymbol{x}] \in P^n(\mathbf{R}) \mid \boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}), x^k \neq 0\},$$

$$\varphi_k([\boldsymbol{x}]) = \left(\frac{x^1}{x^k}, \cdots, \frac{x^{k-1}}{x^k}, \frac{x^{k+1}}{x^k}, \cdots, \frac{x^{n+1}}{x^k}\right)$$
$$= ({}_k\xi^1, \cdots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \cdots, {}_k\xi^{n+1}).$$

称$\{x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}\}$为$[\boldsymbol{x}]$的齐次坐标,$\{{}_k\xi^1, {}_k\xi^2, \cdots, {}_k\xi^{k-1}, \cdots, {}_k\xi^{n+1}\}$为$[\boldsymbol{x}]$关于$U_k$的非齐次坐标.

显然,$\bigcup_{k=1}^{n} U_k = P^n(\mathbf{R})$,且当$U_k \cap U_l \neq \varnothing, k \neq l$时,

$$\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}: \varphi_k(U_k \cap U_l) \to \varphi_l(U_k \cap U_l),$$

$$\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}({}_k\xi^1, \cdots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \cdots, {}_k\xi^{n+1}) = \varphi_l([\boldsymbol{x}])$$
$$= ({}_l\xi^1, \cdots, {}_l\xi^{l-1}, {}_l\xi^{l+1}, \cdots, {}_l\xi^{n+1}).$$

其中

$$\begin{cases} {}_l\xi^h = \dfrac{{}_k\xi^h}{{}_k\xi^l}, h \neq l, k, \\ {}_l\xi^k = \dfrac{1}{{}_k\xi^l} \end{cases}$$

为有理函数,因而它是C^ω函数,由定理1知,$\mathscr{D}' = \{(U_k, \varphi_k) \mid k = 1, 2, \cdots, n+1\}$确定了$P^n(\mathbf{R})$上的一个$C^\omega$微分构造$\mathscr{D}$,使$(P^n(\mathbf{R}), \mathscr{D})$成为$C^\omega$流形.

例 9　设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^r 流形，$\mathscr{D}_i=\{(U_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i})\mid \alpha_i\in\Gamma_i\}$，$i=1,2,\cdots,k$. 令

$$\mathscr{D}'=\{(U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k},\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k})\mid(U_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i})\in\mathscr{D}_i,i=1,2,\cdots,k\},$$

其中 $U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k}$ 为拓扑积，而

$$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k}:U_{\alpha_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k}\to\varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1})\times\cdots\times\varphi_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})\subset\mathbf{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{R}^{n_k}=\mathbf{R}^{n_1+\cdots+n_k},$$

$$\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(p_1,p_2,\cdots,p_k)=(\varphi_{\alpha_1}(p_1),\cdots,\varphi_{\alpha_k}(p_k))$$

为同胚映射. 显然 $\mathscr{D}'$ 满足微分构造的条件1°和2°，因此它唯一确定了拓扑积 $M_1\times\cdots\times M_k$ 上的 C^r 构造 $\mathscr{D}$. 我们称 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 维 C^r 流形$(M_1\times\cdots\times M_k,\mathscr{D})$为 C^r 流形$(M_i,\mathscr{D}_i)$，$i=1,2,\cdots,k$ 的 C^r 积流形.

如 n 维环面$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$为 n 个 S^1 的 n 维 C^ω 积流形. $\mathbf{R}^{n_1+n_2}=\mathbf{R}^{n_1}\times\mathbf{R}^{n_2}$ 为 $\mathbf{R}^{n_1}$ 和 $\mathbf{R}^{n_2}$ 的 n_1+n_2 维 C^ω 积流形.

1.1.6　n 维复解析流形

如果在 1.1.5 中，用 $\mathbf{C}^n=\{z=(z^1,z^2,\cdots,z^n)\mid z^j\in\mathbf{C}(\text{复数域})\}$ 代替 $\mathbf{R}^n$，复解析（函数在每一点的一个开邻域中可以展开成复的收敛幂级数）代替实解析，则称$(M,\mathscr{D})$为 n 维复解析流形.

设$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{z^j\}$ 和(U_β,φ_β)，$\{w^j\}$ 为局部坐标系，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，$\varphi_\alpha(p)=(z^1,z^2,\cdots,z^n)=z\in\mathbf{C}^n$，$\varphi_\beta(p)=(w^1,\cdots,w^n)=w\in\mathbf{C}^n$，$z^j=x^j+\mathrm{i}y^j$，$w^j=u^j+\mathrm{i}v^j$，$x^j,y^j,u^j,v^j\in\mathbf{R}$，$j=1,\cdots,n$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 于是

$$u+\mathrm{i}v=w=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(z)=f_{\alpha\beta}(x,y)+\mathrm{i}g_{\alpha\beta}(x,y),$$

利用实和复幂级数的柯西收敛原理以及 $\max\{|a|,|b|\}\leqslant(a^2+b^2)^{1/2}=|a+\mathrm{i}b|$ 可知$(a,b\in\mathbf{R})$，$u=f_{\alpha\beta}(x,y)$，$v=g_{\alpha\beta}(x,y)$为实解析的映射. 如果将$\{x^1,x^2,\cdots,x^n,y^1,y^2,\cdots,y^n\}$和$\{u^1,u^2,\cdots,u^n,v^1,v^2,\cdots,v^n\}$分别视作 p 点的实局部坐标，则$(M,\mathscr{D})$自然可视作 $2n$ 维实解析流形. 此外，由柯西－黎曼条件：$\dfrac{\partial u^j}{\partial x^j}=\dfrac{\partial v^j}{\partial y^j}$，$\dfrac{\partial u^j}{\partial y^j}=-\dfrac{\partial v^j}{\partial x^j}$，得到雅可比行列式为

$$\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n,v^1,\cdots,v^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}\\\dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&-\dfrac{\partial v}{\partial x}\\\dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}&-\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\\dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}&0\\\dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$= \det\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \overline{\det\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)} = \left|\frac{\partial(w^1,\cdots,w^n)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right|^2 > 0,$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

例 10　$\mathscr{D}' = \{(\mathbf{C}^n, \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n}) \mid \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n}: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n}(z) = z\}$ 唯一确定了 $\mathbf{C}^n$ 上的一个复解析流形$(\mathbf{C}^n, \mathscr{D})$.

例 11　n 维复射影空间 $P^n(\mathbf{C})$ 为 n 维复解析流形.

设 $z = (z^1, z^2, \cdots, z^{n+1}), w = (w^1, w^2, \cdots, w^{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}, z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w$, $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$. $[z] = \{w \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \mid w \sim z\}, p^n(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\sim = \{[z] \mid z \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}\}$. 类似于实射影空间可以证明 $P^n(\mathbf{C})$ 为 n 维复解析流形,并称它为 n 维复射影空间.

1.1.7　流形的连通性和道路连通性

设(M,τ)为拓扑空间,如果 $M = U \cup V, U \cap V = \varnothing, U, V \in \tau, U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$(即 M 为(M,τ)的两个不相交的非空开集 U 和 V 的并),则称(M,τ)为非连通的拓扑空间;否则称为连通的拓扑空间.

如果对任何 $x, y \in M$,都有一条连结 x 与 y 的道路 φ(即 $\varphi: [0,1] \to M$ 为连续映射,且 $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$),则称$(M,\tau)$为道路连通的拓扑空间;否则称为非道路连通的拓扑空间.

应用反证法立知,道路连通必连通.

例 12　连通的拓扑空间不必是道路连通的. 设

$$A = \left\{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leqslant \frac{2}{\pi}\right\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$$B = \{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

应用数学分析知识可证 $A \cup B$ 连通但非道路连通的.

定理 2　设$(M, \mathscr{D}^0)$为拓扑流形,则 M 连通 $\Leftrightarrow M$ 道路连通.

1.2　C^k 映　射

1.2.1　C^k 映射

设$(M_i, \mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^r 流形, $i = 1,2; k, r \in \{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}, k \leqslant r$. 如果映射 $f: M_1 \to M_2$,对任意 $p \in M_1$ 和 $q = f(p)$ 的任意局部坐标系(V,ψ),必有 p 的局部坐标系(U,φ),使 $f(U) \subset V$(等价于 f 是连续的),且 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$

是 C^k 类的，即

$$\begin{cases} y^1 = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_1(x^1, x^2, \cdots, x^{n_1}); \\ \quad \cdots \\ y^{n_2} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{n_2}(x^1, x^2, \cdots, x^{n_1}) \end{cases}$$

是 C^k 类的，则称 f 为从 M_1 到 M_2 的 C^k 映射，记 C^k 映射的全体为 $C^k(M_1, M_2)$，而 C^k 映射 $f \in C^k(M_1, M_2)$（图 1-2）.

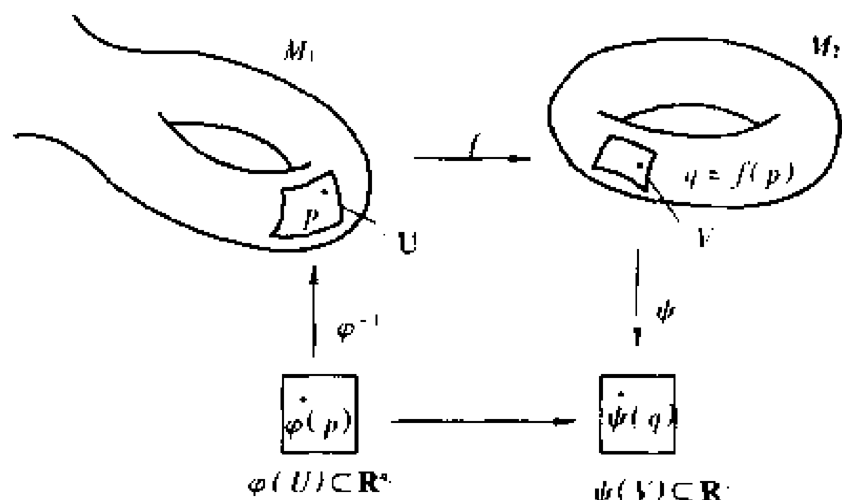


图 1-2

定理 3　设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$\mathscr{D}'_i$ 为 $\mathscr{D}_i$ 的基，$i = 1,2$. 如果映射 $f: M_1 \to M_2$ 关于 $\mathscr{D}'_1$ 和 $\mathscr{D}'_2$ 满足 C^k 映射的条件，则 f 是 C^k 类的.

1.2.2　C^k 映射 $(k \geqslant 1)$ 的秩

设 $f \in C^k(M_1, M_2)$，(U, φ) 和 (U_1, φ_1) 为 p 的局部坐标系，(V, ψ) 和 (V_1, ψ_1) 为 $f(p)$ 的局部坐标系. 与 (U, φ) 和 (V, ψ) 相应的局部坐标分别为 $\{x^i\}$ 和 $\{y^j\}$，而 $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \left(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$ 为 $C^k(k \geqslant 1)$ 映射 f 在 p 点关于 $\{x^i\}$ 和 $\{y^j\}$ 的雅可比矩阵，易证

$$\mathrm{rank} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \mathrm{rank} D(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})_{\varphi_1(p)}.$$

称 $\mathrm{rank} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$（与局部坐标系选取无关）为 $C^k(k \geqslant 1)$ 映射 f 在点 p 的秩，记作

$$(\mathrm{rank}\, f)_p = \mathrm{rank} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}.$$

1.2.3　C^k 浸入、C^k 嵌入、C^k 微分同胚

设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^r 流形，$i = 1,2$. 如果 $C^k(1 \leqslant k \leqslant r)$ 映射 $f: M_1 \to M_2$ 对

任何 $p \in M_1$，有 $(\mathrm{rank}\, f)_p = n_1$（因而 $n_1 \leqslant n_2$），则称 f 为一个 C^k 浸入.

如果 f 为 C^k 浸入，且 $f: M_1 \to f(M_1) \subset M_2$ 为同胚映射，则称 f 为一个 C^k 嵌入.

如果 f 为 C^k 浸入，且 $f: M_1 \to M_2$ 为同胚映射，则称 f 为一个 C^k 微分同胚. 由数学分析知识不难证明 $n_1 = n_2$. 再由反函数定理，f^{-1} 也为一个 C^k 微分同胚.

例 13　设 $f: \mathbf{R}^n \to \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \mid \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 < 1\}$,

$$x \mapsto y = f(x) = x/(1 + \|x\|^2)^{1/2},$$

则

$$x = f^{-1}(y) = y/(1 - \|y\|^2)^{1/2}.$$

显然 f 为 C^∞ 同胚.

例 14　设 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (t^2, \sin t\pi)$，由 $\mathrm{rank}(2t, \pi\cos t\pi) = 1$ 和 $f(1) = (1, 0) = f(-1)$ 可知 f 为浸入但非单射.

1.2.4　C^r 子流形和 C^r 正则子流形

设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 $C^r (r \geqslant 1)$ 流形，$i = 1, 2$，$M_1 \subset M_2$（M_1 的拓扑不必为 M_2 的诱导拓扑，称为 M_1 的内部拓扑）. 如果包含映射 $I: M_1 \to M_2$, $I(p) = p$ 为 C^r 浸入，则称 $(M_1, \mathscr{D}_1)$ 为 $(M_2, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 子流形（简称 M_1 为 M_2 的 C^r 子流形）；如果包含映射 I 为 C^r 嵌入，则称 $(M_1, \mathscr{D}_1)$ 为 $(M_2, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 正则子流形. 此时，$I: M_1 \to M_1 \subset M_2$ 为同胚映射，即 M_1 的内部拓扑和诱导拓扑是相同的.

定理 4　设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 $C^r (r \geqslant 1)$ 流形，$i = 1, 2$.

1° 如果 $f: M_1 \to M_2$ 为 C^r 单浸入（单射且为浸入），则 $(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$ 为 $(M_2, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 子流形，其中 $\widetilde{\mathscr{D}}_1 = \{(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \mid (U, \varphi) \in \mathscr{D}_1\}$，$f^{-1}: f(M_1) \to M_1$ 为 f 的逆映射.

2° 如果 $f: M_1 \to M_2$ 为 C^r 嵌入，则 $(f(M_1), \widetilde{\mathscr{D}}_1)$ 为 $(M_2, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 正则子流形.

定理 5（正则子流形的充要条件）　设 N 为 n 维 $C^r (r \geqslant 1)$ 流形，则 M 为 N 的 m 维 C^r 正则子流形 $\Leftrightarrow M \subset N$ 为子拓扑空间，且对任意 $p \in M$，存在 N 的含 p 的局部坐标系 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ 及其局部坐标邻域 U，使得（图 1-3）

$$M \cap U = \{q \in U \mid x^j(q) = 0, m + 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

定理 6　设 M_i 为 n_i 维 $C^r (r \geqslant 1)$ 流形，$i = 1, 2$. $f: M_1 \to M_2$ 为 C^r 映射，则对任意 $q \in M_2$，逆像

$$f^{-1}(q) = \{p \in M_1 \mid f(p) = q$$

为空集或者当 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ 且对 $f^{-1}(q)$ 关于 M_1 的某开邻域 U 中的任意 p，有 $(\mathrm{rank}\, f)_p \equiv l$（定值）时，$f^{-1}(q)$ 为 M_1 的 $n_1 - l$ 维 C^r 正则子流形.

例 15　设 $f: S^1 \times S^1 \to \mathbf{R}^3$,

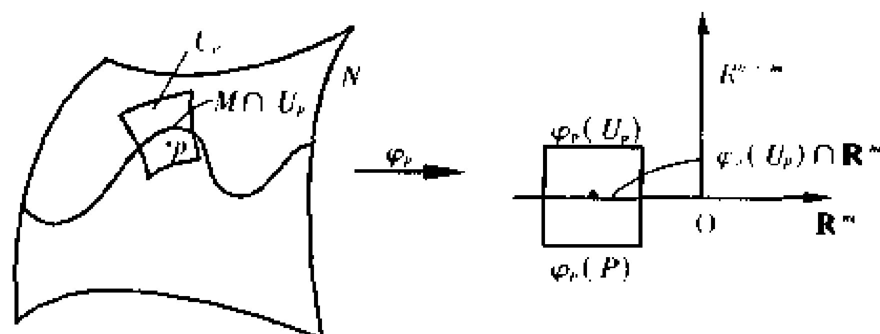


图 1-3

$f(e^{iu^1}, e^{iu^2}) = ((b + a\cos u^1)\cos u^2, (b + a\cos u^1)\sin u^2, a\sin u^1), 0 < a < b$, 易证 f 为 C^ω 嵌入.

例 16　设 $f_1: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$,

$$f_1(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^4+1}\right),$$

显然,它的像 $f_1(\mathbf{R}^1)$ 是双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$. 容易验证 f_1 为单浸入,但不是嵌入. 由定理 4 1°, $f_1(\mathbf{R}^1)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的 1 维 C^ω 子流形,而作为子拓扑空间不是流形,故不是 C^ω 正则子流形(图 1-4).

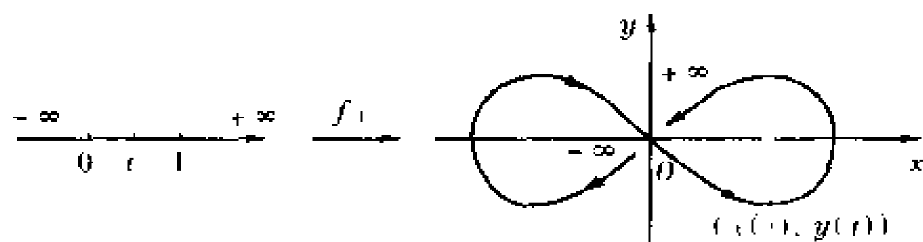


图 1-4

类似地, $f_2: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$, $f_2(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1}, \frac{-t(t^2-1)}{t^4+1}\right)$ 也是 C^ω 单浸入而不是嵌入. 由定理 4 的 1°, $f_2(\mathbf{R}^1)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的 1 维 C^ω 子流形而不是 C^ω 正则子流形(图 1-5).

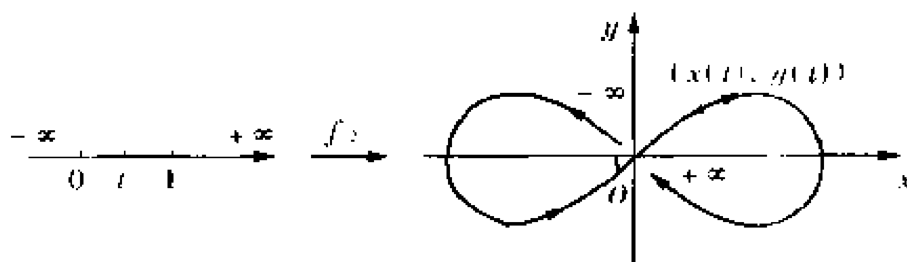


图 1-5

例 17 设 $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{2\pi u^1 i}, e^{2\pi u^2 i}) \mid u^1, u^2 \in \mathbf{R}\}$ 为 2 维环面，它可以由边长为 1 的正方形叠合对边而得到. 也可将平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点划分等价类，使得 $(u^1, u^2) \sim (v^1, v^2) \Leftrightarrow (v^1, v^2) = (u^1 + k^1, u^2 + k^2), k^1, k^2 \in \mathbf{Z}$（整数集）.

考虑 C^ω 映射 $f: \mathbf{R}^1 \to S^1 \times S^1, f(t) = (e^{2\pi t i}, e^{2\pi\alpha i})$. 当 α 为正有理数时，不难看出 $f(\mathbf{R}^1)$ 为 $S^1 \times S^1$ 上的一条封闭曲线，它作为 $S^1 \times S^1$ 的子拓扑空间同胚于 S^1. 并且 $f(\mathbf{R}^1)$ 为 $S^1 \times S^1$ 的紧致的 1 维正则子流形（注意 f 非单射）；当 α 为正无理数时，可以证明 f 为单浸入，且 $f(\mathbf{R}^1)$ 在 $S^1 \times S^1$ 中是稠密的. 进而知道 $f(\mathbf{R}^1)$ 不是 1 维正则子流形以及 f 不是嵌入（图 1-6）.

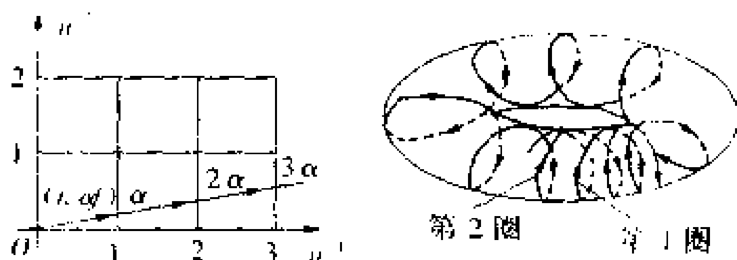


图 1-6

例 18 设 $f: \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{R}^1, f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2$，其中 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$，则

$(\mathrm{rank}\, f)_x = \mathrm{rank}(2x^1, 2x^2, \cdots, 2x^{n+1}) = 1 \ (x \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\})$.

因此

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\} = f^{-1}(1)$$

为 $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ 从而也为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的 n 维 C^ω 正则子流形.

1.3 单位分解和惠特尼嵌入定理

1.3.1 单位分解

流形上积分的定义斯托克斯定理和向量丛上黎曼度量的存在性定理的证明等都需要用到单位分解存在性定理. 因此，它是近代数学中的一个重要工具.

设 $\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 为 n 维 $C^r (1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 流形 $(M, \mathscr{D})$ 上的一族 C^r 函数（Γ 为指标集，不必是可数集）. 如果它满足：

1° g_α 的支集 $\mathrm{supp}\, g_\alpha = \overline{\{x \in M \mid g_\alpha(x) \neq 0\}}$ 是紧致的（即它的任何开覆盖必有有限的子覆盖）；

2° $\{\mathrm{supp}\, g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是局部有限的（即对任何 $p \in M$，必有 p 的开邻域 U_p，使 U_p 只与有限个 $\mathrm{supp}\, g_\alpha$ 相交）；

3° $\sum_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha(x) = 1, g_\alpha(x) \geqslant 0, x \in M, \alpha \in \Gamma$.

则称$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$(M,\mathscr{D})$的一个$C^r$单位(1的)分解.

设$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$n$维$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形$(M,\mathscr{D})$上的一个局部有限的开覆盖,$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$(M,\mathscr{D})$的一个单位分解.如果$\mathrm{supp}\, g_\alpha \subset U_\alpha, \alpha \in \Gamma$,则称$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为从属于$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$的一个**单位分解**.

应用归纳法和洛比达(L'Hospital)法则可知

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

为C^∞函数.而用反证法立知φ在$t=0$处不能展开成收敛的幂级数,因此$\varphi(t)$不是实解析函数.由此函数,我们有

引理1 设$C^n(r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x^i| < r, i = 1,2,\cdots,n\}$,则存在$C^\infty$函数$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,使得

$$f\Big|_{\overline{C^n(\frac{1}{2})}} = 1, 0 < f\Big|_{C^n(1)} \leqslant 1, f\Big|_{\mathbf{R}^n - C^n(1)} = 0.$$

引理2 设U为n维C^r流形$(M,\mathscr{D})$的开子集$(1 \leqslant r \leqslant \infty)$,$A$为$M$的紧致子集,且$A \subset U$.则存在$C^r$函数$\psi: M \to \mathbf{R}$,使得$\psi|_M \geqslant 0, \psi|_A > 0$且在含$M - U$的某个开集内为0.

定理7 n维A_2的$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形$(M,\mathscr{D})$上存在一个$C^r$的单位分解$\{g_i \mid i = 1,2,\cdots\}$.

定理8(单位分解存在性定理) 设$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$n$维$A_2$的$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形$(M,\mathscr{D})$的一个局部有限的开覆盖,且$\overline{U_\alpha}$是紧致的,则存在一个从属于$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$的$C^r$单位分解$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$.

定理9(广义单位分解存在性定理) 设$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$为$n$维$A_2$的$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形$(M,\mathscr{D})$的一个开覆盖,则存在一个从属于它的广义$C^r$单位分解$\{g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$: $g_\alpha \in C^r(M,\mathbf{R})$, $\mathrm{supp}\, g_\alpha \subset U_\alpha$, $\{\mathrm{supp}\, g_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$是局部有限的,$g_\alpha(x) \geqslant 0$, $\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha(x) = 1, x \in M, \alpha \in \Gamma$(注意:$\overline{U_\alpha}$和$\mathrm{supp}\, g_\alpha$未必紧致).

作为(广义)单位分解存在性定理的应用有如下定理.

定理10 设$(M,\mathscr{D})$为n维A_2的$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形,$A \subset U \subset M$,$A$为闭集,$U$为开集.

1° 存在C^r函数$\varphi: M \to \mathbf{R}$,使得满足:(a)$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1, x \in M$;(b)$\varphi(x) = 1, x \in A$;(c)$\mathrm{supp}\, \varphi \subset U$.

2° 如果$F: U \to \mathbf{R}^m$为C^r映射,则存在C^r映射$G: M \to \mathbf{R}^m$,使得$G|_A = F|_A$.

定理11 设A_0和A_1为n维A_2的$C^r(1 \leqslant r \leqslant \infty)$流形$(M,\mathscr{D})$的不相交的闭集,则存在一个$C^r$函数$\varphi: M \to \mathbf{R}$,使得

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \varphi|_{A_0} = 0, \varphi|_{A_1} = 1.$$

1.3.2 惠特尼嵌入定理

$\mathbf{R}^N$ 中大量的光滑曲线、n 维光滑曲面是微分流形的实例，它们是 $\mathbf{R}^N$ 中的正则子流形。自然要问：一个 n 维 $C^r(r \geqslant 1)$ 流形$(M,\mathscr{D})$在什么条件下能嵌入到 $\mathbf{R}^N$?即存在一个 C^r 嵌入 $F:M \to \mathbf{R}^N$，此时 $F:M \to F(M)$ 为同胚，作为 $\mathbf{R}^N$ 的子拓扑空间，$F(M)$(因而 M)为 A_2 空间。此外，当然希望(使流形 M 实现的欧几里德空间)$\mathbf{R}^N$ 的维数 N 越小越好。惠特尼成功地证明了

定理 12（惠特尼嵌入定理） 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 A_2 的 C^r 流形$(1 \leqslant r \leqslant \infty)$，则存在 C^r 嵌入 $F:M \to \mathbf{R}^{2n+1}$，使得 $F(M)$ 为 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的闭子集。

惠特尼指出定理 12 能够改进。当 $n > 0$ 时，M 可 C^r 嵌入到 $\mathbf{R}^{2n}$ 中。此外，当 $n > 1$ 时，M 可 C^r 浸放到 $\mathbf{R}^{2n-1}$ 中。

2 向量丛和切丛

2.1 李　　群

2.1.1 拓扑群和李群

设集合 G 满足：1° G 为拓扑空间；2° G 为群；3° 群运算是 C^0 类的，即乘法“·”：$G \times G \to G,(a,b) \to a \cdot b$ 和逆元运算 $J:G \to G^{-1}, a \mapsto a^{-1}$ 为 C^0 类的，则称 G 为**拓扑群**。

如果集合 G 满足：

1° G 为 n 维 C^r 流形，$r \in \{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$；

2° G 为群；

3° 群运算是 C^r 类的(群与流形 C^r 相容)

则称 G 为 n 维 C^r 群。当 $r \geqslant 1$ 时，称 G 为 n 维 C^r 李群；当 $r = \omega$ 时，称 G 为 n 维 C^ω 李群或实解析李群。类似可定义 n 维复解析李群。

显然，C^r 群 G 为拓扑群。

例 1 拓扑群可以不是 C^r 群。

例如，有理数加群 $\mathbf{Q}$ 是拓扑群，但它不是流形，从而不是 C^r 群。

例 2 C^0 群但非 $C^r(r \geqslant 1)$ 李群。

设 $\mathbf{R}^1$ 为 1 维欧几里德空间的通常 C^r 流形$(r \geqslant 1)$，$x,y \in \mathbf{R}^1$，定义 x 与 y 的加法 $\oplus$ 为 $z = x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$，显然 $\mathbf{R}^1$ 在此加法下为 C^0 群。因为 $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

的一阶偏导数在(0,0)不连续,故它不为 $C^r(r \geq 1)$ 李群.

例 3 $\mathbf{R}^n$ 为 C^ω 流形.群运算取作加法.即对 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in \mathbf{R}^n$,定义 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n)$,单位元素(即零元素)为 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{x}$ 的逆元素(即 $\boldsymbol{x}$ 的负元素)为 $-\boldsymbol{x} = (-x^1, -x^2, \cdots, -x^n)$.显然,群运算是 C^ω 类的.于是,$\mathbf{R}^n$ 就成为 C^ω 李群,称为 n 维向量群.

例 4 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}} = \{(e^{2\pi u^1 i}, \cdots, e^{2\pi u^n i}) \mid u^j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, \cdots, n\}$ 为 C^ω 流形.群的乘法运算为

$$(e^{2\pi u^1 i}, \cdots, e^{2\pi u^n i}) \cdot (e^{2\pi v^1 i}, \cdots, e^{2\pi v^n i})$$
$$= (e^{2\pi(u^1+v^1)i}, \cdots, e^{2\pi(u^n+v^n)i}).$$

单位元素为$(e^{2\pi 0 i}, \cdots, e^{2\pi 0 i})$,$(e^{2\pi u^1 i}, \cdots, e^{2\pi u^n i})$的逆元素为$(e^{-2\pi u^1 i}, \cdots, e^{-2\pi u^n i})$.显然,群运算是 C^ω 类的.于是,T^n 就成为 C^ω 李群,称为 n 维圆环群.特别地,$T^1 = S^1$ 为1维 C^ω李群.

例 5
$$\begin{aligned} S^3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_l \in \mathbf{R}, l = 1, 2, \cdots, 4; \sum_{l=1}^4 x_l^2 = 1\} \\ &= \{x_1 + x_2 \boldsymbol{i} + x_3 \boldsymbol{j} + x_4 \boldsymbol{k} \mid x_l \in \mathbf{R}, l = 1, 2, \cdots, 4; \\ &\quad \sum_{l=1}^4 x_l^2 = 1, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \\ &\quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}\} \end{aligned}$$

为 C^ω 流形.群的乘法运算为四元数广域的乘法.设 $\boldsymbol{x} = x_1 + x_2\boldsymbol{i} + x_3\boldsymbol{j} + x_4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{y} = y_1 + y_2\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + y_4\boldsymbol{k}$, $\|\boldsymbol{x}\| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$,易证

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = &(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4) + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)\boldsymbol{i} + \\ &(x_1y_3 + x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)\boldsymbol{j} + (x_1y_4 + x_2y_3 + x_4y_1 - x_3y_2)\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$
$$\|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|,$$
$$\boldsymbol{x}^{-1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}(x_1 - x_2\boldsymbol{i} - x_3\boldsymbol{j} - x_4\boldsymbol{k}), \quad x \neq 0.$$

由此可知,如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^3$,则 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in S^3$, $\boldsymbol{x}^{-1} \in S^3$ 且 $\boldsymbol{x}^{-1} = x_1 - x_2\boldsymbol{i} - x_3\boldsymbol{j} - x_4\boldsymbol{k}$.为验证 S^3 上群运算的 C^ω 性,不失一般性可设 $x_4 > 0, y_4 < 0$,则 $x_4 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$, $y_4 = -\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}$.于是,$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})_l$ 为 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 的 C^ω 函数,$(\boldsymbol{x}^{-1})_l$ 为x_1, x_2, x_3的 C^ω 函数,因而群运算是 C^ω 的.这就说明了 S^3 为3维 C^ω 李群.

例 6 设 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \{A \mid A$ 为$n \times n$ 实矩阵,$\det A \neq 0\}$.如果 $A = (a_{ij})$ 视作 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的点$(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn})$,因为 $A \mapsto \det A$ 为 C^ω 映射,故 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R} - \{0\})$ 为 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的 C^ω 开子流形.根据矩阵的乘法,

GL(n,**R**) 构成一个群.显然,单位元素是单位矩阵 $I_n=(\delta_j^i)$,$\delta_j^i=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j,\end{cases}$ A 的逆元素为 A 的逆矩阵 A^{-1}.易证群运算是 C^ω 类的.事实上,设 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in$ GL(n,**R**),令 $A\cdot B=(c_{ij})$,$A^{-1}=(d_{ij})$.则由 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$,故它为 a_{ik} 和 b_{kj} 的多项式函数,从而乘法运算 $(A,B)\mapsto A\cdot B$ 为 C^ω 映射.因为 $d_{ij}=A_{ij}/\det A$ 为 a_{kl} 的有理函数(A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式),所以逆元运算 $A\mapsto A^{-1}$ 也为 C^ω 映射.由此可知,GL(n,**R**) 成为一个 n^2 维的 C^ω 李群,称它为 n 次实一般线性群.

类似可证 GL(n,**C**) $=\{A\mid A$ 为 $n\times n$ 复矩阵,$\det A\neq 0\}$ 为 n^2 维复 C^ω 李群,称它为 n 次复一般线性群.

例 7 设 G_i 为 C^r 群,$r\in\{0,1,2,\cdots,\omega\}$,$i=1,2,\cdots,n$.一方面把 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 作为 C^r 积流形.另一方面,把 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 作为群的直积,这时 $(g_1,g_2,\cdots,g_n)\cdot(h_1,h_2,\cdots,h_n)=(g_1\cdot h_1,\cdots,g_n\cdot h_n)$.容易验证 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 也为 C^r 群,称为 C^r 群 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 的直积.如 n 维圆环群 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$ 为 n 个 1 维 C^ω 李群 S^1 的直积.

2.1.2 C^r 李子群

设 H 为 $C^r(r\geqslant 1)$ 李群 G 的子群,给 H 一个 C^r 流形的构造,关于这个 C^r 构造,如果 H 为 C^r 流形 G 的 C^r 子流形,并且它本身也是一个 C^r 群时,则称 H 为 G 的 **C^r 李子群**.

定理 1 设 H 为 $C^r(r\geqslant 1)$ 李群 G 的 C^r 正则子流形,而且作为抽象群是 G 的子群,则 H 为 G 的 C^r 李子群.

例 8 从1.2.4例 17,当 α 为正无理数时,设 $H=\{(e^{2\pi ti},e^{2\pi\alpha ti})\mid t\in\mathbf{R}\}$,易证 $\overline{H}=T^2\neq H$,故 H 为 T^2 的非闭 C^ω 李子群和非正则子流形.它是定理 1 的逆不成立的反例.

2.1.3 G 左方 C^r 作用于 M

设 G 为 C^r 群,M 为 C^r 流形,$r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$.如果 C^r 映射 $F:G\times M\to M$,$(g,p)\mapsto F(g,p)=gp$ 满足条件:

1° $ep=p$,$p\in M$,e 为 G 的单位元素;

2° $g_1(g_2p)=(g_1\cdot g_2)p$,$p\in M$,$g_1,g_2\in G$

则称 G 左方 C^r 作用于 M.

固定 $g\in G$,令 $F_g:M\to M$,$p\mapsto F_g(p)=gp$,则 $(F_g)^{-1}=F_{g^{-1}}$ 且 F_g 为 C^r 同胚,称为从 M 到 M 的 C^r 变换.因此,G 左方 C^r 作用于 M 时,称 G 为 M 的**左方 C^r 变换群**.类似可定义**右方 C^r 变换群**.

如果对任何 $p\in M$，$F(g,p)=gp=p$ 必有 $g=e$，则称 C^r 群 G 在 C^r 流形 M 上的作用是有效的.

例 9 设 $F:\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$y=F(A,x)=Ax$，即

$$\begin{bmatrix} y^1\\ \vdots\\ y^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}.$$

显然，C^ω李群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 左方 C^r 有效作用于 C^ω 流形 $\mathbf{R}^n$ 上. $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 的线性变换群.

例 10 设 G 为 C^r 群，$M=G$，$F:G\times G\to G$，$F(g,p)=g\cdot p$（$\cdot$ 表示群的乘法）. 显然，C^r 群 G 左方 C^r 有效作用于 C^r 流形 G 上.

2.1.4 固定群

设 C^r 群 G 左方 C^r 作用于 C^r 流形 M，对于固定的 $p\in M$，显然 $G_p=\{g\in G\mid gp=P\}$ 为 G 的闭集，且为 G 的子群，称它为 C^r 群 G 在点 p 的**固定群或均等群或迷向子群**.

定理 2 设 C^r李群 G C^r 作用于 C^r 流形 M 上（$r\geqslant 1$），则点 $p\in M$ 的固定群 G_p 为 G 的 C^r 正则子流形，并且它是 G 的闭 C^r李子群.

此定理使我们可以得到很多李群的典型例子.

例 11 $F:\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\times\mathbf{R}\to R$，

$$(A,x)\mapsto F(A,x)=(\det A)\cdot x.$$

固定群

$$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_1=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\mid \det A=\det A\cdot 1=F(A,1)=1\}=\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$$

称为 n 阶实特殊线性群，它是实 C^ω李群.

类似可证 n 阶复特殊线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})_1=\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$ 为复 C^ω李群. 由

$$\sum_{i=1}^{m}a_{1i}A_{1i}=\det A=\det(a_{ij})=1$$

知，必有 k，使 $A_{1k}\neq 0$，于是 $a_{1k}=(1-\sum\limits_{i\neq k}a_{1i}A_{1i})/A_{1k}$，其中 A_{1i} 为 a_{1i} 的代数余子式. 由此，立知 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ 和 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$ 分别为实和复的 n^2-1 维 C^ω李群.

当 $n=1$ 时，$\mathrm{SL}(1,\mathbf{R})=\{1\}$ 为紧致集；当 $n\geqslant 2$ 时，由

$$A(m)=\begin{bmatrix} m & & & & \\ & 1/m & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$$

知 $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ 无界，从而是非紧致集.

对任何 $A\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})\subset\mathrm{GL}^+(n,\mathbf{R})$，由 $\mathrm{GL}^+(n,\mathbf{R})$ 道路连通（见下面例 14），存

在 $\varphi:[0,1]\to GL^+(n,\mathbf{R})$，它为 $GL^+(n,\mathbf{R})$ 中连接 $\varphi(0)=I_n$(单位矩阵)和 $\varphi(1)=A$ 的一条道路.于是 $\tilde{\varphi}:[0,1]\to SL(n,\mathbf{R})$，

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\det\varphi(t)} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}\varphi(t)$$

为 $SL(n,\mathbf{R})$ 中连接 $\tilde{\varphi}(0)=I_n$ 和 $\tilde{\varphi}(1)=A$ 的一条道路.从而 $SL(n\mathbf{R})$ 是道路连通的.

类似可证，$SL(n,\mathbf{C})$ 当 $n=1$ 时紧致；当 $n\geqslant 2$ 时非紧致，且是道路连通的.

例 12 设 $gl(n,\mathbf{R})=\{X\mid X 为 n\times n 实矩阵\}$.令

$$F:GL(n,\mathbf{R})\times gl(n,\mathbf{R})\to gl(n,\mathbf{R}),$$
$$(P,K)\mapsto F(P,K)=PKP'.$$

由 2.5.5 定理 18，固定群

$$GL(n,\mathbf{R})_K=\{P\in GL(n,\mathbf{R})\mid PKP'=F(P,K)=K\}$$

的李代数为

$$gl(n,\mathbf{R})_K=\{X\in gl(n,\mathbf{R})\mid XK+KX'=0\},$$

且 $GL(n,\mathbf{R})_K$ 和 $gl(n,\mathbf{R})_K$ 有相同的维数.

类似地，$gl(n,\mathbf{C})=\{X\mid X 为 n\times n 复矩阵\}$，$K\in gl(n,\mathbf{C})$，则 $GL(n,\mathbf{C})_K$ 与 $gl(n,\mathbf{C})K$ 有相同的复维数.

例 13 n 阶(实)正交群

$$O(n)=O(n,\mathbf{R})=\{P\in GL(n,\mathbf{R})\mid PP'=PI_nP'=I_n\}=GL(n,\mathbf{R})_{I_n}.$$

n 阶特殊正交群为

$$\begin{aligned}O^+(n)=SO(n,\mathbf{R})&=SL(n,\mathbf{R})\cap O(n)\\&=\{P\in GL(n,\mathbf{R})\mid PP'=I_n,\det P=1\}.\end{aligned}$$

而

$$O^-(n)=\{P\in GL(n,\mathbf{R})\mid PP^{\mathrm{T}}=I_n,\det P=-1\}.$$

因 $PP^{\mathrm{T}}=I_n$，故 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}p_{ij}^2=n$，从而 $O(n)\subset\mathbf{R}^{n^2}$ 为有界集.此外，如果 $P(m)\in O(n)$，$\lim\limits_{m\to+\infty}P(m)=P$，则 $PP^{\mathrm{T}}=\lim\limits_{m\to+\infty}(P(m)P^{\mathrm{T}}(m))=\lim\limits_{m\to+\infty}I_n=I_n$，$P\in O(n)$，从而 $O(n)\subset\mathbf{R}^{n^2}$ 为闭集.这就说明了 $O(n)$ 为紧致集.

$O(n)$ 的李代数为

$$O(n)=gl(n,\mathbf{R})_{I_n}=\{X\in gl(n,\mathbf{R})\mid X+X^{\mathrm{T}}=0\}.$$

由 $x_{ij}+x_{ji}=0,1\leqslant i,j\leqslant n\Leftrightarrow x_{ii}=0,1\leqslant i\leqslant n,x_{ij}=-x_{ji},i>j$ 得到 $GL(n,\mathbf{R})_{I_n}=O(n)$ 为 $\frac{n^2-n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$ 维 C^ω 李群.如果记 $P\in O(n)$ 为 $P=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的规范正交基，$\|e_n\|=1$，它有 $n-1$ 个自由度，e_{n-1}

在垂直于 e_n 的子空间中有 $n-2$ 个自由度，…，e_2 有一个自由度. 当 $e_n,e_{n-1},\cdots,e_2$ 取定时，由 $\det(e_1,e_2,\cdots,e_n)=1$ 知 e_1 完全确定，从而 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 恰有 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=(n-1)n/2$ 个自由度，即 $O(n)$ 的维数为 $(n-1)n/2$.

对任何 $P\in O^+(n)$，由线性代数知识，存在 $Q\in O(n)$，使得

$$P=Q^{-1}\operatorname{diag}\left(1,\cdots,1,\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{bmatrix}\right)Q.$$

令 $\varphi:[0,1]\to O^+(n)$，

$$\varphi(t)=Q^{-1}\left(1,\cdots,1,\begin{bmatrix}\cos t\theta_1 & -\sin t\theta_1\\ \sin t\theta_1 & \cos t\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\cos t\theta_k & -\sin t\theta_k\\ \sin t\theta_k & \cos t\theta_k\end{bmatrix}\right)Q$$

为 $O^+(n)$ 中连接 $\varphi(0)=I_n$ 和 $\varphi(1)=P$ 的道路. 从而 $O^+(n)$ 是道路连通的.

类似地，$O^-(n)$ 也是道路连通的. 根据反证法和连续函数的零值定理可知 $O(n)$ 不是道路连通的，从而 $O(n)$ 恰有两个道路连通分支.

例 14 一般线性群 $GL(n,\mathbf{R})\subset\mathbf{R}^{n^2}$ 无界，故非紧致.

对任何 $A\in GL(n,\mathbf{R})$，设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，则 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，由格拉姆－施密特(Gram-Schmidt)正交化过程得到

$$\begin{cases}B_1=A_1,\\ B_2=\lambda_{21}A_1+A_2,\\ \quad\vdots\\ B_n=\lambda_{n1}A_1+\cdots+\lambda_{n,n-1}A_{n-1}+A_n\end{cases}$$

为 n 个正交向量. 令

$$B_k(t)=\frac{t(\lambda_{k1}A_1+\cdots+\lambda_{k,k-1}A_{k-1})+A_k}{(1-t)+t\|\lambda_{k1}A_1+\cdots+\lambda_{k,k-1}A_{k-1}+A_k\|},$$

则 $B(0)=(B_1(0),B_2(0),\cdots,B_n(0))=(A_1,A_2,\cdots,A_n)=A$，$B(1)=(B_1(1),B_2(0),\cdots,B_n(1))=\left(\frac{B_1}{\|B_1\|},\cdots,\frac{B_n}{\|B_n\|}\right)\in O(n)$.

设 $GL^+(n,\mathbf{R})$ 和 $GL^-(n,\mathbf{R})$ 分别表示 $GL(n,\mathbf{R})$ 中行列式大于0和小于0的元素组成的子群. 如果 $A\in GL^+(n,\mathbf{R})$，根据连续函数的零值定理，$B(1)\in O^+(n)$. 由例 13，$O^+(n)$ 道路连通，故 $GL^+(n,\mathbf{R})$ 道路连通. 同理，$GL^-(n,\mathbf{R})$ 也道路连通. 再一次应用连续函数的零值定理知，$GL(n,\mathbf{R})$ 恰有两个道路连通分支.

复一般线性群 $GL(n,\mathbf{C})\subset\mathbf{C}^{n^2}$ 无界，故非紧致.

对任何 $A\in GL(n,\mathbf{C})$，由线性代数知识，存在 $P\in GL(n,\mathbf{C})$ 使得

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ * & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}P,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{C}.$$

则 $\varphi:[0,1]\to GL(n,\mathbf{C})$，

$$\varphi(t)=P^{-1}\begin{bmatrix}e^{t\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ t* & & e^{t\lambda_n}\end{bmatrix}P$$

为 $GL(n,\mathbf{C})$ 中连接 $\varphi(0)=I_n$ 和 $\varphi(1)=A$ 的一条道路. 因此, $GL(n,\mathbf{C})$ 是道路连通的.

例 15 n 阶复正交群

$$O(n,\mathbf{C})=\{P\in GL(n,\mathbf{C})\mid PP^{\mathrm{T}}=I_n\}=GL(n,\mathbf{C})_{I_n}$$

为复 $(n-1)n/2$ 维 C^ω 李群(类似 $O(n)$ 证明). 当 $n=1$ 时, $O(1,\mathbf{C})=\{1,-1\}$ 是紧致的; 当 $n\geqslant 2$ 时, 由

$$P(n)=\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}\sqrt{1+n^2} & n\mathrm{i}\\ -n\mathrm{i} & \sqrt{1+n^2}\end{bmatrix},1,\cdots,1\right)\in O(n,\mathbf{C})$$

知 $O(n,\mathbf{C})$ 无界, 从而非紧致.

根据线性代数知识, 对任何 $P\in O(n,\mathbf{C})$, 存在 $O_1,O_2\in O(n,\mathbf{R})$ 使

$$P=O_1\operatorname{diag}\left(1,\cdots,1,\begin{bmatrix}\sec\theta_1 & \mathrm{i}\tg\theta_1\\ -\mathrm{i}\tg\theta_1 & \sec\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\sec\theta_k & \mathrm{i}\tg\theta_k\\ -\mathrm{i}\tg\theta_k & \sec\theta_k\end{bmatrix}\right)O_2,$$

$$0\leqslant\theta_j\leqslant\frac{\pi}{2},\ j=1,2,\cdots,k.$$

因为 $(\det P)^2=\det(PP^{\mathrm{T}})=\det I_n=1$, 故 $\det P=\pm 1$. 如果 $\det P=1$, 则 $\det O_1=\det O_2$, 不妨设 $\det O_1=\det O_2=1$. 于是, 存在 $\varphi_i:[0,1]\to O^+(n)$, 使 $\varphi_i(0)=I_n$, $\varphi_i(1)=O_i$, $i=1,2$. 令 $\varphi:[0,1]\to O(n,\mathbf{C})$, 有

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)\operatorname{diag}\left(1,\cdots,1,\begin{bmatrix}\sec t\theta_1 & \mathrm{i}\tg t\theta_1\\ -\mathrm{i}\tg t\theta_1 & \sec t\theta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\sec t\theta_k & \mathrm{i}\tg t\theta_k\\ -\mathrm{i}\tg t\theta_k & \sec t\theta_k\end{bmatrix}\right)\varphi_2(t),$$

则 $\varphi(0)=I_n$, $\varphi(1)=P$, $\det\varphi(t)=1$. 这就证明了 $O^+(n,\mathbf{C})=\{P\in O(n,\mathbf{C})\mid \det P=1\}$ 是道路连通的. 类似例 13, $O^-(n,\mathbf{C})$ 也是道路连通的, 而 $O(n,\mathbf{C})$ 恰有两个道路连通分支.

例 16 n 阶酉群

$$U(n)=\{P\in GL(n,\mathbf{C})\mid P\overline{P}^{\mathrm{T}}=PI_n\overline{P}^{\mathrm{T}}=I_n\}$$

是紧致的(类似 $O(n)$ 紧致的证明). 由线性代数知识, 对任何 $P\in U(n)$, 存在 $Q\in U(n)$, 使

$$P=Q\operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}\theta_1},\cdots,e^{\mathrm{i}\theta_n})\overline{Q}^{\mathrm{T}},$$

其中 $e^{\mathrm{i}\theta_j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 为 P 的特征值. 令

$$\varphi:[0,1]\to U(n),$$

$$\varphi(t)=Q\operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}t\theta_1},\cdots,e^{\mathrm{i}t\theta_n})\overline{Q}^{\mathrm{T}},$$

它为 $U(n)$ 中连接 $\varphi(0)=I_n$ 和 $\varphi(1)=P$ 的道路. 因此, $U(n)$ 是道路连通的.

为证明 $U(n)$ 为 n^2 维实 C^ω 李群, 定义

$$F:GL(n,\mathbf{C})\times gl(n,\mathbf{C})\to gl(n,\mathbf{C})\text{(视作实解析的)},$$

$$(P,K)\mapsto F(P,K)=PK\overline{P}^{\mathrm{T}}\text{(左方实 } C^\omega \text{ 作用)}.$$

易见, $GL(n,\mathbf{C})_K=\{P\in GL(n,\mathbf{C})\mid PK\overline{P}^{\mathrm{T}}=K\}$ 为固定群, 它是实 C^ω 李群. 它的李代数为 $gl(n,\mathbf{C})_K=\{X\in gl(n,\mathbf{C})\mid XK+K\overline{X}^{\mathrm{T}}=0\}$. 于是, n 阶酉群 $U(n)=$

$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})_{I_n}$ 为实 C^ω 李群，它的李代数为（见 2.5.4 定理 18(3)）

$$u(n) = \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{C}) \mid X + \overline{X}^{\mathrm{T}} = 0\}.$$

令 $X = X_1 + \mathrm{i}X_2, X_1, X_2 \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$，则

$$(X_1 + X_1^{\mathrm{T}}) + \mathrm{i}(X_2 - X_2^{\mathrm{T}}) = O \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_1 + X_1^{\mathrm{T}} = 0 \\ X_2 - X_2^{\mathrm{T}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{jj}^{(1)} = 0, x_{jl}^{(1)} = -x_{lj}^{(1)}, \\ x_{jl}^{(2)} = x_{lj}^{(2)}, j \neq l. \end{cases}$$

因此，$U(n)$ 为 $\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) = n^2$ 维实 C^ω 李群（注意，它不必是复 C^ω 李群．例如，当 n 为奇数时，它就不是复解析李群）．

例 17　当 $K = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ 记作 J 时，相应的固定群

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C}) = \mathrm{GL}(2n,\mathbf{C})_J = \{P \in \mathrm{GL}(2n,\mathbf{C}) \mid PJP^{\mathrm{T}} = J\}$$

称为 n 阶复斜交（辛）群．显然

$$P(n) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -nI_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbf{C}),$$

且 $\|P(n)\| > n$，故 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C})$ 无界，从而它是非紧的．

令

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \in \mathrm{gl}(2n,\mathbf{C})_J,$$

则 $XJ + JX^{\mathrm{T}} = 0$，即

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{\mathrm{T}} & X_3^{\mathrm{T}} \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -X_2 + X_2^{\mathrm{T}} & X_1 + X_4^{\mathrm{T}} \\ -X_4 - X_1^{\mathrm{T}} & X_3 - X_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2^{\mathrm{T}} = X_2; \\ X_3^{\mathrm{T}} = X_3; \\ X_1^{\mathrm{T}} = -X_4. \end{cases}$$

X 中独立元素共有 $2 \cdot \frac{n^2+n}{2} + n^2 = 2n^2 + n$ 个，因此 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C})$ 为复 $2n^2+n$ 维 C^ω 李群．

应用线性代数中分块矩阵和“打洞”的办法可以证明：$A \in \mathrm{Sp}(n,\mathbf{C}) \Leftrightarrow A$ 可表示为以下两种矩阵的有限乘积：

1° $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{bmatrix}$，其中 $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$；

2° $\begin{bmatrix} I_n & S \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & I_n \end{bmatrix}$，其中 $S^{\mathrm{T}} = S, T^{\mathrm{T}} = T$．

因此，要证 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C})$ 道路连通，只须证 1° 和 2° 类型的矩阵与 I_{2n} 在 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C})$ 中道路相连．事实上，令

$$\varphi_i:[0,1]\to \mathrm{Sp}(n,\mathbf{C}),\quad i=1,2,3.$$

$$\varphi_1(t)=\begin{bmatrix}\varphi_0(t) & 0\\ 0 & (\varphi_0^{\mathrm T}(t))^{-1}\end{bmatrix},\varphi_1(0)=I_{2n},\varphi_1(1)=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & (P^{\mathrm T})^{-1}\end{bmatrix}.$$

$$\varphi_2(t)=\begin{bmatrix}I_n & tS\\ 0 & I_n\end{bmatrix},\ \varphi_2(0)=I_{2n},\ \varphi_2(1)=\begin{bmatrix}I_n & S\\ 0 & I_n\end{bmatrix}.$$

$$\varphi_3(t)=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ tT & I_n\end{bmatrix},\ \varphi_3(0)=I_{2n},\ \varphi_3(1)=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ T & I_n\end{bmatrix}.$$

立即得到所要求的结论.

类似地,n 阶实斜交(辛)群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})$ 为实 $2n^2+n$ 维 C^∞ 李群,非紧致且是道路连通的.

例 18 设 $K=\begin{bmatrix}-I_r & 0\\ 0 & I_s\end{bmatrix}=L,r+s=n,r,s\geqslant 1$,固定群

$$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_L=\{P\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\mid PLP^{\mathrm T}=L\}$$

称为(r,s)型洛伦茨(H. A Lorentz)群.

容易验证

$$P(n)=\begin{bmatrix}\sqrt{1+n^2} & & & & n & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 0\\ n & & & & \sqrt{1+n^2} & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & & 1\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_L$$

且 $\|P(n)\|>m$,故 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_L$ 无界,从而非紧致.

因为

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}\in \mathrm{gl}(n,\mathbf{R})_L\Leftrightarrow XL+LX^{\mathrm T}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X_1^{\mathrm T}=-X_1,\\ X_2^{\mathrm T}=X_3,\\ X_4^{\mathrm T}=-X_4,\end{cases}$$

故 X 中独立元素共有

$$\frac{r^2-r}{2}+\frac{s^2-s}{2}+sr=\frac{(r+s)^2-(r+s)}{2}=\frac{n^2-n}{2}(\text{个}),$$

因此,$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_L$ 为实$\frac{n(n-1)}{2}$维 C^∞李群.

根据线性代数知识,不难证明

$$P\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_L\Leftrightarrow$$

$$P=\begin{pmatrix}O_1&0\\0&O_2\end{pmatrix}\left[\begin{array}{cccccccccccc}\sqrt{1+\lambda_1^2}&&&&&&\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&&&\ddots&&&&\\&&\sqrt{1+\lambda_\theta^2}&&&&&&\lambda_\theta&&&\\&&&1&&&&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&&&\\&&&&&1&&&&&&\\\lambda_1&&&&&&\sqrt{1+\lambda_1^2}&&&&&\\&\ddots&&&&&&\ddots&&&&\\&&\lambda_\theta&&&&&&\sqrt{1+\lambda_\theta^2}&&&\\&&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&&1\end{array}\right]\begin{pmatrix}O_3&0\\0&O_4\end{pmatrix},$$

其中 $O_1,O_3\in O(r),O_2,O_4\in O(s),\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_\theta>0$. 由此和 $O(r),O(s)$ 都恰有两个道路连通分支,所以 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 恰有 4 个道路连通分支.

在相对论中出现的洛伦茨群是 $n=4,r=1$.

2.2　向　量　丛

2.2.1　纤维丛

设 $r\in\{0,1,\cdots,\infty,\omega\}$, E, M 和 F 为 C^r 流形, G 为 C^r 群,它有效作用在 F 上, $\pi:E\to M$ 为 C^r 满映射,且是局部平凡的,也就是存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 和相应的 C^r 同胚族 $\{\psi_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$,使得对每个 $\alpha\in\Gamma$,图 2-1

$$\begin{array}{ccc}E|_{U_\alpha}=\pi^{-1}(U_\alpha)&\xrightarrow{\psi_\alpha}&U_\alpha\times F\\&\searrow^{\pi}\quad\swarrow_{\pi_{1\alpha}}&\\&U_\alpha&\end{array}$$

图 2-1

是可交换的,即 $\pi=\pi_{1\alpha}\circ\psi_\alpha$,其中 $\pi_{1\alpha}(x,a)=x$. 显然, $\psi_{\alpha x}=\psi_\alpha|_x:\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times F$ 为 C^r 同胚. 如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,则 ψ_α 和 ψ_β 诱导出 C^r 同胚 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$,且图 2-2

$$\begin{array}{ccc}(U_\alpha\cap U_\beta)\times F&\xrightarrow{\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}}&(U_\alpha\cap U_\beta)\times F\\&\searrow^{\pi_{1\alpha}}\quad\swarrow_{\pi_{1\beta}}&\\&U_\alpha\cap U_\beta&\end{array}$$

图 2-2

是可交换的,即 $\pi_{1\alpha}=\pi_{1\beta}\circ\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$. 令 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(x,a)=(x,g_{\beta\alpha}(x)a)$,这里 $g_{\beta\alpha}(x):F\to F$ 为 C^r 同胚和从 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 到 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 的转换映射 $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 为 C^r 映,如果 $U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$ 或 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,而 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ 和 $\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$ 为 C^r 映射,则称 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 与 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 是 C^r 相容的. 此时,令 $\mathscr{B}'=$

$\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$,类似 C^r 流形的定义,它唯一确定了一个 E 的最大局部平凡化系族 $=\{(\pi^{-1}(U),\psi)\mid(\pi^{-1}(U),\psi)$ 与 $\mathscr{B}'$ C^r 相容$\}$.而 $\mathscr{B}'$ 称为生成 $\mathscr{B}$ 的一个基.显然,如果 $\mathscr{B}'_1$ 和 $\mathscr{B}'_2$ 都是基,则 $\mathscr{B}_1=\mathscr{B}_2\Leftrightarrow\mathscr{B}'_1$ 和 $\mathscr{B}'_2$ 是 C^r 相容的.我们称六元组 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为 C^r 纤维丛,E 为丛(全)空间,M 为底空间,π 为从 E 到 M 上的投影,G 为构造群(或结构群),F 为纤维,$E_x=\pi^{-1}(\{x\})$ 为 x 上的纤维.$\mathscr{B}$ 中的元素$(\pi^{-1}(U),\psi)$ 称为局部平凡化系(或丛图卡,或丛图片).$\pi^{-1}(U)$ 称为局部平凡化邻域,ψ_α 称为局部平凡化映射.有时也称 $\mathscr{B}$ 为丛图册,称 E 为纤维丛.

如果 M,F 分别为 n 和 m 维 C^r 流形,则 E 为 $n+m$ 维 C^r 流形.

如果将 C^r 流形、C^r 群、C^r 有效作用、C^r 满映射、C^r 同胚、C^r 映射分别改为拓扑空间、拓扑群、连续有效作用、连续满映射、同胚、连续映射,则称 ξ 或 E 为拓扑纤维丛.

2.2.2　向量丛

如果纤维丛中,纤维 $F=\mathbf{R}^m$,构造群 $G=\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$(或 $\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$ 的正则 C^r 李子群 H).根据 2.1.3 例 9,$\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$ 左方 C^ω(或 HC^r)有效作用在 $\mathbf{R}^m$ 上.如果 $\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbf{R}^m$ 为 C^r 同胚,$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$(或 H)为 C^r 映射,而 $\psi_\alpha|_x:\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times\mathbf{R}^m$ 和 $g_{\beta\alpha}(x):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 都为线性同构,则称 C^r 纤维丛 $\zeta=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{B}\}$ 为秩 m 的 C^r(实)向量丛.它是沿 M 的 m 维向量空间族,局部可视作平凡积,它们是通过构造群 $\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$(或 $\mathrm{GL}(m,\mathbf{R})$ 的正则 C^r 李子群)粘起来的(图 2-3).

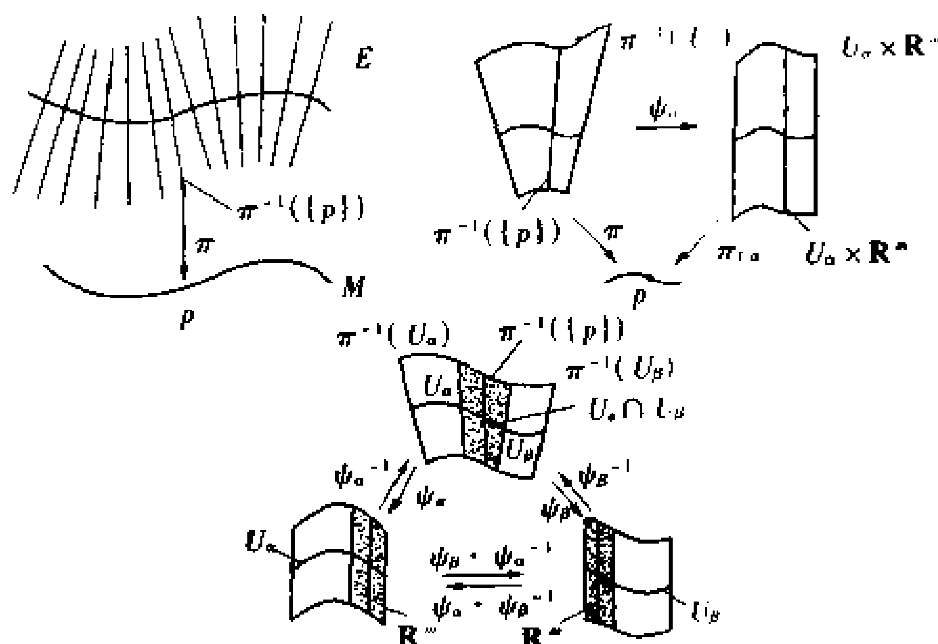


图 2-3

例19　设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为 C^r 纤维丛，如果存在丛图卡 $(E,\psi)\in\mathscr{B}$，则称 ξ 为平凡丛. 此时，$\psi:E=\pi^{-1}(M)\to M\times F$ 为 C^r 同胚，$\psi|_x:E_x=\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times F$ 也为 C^r 同胚.

设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{B}\}$ 为 C^r 向量丛，如果存在丛图卡 $(E,\psi)\in\mathscr{B}$，使 $\psi:E=\pi^{-1}(M)\to M\times\mathbf{R}^m$ 为 C^r 同胚，$\psi|_x:E_x=\pi^{-1}(\{x\})\to\{x\}\times\mathbf{R}^m$ 为线性同构，则称 ξ 为平凡向量丛.

2.2.3　C^k 截面

设 $\xi=\{E,M,\pi,G,F,\mathscr{B}\}$ 为 C^r(或拓扑)纤维丛. 如果对 $0\leqslant k\leqslant r$ 存在 C^k(或连续)映射 $\sigma:M\to E$，使 $\sigma(x)\in E_x$，$x\in M$，即 $\pi\circ\sigma=\mathrm{Id}_M$，则称 σ 为 ξ(或 E)的一个 C^k(或连续)截面. 记 C^k 截面的全体为 $C^k(\xi)$ 或 $C^k(E)$.

容易证明 $\sigma:M\to\sigma(M)$ 为 C^k 同胚(或同胚).

如果 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{B}\}$ 为秩 m 的 C^r 向量丛，则它有一个特殊的 0 截面 $\sigma_0:M\to E$，$\sigma_0(x)=\mathbf{0}_x\in E_x$. 于是，$\sigma_0:M\to\sigma_0(M)=\{\mathbf{0}_x\mid x\in M,\mathbf{0}_x$ 为 E_x 中的零向量$\}$ 为 C^r 同胚. 由此我们可将 M 和 0 截面的像视作相同(图 2-4).

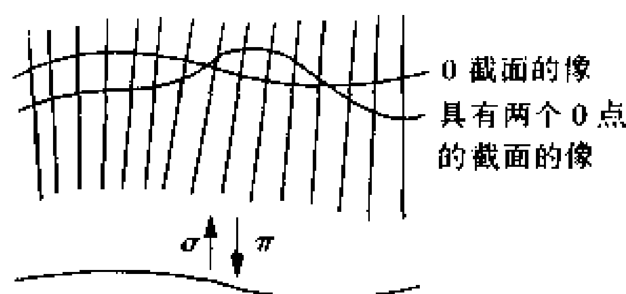


图 2-4

对任何 $\sigma,\eta\in C^k(\xi)=C^k(E)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，定义加法和数乘如下：

$$(\sigma+\eta)(x)=\sigma(x)+\eta(x),$$
$$(\lambda\sigma)(x)=\lambda\cdot\sigma(x),\ x\in M.$$

容易验证，$C^k(\xi)=C^k(E)$ 在上述加法和数乘下形成一个 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 如果 $m\geqslant 1$，它是无限维的. 除上述加法外，对 $\lambda\in C^k(M,\mathbf{R})$，$\sigma,\eta\in C^k(\xi)$，定义：$(\lambda\sigma)(x)=\lambda(x)\cdot\sigma(x)$，$x\in M$. 于是，$C^k(\xi)$ 就成为 $\mathbf{R}$ 值函数的代数上的一个模(图 2-5).

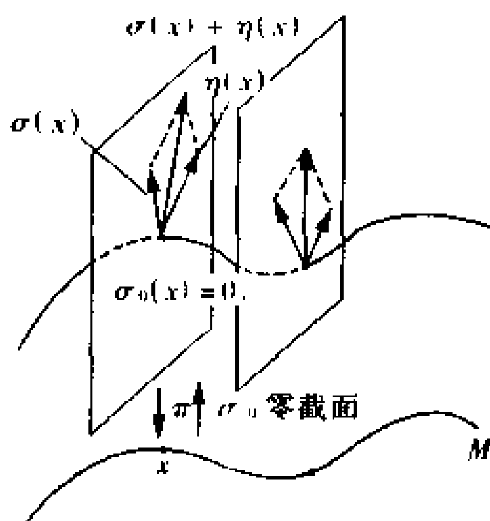


图 2-5

2.3 切 丛

2.3.1 切向量和切空间

为便于将 R^n 中切向量推广到 C^∞ 流形上，下面研究方向导数的性质，并用"映射"或"算子"的观点（近代数学观点或不变观点）定义切向量.

设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，$C^\infty(p)\{(f,U_f)\mid p\in U_f\subset M, U_f$ 为 M 的开集，$f:U_f\to\mathbf{R}$ 为 C^∞ 函数$\}$. 如果映射 $X_p: C^\infty(p)\to\mathbf{R}, f\mapsto X_pf$, 对任意 $(f,U_f),(g,U_g)\in C^\infty(p), \lambda\in\mathbf{R}$ 满足：

1° 若 $(f,U_f)\sim(g,U_g)$，即存在开集 $U\subset U_f\cap U_g$，使 $f|_U=g|_U$，则

$$X_pf=X_pg;$$

2° 线性性，即

$$X_p(f+g)=X_pf+X_pg,\quad U_{f+g}=U_f\cap U_g,$$
$$X_p(\lambda f)=\lambda X_pf,\quad U_{\lambda f}=U_f,$$

3° 导性，即

$$X_p(fg)=g(p)X_pf+f(p)X_pg, U_{fg}=U_f\cap U_g,$$

则称 X_p 为 p 点处的一个**切向量**.

设 $T_pM=\{X_p\mid X_p$ 为 p 点处的切向量$\}$. 如果 $X_p, X_{1p}, X_{2p}\in T_pM, \lambda\in\mathbf{R}$，定义

加法 $(X_{1p}+X_{2p})f=X_{1p}f+X_{2p}f$,

数乘 $(\lambda X_p)f=\lambda X_pf$.

易见 $X_{1p}+X_{2p},\lambda X_p\in T_pM$，且 T_pM 关于上述加法和数乘满足向量空间的各个条件，使 T_pM 成为一个向量空间，称它为 p 点处的切空间.

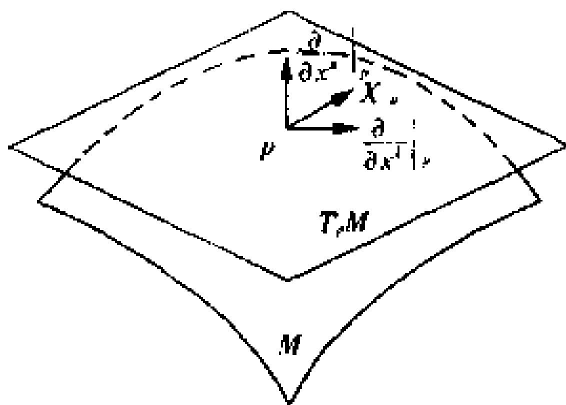


图 2-6

定理 3 T_pM 为 n 维向量空间（图 2-6）.

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}$ 和 $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}$ 为 p 点的两个局部坐标系，由

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_pf=\frac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)).$$

定义了 p 点处的一个坐标基切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\in T_pM$. 由此，易得坐标基变换公式：

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p=\sum_{i=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\varphi_\beta(p))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix}_{\varphi_\beta(p)} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{bmatrix}_p,$$

以及切向量

$$X_p = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p$$

的坐标变换公式:

$$b^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p))a^i,$$

即

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}_{\varphi_\alpha(p)} \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix},$$

其中$\{a^i\}$和$\{b^j\}$分别称为切向量X_p关于局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^j\}$的分量.

由此,可用“坐标”观点或古典观点来定义切向量. 设L_p为p点的局部坐标系的全体,如果映射$X_p: L_p \to \mathbf{R}^n$使得对任何$\{x^i\}, \{y^j\} \in L_p$有$X_p(\{x^i\}) = \{a^i\}$, $X_p(\{y^j\}) = \{b^j\}$且满足上述坐标变换公式,则称X_p为p点的一个切向量. 这定义的优点在于只要求M为$C^r(r \geqslant 1)$流形.

2.3.2　切丛

设$(M, \mathscr{D})$为n维C^∞流形,定义M的切丛$\xi = \{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{E}\}$如下:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

$\pi: TM \to M$, $\pi(T_pM) = \{p\}$,即$\pi(X_p) = p$, $X_p \in T_pM$. $\pi^{-1}(\{p\}) = T_pM$为p点处的纤维. 对任何(U, φ), $\{x^i\} \in \mathscr{D}$,定义局部平凡化为$\psi: \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_pM \to U \times \mathbf{R}^n$, $\psi(X_p) = \psi\left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = (p; a^1, a^2, \cdots, a^n)$,而$\psi|_p: \pi^{-1}(\{p\}) = T_pM \to \{p\} \times \mathbf{R}^n$为同构. 由$\psi$为一一映射,故从$U \times \mathbf{R}^n$的拓扑自然导出$\pi^{-1}(U)$的拓扑,使$\psi$为同胚. 显然$\tau^* = \{\pi^{-1}(U)$中的开集$\mid (U, \varphi) \in \mathscr{D}\}$为$TM$的拓扑基,它唯一确定了$TM$上的一个拓扑$\tau$. 明显地,$TM$为$T_2$空间,$\pi^{-1}(U)$为其开子集. 且$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi: \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$, $(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) \circ \psi(X_p) = (\varphi(p); a^1, \cdots, a^n) = (x^1, \cdots,$

$x^n;a^1,\cdots,a^n)$ 为同构,而 TM 为 $2n$ 维拓扑流形.

令 $\mathscr{C}'=\{(\pi^{-1}(U),\psi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$. 如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D},(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^j\}\in\mathscr{D}$,则当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时,有

$$
\begin{aligned}
(p;b^1,b^2,\cdots,b^n) &= (p;g_{\beta\alpha}(p)a) = \psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p;a^1,a^2,\cdots,a^n)\\
&= \Big(p;\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^1}{\partial x^i}a^i,\cdots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^n}{\partial x^i}a^i\Big),
\end{aligned}
$$

其中

$$
g_{\beta\alpha}(p)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{bmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}\in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}).
$$

显然,$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 为 C^∞ 映射. 又因

$$
\begin{aligned}
&(y^1,\cdots,y^n;b^1,\cdots,b^n)\\
&=((\varphi_\beta,\mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi_\beta)\circ((\varphi_\alpha,\mathrm{Id}_{R^n})\circ\psi_\alpha)^{-1}(x^1,\cdots,x^n;a^1,\cdots,a^n)\\
&=\Big(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\cdots,x^n);\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^1}{\partial x^i}a^i,\cdots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial y^n}{\partial x^i}a^i\Big),
\end{aligned}
$$

简记为$(\boldsymbol{y};\boldsymbol{b})=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x});g_{\beta\alpha}(p)\boldsymbol{a})$. 故 TM 为 $2n$ 维 C^∞ 流形,而$\{(\pi^{-1}(U),(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$ 为其微分构造的基. 由$(x^1,\cdots,x^n)=\varphi\circ\pi\circ((\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi)^{-1}(x^1,\cdots,x^n;a^1,\cdots,a^n)$和$(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi\circ((\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})\circ\psi)^{-1}=\mathrm{Id}_{\varphi(U)\times\mathbf{R}^n}$可知,$\pi$ 和 ψ 分别为 C^∞ 映射和 C^∞ 同胚. 于是,由 $\mathscr{C}'$ 唯一确定了 TM 的一个丛图册 $\mathscr{C}$,使 ξ 或 TM 成为 M 上的一个秩 n 的 C^∞ 向量丛,称它为切丛.

2.3.3 C^k 切向量场

设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形,TM 为其 C^∞ 切丛,$U\subset M$,则称 U 上的截面 $X:U\to TM(\pi|_U\circ X=\mathrm{Id}_U:U\to U$ 或对任何 $p\in U$,在映射 X 下对应于 $X_p\in T_pM)$ 为 U 上的切向量场. 如果 X 为C^0(即连续)截面,则称它为 C^0(即连续)切向量场;如果 $U\subset M$ 为开集,则称 $C^k(1\leqslant k\leqslant\infty)$ 截面 X 为 C^k 切向量场. 记 U 上的 C^k 切向量场全体为 $C^k(TU)$ 或 $C^k(TM|_U)$.

定理 4 设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 流形,则

1° X 为 M 上的 $C^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何$(U,\varphi),\{x^i\}\in\mathscr{D}$,$X_p=\sum\limits_{i=1}^n a^i(p)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$,$p\in U$,有 $a^i\in C^k(U,\mathbf{R})$;

2° X 为 M 上的 C^∞ 切向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$,有 $Xf\in C^\infty(M,\mathbf{R})$.

2.3.4 f 在 p 点处的微分或瓦可比映射

设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为 n_i 维 C^∞ 流形,$i=1,2$. $f:M_1\to M_2$ 为 C^∞ 映射,$p\in M_1$,$f(p)\in$

M_2.令映射

$$f_{*p}: T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2,$$

使对任何$(h, U_h) \in C^\infty(f(p))$,有$f_{*p}(X_p)h = X_p(h \circ f)$, $X_p \in T_pM$.易见$f_{*p}(X_p) \in T_{f(p)}M_2$,且$f_{*p}$为线性映射,称$f_{*p}$为$f$在$p$点处的微分或瓦可比映射(也记作$(\mathrm{d}f)_p$).

特别地,在p的局部坐标系(U,φ), $\{x^i\}$和$f(p)$的局部坐标系(V,ψ), $\{y^j\}$里有

$$y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x),$$

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{f(p)},$$

$$\begin{bmatrix} f_{*p}\dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ f_{*p}\dfrac{\partial}{\partial x^{n_1}} \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{n_1}} & \cdots & \dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^{n_1}} \end{bmatrix}_{\varphi(p)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial y^{n_2}} \end{bmatrix}_{f(p)}.$$

称$\left(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$为$f_{*p}$关于局部坐标系$\{x^i\}$, $\{y^j\}$的雅可比矩阵.

设

$$X_p = \sum_{i=1}^{n_1}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p,\quad f_{*p}(X_p) = \sum_{j=1}^{n_2}b^j\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{f(p)},$$

则

$$b^j = \sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}a^i,$$

即

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^{n_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{n_2}}{\partial x^{n_1}} \end{bmatrix}_{\varphi(p)} \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^{n_1} \end{bmatrix}.$$

定理5　设M, N, L分别为m, n, l维C^∞流形,则

1° $(\mathrm{Id}_M)_{*p} = \mathrm{Id}_{T_pM}$;

2° 若$f: M \to N$和$g: N \to L$为C^∞映射,则

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p};$$

3° f为C^∞浸入$\Leftrightarrow f: M \to N$为$C^\infty$映射,且对任何$p \in M$, $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$为单同态,因而$f_{*p}: T_pM \to f_{*p}(T_pM) \subset T_{f(p)}N$为同构;

4° 若f为C^∞同胚,则$f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$为同构.

2.4　C^∞ 切向量场和积分曲线

2.4.1　$C^r(r\geqslant 1)$ 曲线的切向量场

设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形，$W\subset \mathbf{R}^1$为开集，则称C^r映射(不是映射的像集)$\sigma: W\to M$为M中的一条C^r曲线．如果$\sigma:[a,b]\to M$可延拓到含$[a,b]$的开集W上使得$\tilde{\sigma}:W\to M$为C^r曲线，且$\tilde{\sigma}|_{[a,b]}=\sigma$，则也称$\sigma$为$C^r$曲线，有时仍记$\tilde{\sigma}$为$\sigma$．

设$\sigma:(a,b)\to M$为C^∞曲线，(U,φ)，$\{x^1,\cdots,x^n\}$为含$\{\sigma(t)\mid t\in(a,b)\}$的局部坐标系($t$称为曲线$\sigma$的参数)．对每个$t\in(a,b)$，确定了一个沿$\sigma$的切向量(图2-7)．

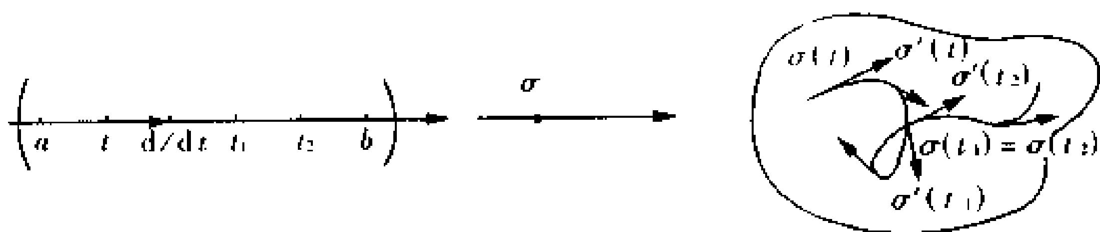


图 2-7

$$\sigma'(t)=\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_t\right)=\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\sigma(t)}.$$

特别，对坐标曲线σ_i，即$\varphi\circ\sigma_i(x^i)=(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)$，$x^i$为参数，则沿$\sigma_i$的切向量场应是$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\sigma_i(x^i)}$，它是第$i$个坐标切向量场限制在$\sigma_i$的像集上的值(图2-8)．

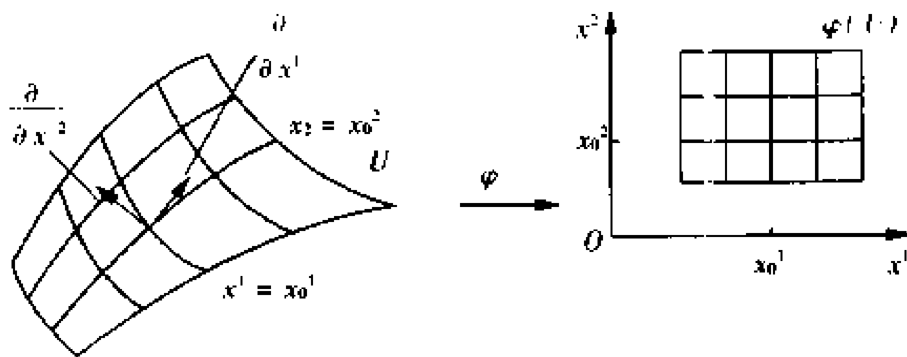


图 2-8

现在给出C^∞映射$f:M_1\to M_2$的微分f_*的几何直观．设σ为M_1上的一条C^∞曲线，则$f\circ\sigma$为M_2上的一条C^∞曲线，且

$$(f\circ\sigma)'(t)=(f\circ\sigma)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=f_*\circ\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=f_*(\sigma'(t)).$$

例 20　设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为 C^∞ 函数，$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)=1$，则 $f(x^1,x^2,\cdots,x^n)=0$ 确定了 $M=f^{-1}(0)$ 或为空集或为 R^n 中的 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形.

如果 $M=f^{-1}(0)$ 非空.设 σ 为 M 上的 C^∞ 曲线，$I:M\to\mathbf{R}^n$ 为包含映射，沿 $I\circ\sigma$ 的切向量场为 $(I\circ\sigma)'(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}(x^i\circ I\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{I\circ\sigma(t)}$.将关于 t 的恒等式

$$f(x^1(I\circ\sigma(t)),\cdots,x^n(I\circ\sigma\circ(t)))\equiv 0$$

的两边对 t 求导得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^i\circ I\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}=0,$$

即 $M=f^{-1}(0)$ 上的切向量与法向量 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{I\circ\sigma(t)}$ 正交.

2.4.2　C^∞ 积分曲线

设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，$U\subset M$ 为开集，X 为 U 上的 C^∞ 切向量场，$\sigma:(a,b)\to M$ 为 C^∞ 曲线，$\sigma((a,b))\subset M$，且 $\sigma'(t)=X_{\sigma(t)}$，$t\in(a,b)$，则称 σ 为 X 的积分曲线或流线.

定理 6（积分曲线的局部存在性定理）　设 X 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的某开集上的 C^∞ 切向量场，p 为 X 的定义域中的一点，则对任何 $b\in\mathbf{R}$，存在 $\epsilon>0$ 和唯一的 C^∞ 曲线 $\sigma:(b-\epsilon,b+\epsilon)\to M$，使得 $\sigma(b)=p$ 和 σ 为 X 的 C^∞ 积分曲线(图 2-9).

此外，σ C^∞ 依赖于初始值 b 和点 p.

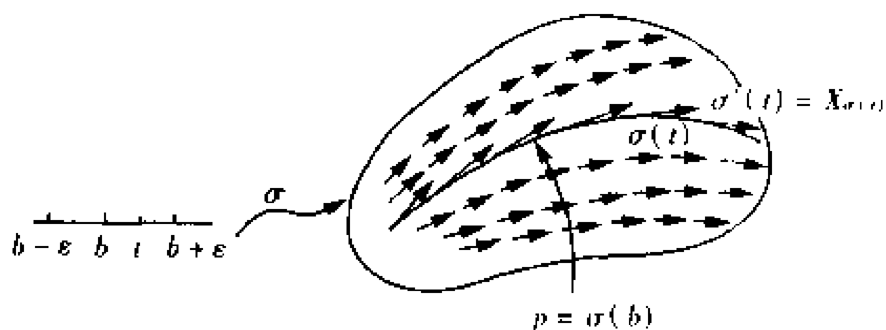


图 2-9

2.4.3　1 参数群和局部 1 参数群

如果 C^∞ 映射 $h:\mathbf{R}^1\times M\to M$，$h(t,p)=h_t(p)$ 满足

1° $h_{t+s}=h_t\circ h_s$，$t,s\in\mathbf{R}^1$；

2° $h_0=\mathrm{Id}_M$，

则有

$$h_t \circ h_{-t} = h_{t+(-t)} = h_0 = \mathrm{Id}_M,$$

同理 $h_{-t} \circ h_t = Id_M$,故 $h_t^{-1} = h_{-t}$,于是 $h_t: M \to M$ 为 C^∞ 同胚或 C^∞ 变换.则称 $h_t: M \to M$ 为 M 上的 C^∞ 变换的(整体)1 参数群.

显然,$\mathbf{R}^1$ 作为(关于加法的)C^∞ 李群左方 C^∞ 作用在 M 上.

固定 $p \in M$,则 $t \mapsto h_t(p)$ 为一条通过 p 的 C^∞ 曲线,称为 p 的轨道.定义

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x^i(h_t(p))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

(它与 p 的局部坐标系的选取无关).因为 h 是 C^∞ 映射,故映射 $p \to X_p$ 定义了 M 上的一个 C^∞ 切向量场,称为 1 参数群 h_t 的无穷小变换.

例 21 $M = (0,1)$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$,则过 x 的积分曲线为 $h_t(x) = t + x, x \in (0,1)$, $t + x \in (0,1)$.于是 C^∞ 切向量场 $\frac{\partial}{\partial x}$ 不产生 $(0,1)$ 上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群.

例 21 指出,M 上的 C^∞ 切向量场不一定产生 M 上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群,但局部地有

定理 7 (局部 1 参数群的存在性) 设 X 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的 C^∞ 切向量场,$p_0 \in M$.则存在 p_0 的一个开邻域 V 和 $\varepsilon > 0$,使得对任何 $t \in (-\infty,\infty)$ 有一个 C^∞ 局部变换 $h_t: V \to M$,且成为局部 1 参数群,即存在 C^∞ 映射 $h: (-\varepsilon,\varepsilon) \times V \to M$, $h_t,(p) = h_t(p)$ 满足:

1° $h_t: V \to h_t(V)$ 为 C^∞ 同胚,$t \in (-\infty,\infty)$;

2° $h_0 = \mathrm{Id}_V$;

3° $t,s,t+s \in (-\varepsilon,\varepsilon), p, h_s(p) \in V \Rightarrow h_{t+s}(p) = h_t \circ h_s(p)$.

该 h_t 诱导出已给的切向量场 X.

如果 $\tilde{h}_t$ 为 $(-\varepsilon,\varepsilon) \times V$ 上诱导出 X 的另一个 C^∞ 局部变换的 1 参数群,则 $\tilde{h}_t = h_t$(唯一性).

2.4.4 完备的 C^∞ 切向量场

设 X 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 C^∞ 切向量场.如果存在 M 上的 C^∞ 变换的整体 1 参数群 h_t,它诱导出 X,则称 X 为完备的 C^∞ 切向量场.

定理 8 设 K 为 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的紧致子集,X 为 M 上的 C^∞ 切向量场,且 $X|_{M-K} = 0$,则 X 是完备的.

特别地,紧致 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 C^∞ 切向量场 X 是完备的.

2.5 李导数[,]、李代数

2.5.1 李群上的不变向量场

设 G 为 n 维 C^∞ 李群,$a \in G$.分别称 $L_a: G \to G, x \mapsto L_a(x) = a \cdot x$ 和 $\mathbf{R}_a: G$

$\to G, x \mapsto R_a(x) = x \cdot a$ 为 G 的左移和右移.

设 X 为 n 维 C^∞ 李群 G 上的切向量场,如果对任何 $a,b \in G$ 有 $(L_{ba^{-1}})_{*a}X_a = X_b$,则称 X 为左不变向量场.类似可定义右不变向量场.

定理 9　X 为 n 维 C^∞ 李群 G 上的左不变向量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 $a \in G, X_a = (L_a)_{*e}X_e$,即 X 由 X_e 完全确定 $\Leftrightarrow$ 对任何 $a \in G, X = (L_a)_* X$.

此外,左不变向量场 X 为 C^∞ 切向量场.

定理 10　设 G 为 n 维 C^∞ 李群, $\{(X_i)_e \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 T_eG 的一个基, $\{X_i \mid (X_i)_a = (L_a)_{*e}(X_i)_e, a \in G, i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 G 上的整体 C^∞ 基向量场.

2.5.2　可平行的 C^∞ 流形

如果 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上具有整体的 C^∞ 基向量场 $\{X_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$,则称 $(M,\mathscr{D})$ 是可平行的.

定理 11　1° 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形,则 $(M,\mathscr{D})$ 可平行 $\Leftrightarrow TM$ 是平凡向量丛.

2° C^∞ 李群 G 是可平行的,即 TG 是平凡向量丛.

例 22　由代数拓扑或微分拓扑知识, S^{2m} 上无处处非 0 的连续切向量场, TS^{2m} 不是 C^∞ 平凡向量丛,当然 S^{2m} 也不是 C^∞ 李群.

在 S^{2m-1} 上有处处非 0 的 C^∞ 切向量场 $X|_x = \{x_2, -x_1, x_4, -x_3, \cdots, x_{2m}, -x_{2m-1}) x \in S^{2m-1}$. 自然要问 S^{2m-1} 是否可平行?它是否成为一个李群?亚当斯(J. F. Adams)在1960年证明了: TS^n 为平凡向量丛 $\Leftrightarrow n = 1,3,7$. 而由2.1.1例4和例5知 S^1, S^3 为 C^∞ 李群,当然 TS^1, TS^3 为平凡向量丛.

现在来具体构造 S^1, S^3 和 S^7 上的左不变 C^∞ 基向量场.

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 和 $X|_x = (-x^2, x^1)$ 为 S^1 上的整体 C^∞ 基向量场.设

$$S^1 = \{x = x^1 + ix^2 \in \mathbf{C} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\},$$
$$X_e = \sigma'(0) = i,$$

由

$$\begin{aligned} X|_x &= (L_x)_* X_e = (L_x)_* \sigma'(0) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}(L_x\sigma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(x \cdot \sigma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= x\sigma'(0) = xi = -x^2 + ix^1, \end{aligned}$$

故 X 为 S^1 上的左不变向量场.

设 $S^3 = \{x = x^1 + ix^2 + jx^3 + kx^4 \in H(\text{四元数广域}) \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$,类似于 S^1, xi, xj, xk 为 S^3 上的左不变 C^∞ 基切向量场.

对于 S^7,应用八元数乘法(注意,它不可交换,也不可结合,所以不能由此乘法来说明 S^7 为李群!)可以得到

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 & -x^6 & x^5 & x^8 & -x^7 \\ -x^3 & x^4 & x^1 & -x^2 & -x^7 & -x^8 & x^5 & x^6 \\ -x^4 & -x^3 & x^2 & x^1 & -x^8 & x^7 & -x^6 & x^5 \\ -x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^1 & -x^2 & -x^3 & -x^4 \\ -x^6 & -x^5 & x^8 & -x^7 & x^2 & x^1 & x^4 & -x^3 \\ -x^7 & -x^8 & -x^5 & x^6 & x^3 & -x^4 & x^1 & x^2 \\ -x^8 & x^7 & -x^6 & -x^5 & x^4 & x^3 & -x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \frac{\partial}{\partial x^5} \\ \frac{\partial}{\partial x^6} \\ \frac{\partial}{\partial x^7} \\ \frac{\partial}{\partial x^8} \end{bmatrix}$$

为 $\mathbf{R}^8$ 的 C^∞ 规范正交基向量场,基中 e_1 为 S^7 上的 C^∞ 单位法向量场,而$\{e_i \mid i = 2,3,\cdots,8\}$ 为 S^7 上的 C^∞ 规范正交的整体基切向量场,故 S^7 是可平行的,从而 TS^7 为平凡向量丛.但可证 S^7 不是李群.因此,S^n 为 C^∞李群 $\Leftrightarrow n = 0,1,3$.

2.5.3 李导数[,]

设 X 和 Y 为 n 维 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的开集 V 上的 C^∞ 切向量场,定义 $L_XY = [X,Y]$ 如下:

$$[X,Y]_pf = X_p(Yf) - Y_p(Xf), p \in V,$$

f 为 V 上的 C^∞ 函数.由下面的引理 1,$[X,Y]$ 为 V 上的 C^∞ 切向量场,称为 X 和 Y 的交换子积或方括号积或 Y 关于 X 的李导数.

引理 1 $[X,Y]$ 为 V 上的 C^∞ 切向量场.

定理 12 设 X,Y,Z 为 n 维 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的开集 V 上的 C^∞ 切向量场,f,$g,h \in C^\infty(V,\mathbf{R})$,$\lambda,\mu \in \mathbf{R}$,$(U,\varphi)$,$\{x^i\}$ 为局部坐标系.则$[\cdot,\cdot]$有以下性质:

1° $[X,Y] = -[Y,X]$,反称性,

$[X,X] = 0$,幂零律;

2° $\left.\begin{array}{l}[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z] \\ [X,\lambda Y + \mu Z] = \lambda[X,Y] + \mu[X,Z]\end{array}\right\}$双线性;

3° $[fX,gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$;

4° $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.Jacobi恒等式;

5° $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$;

6° 如果 $X = \sum\limits_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,$Y = \sum\limits_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,则有

$$[X,Y]=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

利用定理12之6°，在局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中定义$[X,Y]=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}$，可验证上式右边与局部坐标系的选取无关，因而可定义整体的C^∞切向量场$[X,Y]$. 用上述定义(坐标观点或古典观点)，对任何C^∞函数f有$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$，并还可证明定理12中的1°～5°.

定理13　设$(M_i,\mathscr{D}_i)$为n维C^∞流形，$i=1,2$，$f:M_1\to M_2$为C^∞微分同胚，X_1,X_2为M_1上的C^∞切向量场，则

$$f_*[X_1,X_2]=[f_*X_1,f_*X_2].$$

定理14　设$(M,\mathscr{D})$为n维C^∞流形，$X,Y\in C^\infty(TM)$，h_t为Y的C^∞局部1参数群，则

$$[X,Y]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_t)_*X\Big|_{t=0}.$$

定理15　设M为n维C^∞流形，$U\subset M$为开集，$X_1,X_2,\cdots,X_k\in C^\infty(TU)$，使得$\{X_1(x),\cdots,X_k(x)\}$对所有的$x$是线性无关的. 则

在U上，$[X_i,X_j]=0$，$1\leqslant i<j\leqslant k\Leftrightarrow$

对任何$p\in U$，存在p的局部坐标系(U_0,φ)，$\{x^i\}$使得$U_0\subset U$且$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，$1\leqslant i\leqslant k$.

定理16　设M为n维C^∞流形. E为M上秩k的C^∞分布(即E为TM的秩k的子丛)，则

1° E对$[,]$是封闭的(即对任何$X,Y\in C^\infty(E)$有$[X,Y]\in C^\infty(E)$)$\Leftrightarrow$

2° 对任何$p\in M$，存在p的开邻域U中的k个局部C^∞切向量场$X_1,X_2,\cdots,X_k$使得$x\in U$的纤维E_x是由$\{X_1(x),\cdots,X_k(x)\}$张成的，且在U上，$\{X_1(x),\cdots,X_k(x)\}$对$[,]$是封闭的(即$[X_i,X_j]=\sum_{l=1}^{k}f_{ijl}X_l$，$f_{ijl}\in C^\infty(U,\mathbf{R})$)，$\Leftrightarrow$

3° 对任何$p\in M$，存在p的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$使得

$$N=\{q\in U\mid x^{k+1}(q)=c^{k+1},\cdots,x^n(q)=c^n\}$$

为E的积分子流形(即$T_xN=E_x$)或$\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^k}\}$张成$E_x$).

(1°$\Rightarrow$3°或2°$\Rightarrow$3°称为弗罗贝纽斯(F.G. Frobenius)定理)

2.5.4　李代数

设V为域F上的n维向量空间. 如果在V中定义的"乘法"运算

$$[\cdot,\cdot]:V\times V\to V,(X,Y)\mapsto[X,Y]$$

满足：

1° $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$，左分配律；

2° $[X,Y]=-[Y,X]$，反称性；

3° $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$,雅可比恒等式,这里 $\lambda,\mu\in F$, $X,Y,Z\in V$,则称 $(V,[,])$ 或 V 为域 F 上的李代数或李环.

从1°和2°立即可推出 $[Z,\lambda X+\mu Y]=\lambda[Z,X]+\mu[Z,Y]$ 右分配律.此外,如果域 F 不是特征2°的,则由2°得到 $[X,X]=-[X,X]$, $2[X,X]=0$, $[X,X]=0$,幂零律.

例 23 设 $gl(n,\mathbf{R})=\{A=(a_{ij})\mid A$ 为 n 阶实方阵$\}$,它是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n^2 维实向量空间,令

$$[A,B]=AB-BA.$$

容易验证 $(gl(n,\mathbf{R}),[,])$ 或 $gl(n,\mathbf{R})$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的李代数,称为全线性代数.

定理 17 设 $L(G)$ 为 C^∞ 李群 G 上左不变向量场的全体,则 $L(G)$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 $n(n=\dim G)$ 维向量空间,并且关于李导数运算 $[\cdot,\cdot]$, $L(G)$, $[\cdot,\cdot]$ 或 $L(G)$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维李代数(称为 C^∞ 李群 G 的李代数).

例 24 一般线性群 $GL(n,\mathbf{R})$ 的李代数 $(gl(n,\mathbf{R}),[\cdot,\cdot])$ 与全线性代数是同构的.

2.5.5 固定群 $GL(n,\mathbf{R})_K$ 的李代数 $gl(n,\mathbf{R})_K$

设 A 为 n 阶复方阵,定义 n 阶复方阵

$$e^A=\exp A=I_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^m}{m!}.$$

上式右边方阵级数当 A 在 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的有界集中变化时,它是一致收敛的.容易看出,指数映射 $A\mapsto e^A=\exp A$ 为解析映射.设

$$x(t)=e^{tA}=\exp tA=I_n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^mA^m}{m!},$$

则

$$\frac{dx}{dt}=x(t)A\quad(\text{或 }Ax(t)),$$

$$x(0)=I_n,\quad \frac{dx}{dt}(0)=x(0)A=A.$$

因此,$x(t)$ 为过单位元素且切于由 A 决定的左不变向量场 $X(X_g=gA, g\in GL(n,\mathbf{R}))$ 的积分曲线(流线).

如果 $H\subset GL(n,\mathbf{R})$ 为 C^∞ 李子群. A 为 H 在单位元素 I_n 的切向量.由2.4.2定理6的唯一性知,$\exp tA$ 为 $GL(n,\mathbf{R})$ 中由 A 决定的左不变向量场 $X_g=gA$ 的积分曲线,也是 H 中由 A 决定的左不变向量场 $X_g=gA(g\in H)$ 的积分曲线,故 $\exp tA\in H$.于是,有

定理 18 1° 设 $K\in gl(n,\mathbf{C})$,则

$$GL(n,\mathbf{C})_K=\{P\in GL(n,\mathbf{C})\mid PKP'=K\}$$

的李代数为

$$gl(n,\mathbf{C})_K=\{X\in gl(n,\mathbf{C})\mid XK+KX'=0\}.$$

2° 设 $K\in gl(n,\mathbf{R})$,则

$$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})_K = \{P \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}) \mid PKP' = K\}$$

的李代数为

$$\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})_K = \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{R}) \mid XK + KX' = 0\}.$$

3° 设 $K \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$，则固定群

$$\{P \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C}) \mid PK\overline{P'} = K\}$$

的李代数为

$$\{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{C}) \mid XK + K\overline{X'} = 0\}.$$

3 外微分形式和斯托克斯定理

3.1 张量丛和 C^∞ 张量场

3.1.1 协变(余)向量、逆变向量和对偶空间

设 V 为 n 维实向量空间，令 $V^* = \{\theta \mid \theta: V \to \mathbf{R}\}$ 为线性函数. 如果 $\theta, \eta \in V^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$，定义

$$(\theta + \eta)(X) = \theta(X) + \eta(X),$$
$$(\lambda\theta)(X) = \lambda \cdot \theta(X), X \in V.$$

显然，$\theta + \eta, \lambda\theta \in V^*$. 易证 $\{V^*, +, \text{数乘}\}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的向量空间，称为 V 的对偶空间，称 $\theta \in V^*$ 为协变(或余)向量，称 $X \in V$ 为逆变向量.

设 $\{e_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基，$e^i: V \to \mathbf{R}$, $e^i \in V^*$，且 $e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j \end{cases}$，则容易验证 $\{e^i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 V^* 的一个基，称为 $\{e_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 的一个对偶基. 如果 $\{\bar{e}_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的另一基，它的对偶基为 $\{\bar{e}^i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$，基变换公式为 $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n c_i^j e_j$, $e_i = \sum_{j=1}^n d_i^j \bar{e}_j$，即

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n^1 & \cdots & c_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \cdots & d_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ d_n^1 & \cdots & d_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}.$$

设 $X \in V$, $\sum_{j=1}^n \bar{a}^j \bar{e}_j = X = \sum_{i=1}^n a^i e_i$，则

$$\bar{a}^j = \sum_{i=1}^n d_i^j a^i,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \vdots \\ \bar{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \cdots & d_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^n & \cdots & d_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}.$$

对偶基变换公式应为 $\overline{e}^i = \sum_{j=1}^{n} d_j^i e^j$，即

$$\begin{bmatrix} \overline{e}^1 \\ \vdots \\ \overline{e}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \cdots & d_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ d_1^n & \cdots & d_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{\theta} \in V^*$，$\sum_{j=1}^{n} \overline{\theta}_j \overline{e}^j = \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i e^i$，则 $\theta_i = \boldsymbol{\theta}(e_i)$，$\overline{\theta}_j = \boldsymbol{\theta}(\overline{e}_j)$，

$$\overline{\theta}_j = \sum_{i=1}^{n} c_j^i \theta_i,$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n^1 & \cdots & c_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}.$$

而 $\{\theta_i\}$ 和 $\{\overline{\theta}_i\}$ 分别为协变向量 $\boldsymbol{\theta}$ 关于基 $\{e_i\}$，$\{e^i\}$ 和 $\{\overline{e}_i\}$，$\{\overline{e}^i\}$ 的分量. 由此仿照古典切向量的定义可给出协变向量的定义.

3.1.2　(r,s) 型张量和张量空间

设映射

$$\boldsymbol{\theta}: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{个}}$$

是偏线性的，即对任何 $W_i, U_i \in V^*$，$X_j, Y_j \in V$，$\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_{i-1}, \lambda W_i + \mu U_i, W_{i+1}, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_s) \\ &= \lambda \boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_{i-1}, W_i, W_{i+1}, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_s) + \\ &\quad \mu \boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_{i-1}, U_i, W_{i+1}, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_s), \\ &\quad \boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_{j-1}, \lambda X_j + \mu Y_j, X_{j+1}, \cdots, X_s) \\ &= \lambda \boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \cdots, X_s) + \\ &\quad \mu \boldsymbol{\theta}(W_1, \cdots, W_r; X_1, \cdots, X_{j-1}, Y_j, X_{j+1}, \cdots, X_s), \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{\theta}$ 为 V 上的 (r,s) 型张量，r 为其逆变阶数，s 为其协变阶数. $(r,0)$ 型张量称为 r 阶逆变张量，$(1,0)$ 型张量就是逆变向量；$(0,s)$ 型张量称为 s 阶协变张量，$(0,1)$ 型张量就是协变向量；为方便和统一，规定实数为 $(0,0)$ 型张量.

设 $\{e_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的基，$\{e^i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 V^* 的基，且为 $\{e_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的对偶基. 令

$$\theta_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} = \boldsymbol{\theta}(e^{i_1}, \cdots, e^{i_r}; e_{j_1}, \cdots, e_{j_s}),$$

称 n^{r+s} 个数 $(\theta_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r})$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 关于基 $\{e_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的分量.

如果 $\{\overline{e}_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的另一基，$\{\overline{e}^i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 $\{\overline{e}_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的对偶基. 令

$$\overline{\theta}_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} = \boldsymbol{\theta}(\overline{e}^{i_1}, \cdots, \overline{e}^{i_r}; \overline{e}_{j_1}, \cdots, \overline{e}_{j_s}),$$

则分量变换公式为

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n} d^{i_1}_{k_1}\cdots d^{i_r}_{k_r} c^{l_1}_{j_1}\cdots c^{l_s}_{j_s}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

逆变向量和协变向量的分量变换公式恰是这公式的两个特例.另一特例是

例1 双(偏)线性函数 $\boldsymbol{\theta}: V\times V\to\mathbf{R}$.设$\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$和$\{\bar{e}_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$为$V$的两个基.

$$\theta_{ij} = \boldsymbol{\theta}(e_i,e_j),\quad \bar{\theta}_{ij} = \boldsymbol{\theta}(\bar{e}_i,\bar{e}_j).$$

对任何 $X=\sum_{i=1}^{n}a^i e_i, Y=\sum_{i=1}^{n}b^i e_i$,有

$$\boldsymbol{\theta}(X,Y) = (a^1,\cdots,a^n)\begin{bmatrix}\theta_{11} & \cdots & \theta_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} c^k_i c^l_j \theta_{kl},\quad (\bar{\theta}_{ij}) = C(\theta_{kl})C',$$

即矩阵$(\bar{\theta}_{ij})$与(θ_{ij})是相合的.

由张量的分量变换公式和切向量的古典定义方法立即可给出古典张量的定义.

设$\otimes^{r,s}V$为所有(r,s)型张量的全体,而$\otimes^{1,0}V=V$, $\otimes^{0,1}V=V^*$, $\otimes^{0,0}V=\mathbf{R}$.对于$\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\eta}\in\otimes^{r,s}V,\lambda\in\mathbf{R}$,定义

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta})(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s) &= \boldsymbol{\theta}(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)+\\ &\quad \boldsymbol{\eta}(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),\\ (\lambda\boldsymbol{\theta})(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s) &= \lambda\cdot\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),\end{aligned}$$

其中 $W_i\in V^*, X_j\in V$.显然,$\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta},\lambda\boldsymbol{\theta}\in\otimes^{r,s}V$,则$\{\otimes^{r,s}V,+,$数乘$\}$形成一个向量空间,称为关于$V$的$(r,s)$型张量空间.

易见,$\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\eta}$和$\lambda\boldsymbol{\theta}$关于基$\{e_i \mid i=1,\cdots,n\}$的分量为

$$(\boldsymbol{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+\boldsymbol{\eta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})\quad 和\quad (\lambda\boldsymbol{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}).$$

3.1.3 张量积和张量代数

设$\boldsymbol{\theta}\in\otimes^{r_1,s_1}V,\boldsymbol{\eta}\in\otimes^{r_2,s_2}V$,定义**张量积**

$$\otimes:\otimes^{r_1,s_1}V\times\otimes^{r_2,s_2}V\to\otimes^{r_1+r_2,s_1+s_2}V,$$

$$(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\eta})\mapsto\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta})(W_1,\cdots,W_{r_1+r_2};X_1,\cdots,X_{s_1+s_2}) &= \boldsymbol{\theta}(W_1,\cdots,W_{r_1};X_1,\cdots,X_{s_1})\\ &\quad\cdot\eta(W_{r_1+1},\cdots,W_{r_1+r_2};X_{s_1+1},\cdots,X_{s_1+s_2}),\end{aligned}$$

其中 $W_i\in V^*, X_j\in V$.显然,$\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}\in\otimes^{r_1+r_2,s_1+s_2}V$,且$\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}$的分量为

$$(\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta})^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_1\cdots j_{s_1+s_2}} = \boldsymbol{\theta}^{i_1\cdots i_{r_1}}_{j_1\cdots j_{s_1}}\cdot\boldsymbol{\eta}^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_{s_1+1}\cdots j_{s_1+s_2}}.$$

容易看到

$$(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2)\otimes\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\eta},$$
$$\boldsymbol{\theta}\otimes(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}_2,$$
$$(\lambda\boldsymbol{\theta})\otimes\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\theta}\otimes(\lambda\boldsymbol{\eta})=\lambda(\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}),\lambda\in\mathbf{R},$$
$$(\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta})\otimes\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\theta}\otimes(\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}),\text{记作 }\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\zeta}.$$

但是，$\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\theta}$ 不一定成立. 例如：令 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{e}_i)=1,\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{e}_i)=\begin{cases}1,i=1,\\2,i=2,\\0,i\geqslant 3,\end{cases}$ 则 $(\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta})\cdot(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=2\neq 1=(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$，从而 $\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\theta}$.

设 $\otimes V=\bigoplus_{r,s=0}^{\infty}\otimes^{r,s}V=\{\sum_{r,s=0}^{\infty}\boldsymbol{K}^{r,s}\mid\boldsymbol{K}^{r,s}\in\otimes^{r,s}V$，且除有限个 $\boldsymbol{K}^{r,s}$ 外全为 $0\}$，它为 $\otimes^{r,s}V(r,s\geqslant 0)$ 的弱直和. 于是，易见

$$\{\otimes V=\bigoplus_{r,s=0}^{\infty}\otimes^{r,s}V,+,\text{数乘},\otimes\}$$

关于加法和数乘形成一个向量空间，关于加法和 $\otimes$ 形成一个环（$\otimes$ 不可交换），则它为实数域 R 上的一个代数，称为关于 V 的张量代数. 而 $\{\bigoplus_{s=0}^{\infty}\otimes^{0,s}V,+,\text{数乘},\otimes\}$ 形成此张量代数的一个子代数.

定理 1　设 $\{\boldsymbol{e}_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 n 维向量空间 V 的一个基；$\{\boldsymbol{e}^i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 V^* 的一个基，且为 $\{\boldsymbol{e}_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的对偶基，$\{\boldsymbol{e}_i^{**}\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 $V^{**}=(V^*)^*$ 的一个基，它是 $\{\boldsymbol{e}^i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的对偶基. 则

$$\{\boldsymbol{e}_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}^{**}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n\}$$

为 $\otimes^{r,s}V$ 的一个基，因而 $\otimes^{r,s}V$ 为 n^{r+s} 维向量空间. 此外，$\boldsymbol{\theta}\in\otimes^{r,s}V$ 可表示为

$$\boldsymbol{\theta}=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\ \boldsymbol{e}_{i_1}^{**}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}^{**}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s},$$

其中
$$\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}=\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{e}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}^{i_r};\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_s}).$$

3.1.4　(r,s) 型 C^k 张量丛

设 $\xi=\{E,M,\pi,GL(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{E}\}$ 为 C^k 向量丛，且关于 M 的两个局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}$ 和 $(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}$ 有

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{a}})=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}),g_{\beta\alpha}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}),\boldsymbol{x}=\varphi_\alpha(p),\boldsymbol{y}=\varphi_\beta(p).$$

令

$$g_{\beta\alpha}(p)=\begin{bmatrix}d_1^1&\cdots&d_n^1\\\vdots&&\vdots\\d_1^n&\cdots&d_n^n\end{bmatrix},\quad[g_{\beta\alpha}(p)^t]^{-1}=\begin{bmatrix}c_1^1&\cdots&c_1^n\\\vdots&&\vdots\\c_n^1&\cdots&c_n^n\end{bmatrix},$$

则根据

$$(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{\theta}})=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}),g_{\beta\alpha}^{r,s}(p)\boldsymbol{\theta}),$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\theta}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}), \boldsymbol{\theta} = (\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}),$$

$$\bar{\theta}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1 \\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n} d_{k_1}^{i_1}\cdots d_{k_r}^{i_r} c_{j_1}^{l_1}\cdots c_{j_s}^{l_s} \theta_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r},$$

$$\otimes^{r,s}E = \bigcup_{p\in M}\otimes^{r,s}E_p$$

可以定义 ξ 的 (r,s) 型的 C^l 张量丛:

$$\otimes^{r,s}\xi = \{\otimes^{r,s}E, M, \pi_1, \mathrm{GL}(n^{r+s},\mathbf{R}), \mathbf{R}^{n^{r+s}}, \mathscr{B}^{r,s}\}.$$

3.1.5 (r,s) 型张量场

设 $\otimes^{r,s}\xi$ 为与 C^l 向量丛 ξ 相联系的 (r,s) 型 C^l 张量丛, $U\subset M$. 称截面

$$\boldsymbol{\theta}: U \to \otimes^{r,s}E = \bigcup_{p\in M}\otimes^{r,s}E_p, p \mapsto \boldsymbol{\theta}_p$$

为 U 上的 (r,s) 型张量场, U 称为它的定义域. 如果 $\boldsymbol{\theta}$ 为 C^0(连续) 截面,则称它为 U 上的 (r,s) 型 C^0(连续) 张量场;如果 $U\subset M$ 为开集,称 U 上的 $C^k(1\leqslant k\leqslant l)$ 截面 $\boldsymbol{\theta}$ 为 U 上的 (r,s) 型 C^k 张量场,其全体记为 $C^k(\otimes^{r,s}E|_U)$.

3.1.6 切丛的 (r,s) 型张量丛和张量场

当 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的切丛 $\xi = \{TM, M, \pi, \mathrm{GL}(n,\mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{B}\}$ 相联系的 (r,s) 型 C^∞ 张量丛 $\otimes^{r,s}\xi = \{\otimes^{r,s}TM = \bigcup_{p\in M}\otimes^{r,s}T_pM, M, \pi_1, \mathrm{GL}(n^{r+s},\mathbf{R}), \mathbf{R}^{n^{r+s}}, \mathscr{B}^{r,s}\}$ 时,关于局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\{x^i\}\in\mathscr{D}$, (U_β,φ_β), $\{y^i\}\in\mathscr{D}$, 有 $\psi_\alpha^{-1}|_p(\boldsymbol{e}_i) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $\psi_\beta^{-1}|_p(\boldsymbol{e}_i) = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$, 而

$$\otimes^{r,s}T_pM = \{\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta} \text{ 为 } p \text{ 点的切空间 } T_pM \text{ 上的}(r,s)\text{ 型张量}\},$$

投影 $\pi_1: \otimes^{r,s}TM \to M$, 使得 $\pi_1|_{\otimes^{r,s}T_pM} = p, p\in M$. 由

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix}_{\varphi_\beta(p)} \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \end{bmatrix}$$

和 $\sum_{j=1}^{n} b^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 得到 $b^j = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}a^i, j = 1,2,\cdots,n$,

$$g_{\beta\alpha}(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}.$$

记 T_pM 的对偶空间为 T_p^*M，称为余切空间，它的元素称为余切向量. $T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M$ 称为余切丛.

设 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \middle| i=1,2,\cdots,n\right\}$ 的对偶基为 $\{\mathrm{d}x^i|_p \mid i=1,2,\cdots,n\}$，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \middle| i=1,\cdots,n\right\}$ 的对偶基为 $\{dy^i|_p \mid i=1,2,\cdots,n\}$. 于是，$T_pM$ 上的 (r,s) 型张量 $\boldsymbol{\theta}$ 关于基 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \middle| i=1,2,\cdots,n\right\}$ 的分量 $(\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r})$ 和关于基 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \middle| i=1,2,\cdots,n\right\}$ 的分量 $(\overline{\theta}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r})$ 之间的变换公式为

$$\overline{\theta}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial xy^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\theta_{l_1\cdots l_s}^{k_1\cdots k_r},$$

其中$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ 和$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ 分别为 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上的 C^∞ 函数.

在局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 中，$\boldsymbol{\theta}\in\otimes^{r,s}TM$ 可表示为

$$\boldsymbol{\theta}=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}.$$

定理 2　设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，则

1° $\boldsymbol{\theta}$ 为 M 上的 (r,s) 型 $C^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 张量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，

$$\boldsymbol{\theta}_p=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}^{**}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}^{**}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s},\ p\in U,\text{有}$$

$$\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\in C^k(U,\mathbf{R}).$$

2° $\boldsymbol{\theta}$ 为 M 上的 (r,s) 型 C^∞ 张量场

$\Leftrightarrow$ 对 M 上的任何 C^∞ 协变切向量场 $\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\cdots,\boldsymbol{W}_r$ 和 C^∞ 逆变切向量场 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$，$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_r;\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)$ 为 M 上的 C^∞ 函数.

定理 3　设 $(M_i,\mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^∞ 流形，$f:M_1\to M_2$ 为 C^∞ 映射，$f_{*p}:T_pM_1\to T_{f(p)}M_2$ 为 f 的微分或雅可比映射. $\boldsymbol{\theta}$ 为 M_2 上的 $(0,s)$ 型张量，由

$$f_p^*\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s)=\boldsymbol{\theta}(f_{*p}\boldsymbol{X}_1,f_{*p}\boldsymbol{X}_2,\cdots,f_{*p}\boldsymbol{X}_s),$$

$$\boldsymbol{\theta}\in\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2,\ \boldsymbol{X}_i\in T_pM_1$$

定义的映射 $f_p^*:\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2\to\otimes^{0,s}T_pM_1$，$\boldsymbol{\theta}\mapsto f_p^*\boldsymbol{\theta}$ 为线性映射且

$$f_p^*(\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2)=f_p^*\boldsymbol{\theta}_1\otimes f_p^*\boldsymbol{\theta}_2,\ \boldsymbol{\theta}_1\in\otimes^{0,r}T_{f(p)}M_2,\ \boldsymbol{\theta}_2\in\otimes^{0,s}T_{f(p)}M_2.$$

此外，如果 (U,φ)，$\{x^i\}$ 和 (V,ψ)，$\{y^j\}$ 分别为 p 点和 $f(p)$ 点的局部坐标系，则

$$f_p^*\mathrm{d}y^j=\sum_{i=1}^{n_1}\left.\frac{\partial(y^j\circ f)}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\mathrm{d}x^i,\quad j=1,2,\cdots,n_2,$$

$$f_p^*\theta = \sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n_1}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n_2}\frac{\partial(y^{j_1}\circ f)}{\partial x^{i_1}}\bigg|_{\varphi(p)}\cdots\frac{\partial(y^{j_s}\circ f)}{\partial x^{i_s}}\bigg|_{\varphi(p)}\theta_{j_1\cdots j_s}\circ f(p)\right)\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_s}.$$

更进一步,如果 θ 为 M_2 上的 s 阶 C^∞ 协变张量场,则 $f^*\theta$ 为 M_1 上的 s 阶 C^∞ 协变张量场,其中 $(f^*\theta)_p = f_p^*\theta_{f(p)}$.

3.2 外微分形式和外微分

3.2.1 s 阶外形式

设 V 为 n 维向量空间,$\omega\in\otimes^{0,s}V$,如果对任何 $X_i\in V(i=1,2,\cdots,s)$ 及 $(1,2,\cdots,s)$ 的任何置换 π 满足:

$$\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)}) = (-1)^\pi\omega(X_1,X_2,\cdots,X_s),$$

其中

$$(-1)^\pi = \begin{cases}1, & \pi\text{ 为偶置换},\\ -1, & \pi\text{ 为奇置换},\end{cases}$$

则称 ω 为 s 阶反称协变张量或 s 阶外形式.设 s 阶外形式的全体为 $\wedge^s V^*$,显然它是 $\otimes^{0,s}V$ 的一个子向量空间.

定理 4 ω 是反称的 $\Leftrightarrow$ 对 $(1,2,\cdots,s)$ 的任一置换 π,$\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}} = (-1)^\pi\omega_{i_1\cdots i_s}$,其中 $\omega_{i_1\cdots i_s} = \omega(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_s})$,而 $\{e_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基.

注意,0 阶和 1 阶协变张量都视作是反称的.如果 $\omega\in\wedge^s V^*$,且 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 中有两个相等,则 $\omega(X_1,X_2,\cdots,X_s)=0$.由此,还可看出,如果 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 中有两个相等,则 $\omega_{i_1\cdots i_s}=0$.

如果 $s\geqslant n+1$,$\omega\in\wedge^s V^*$,则 $e_{i_1},\cdots,e_{i_s}$ 中至少有两个相同,故 $\omega_{i_1\cdots i_s}=0$,从而 $\omega=0$.于是,$\wedge^s V^*=\{0\}$.

3.2.2 协变张量的反称化

设 $\theta\in\otimes^{0,s}V$,映射(协变张量的反称化)

$$A:\otimes^{0,s}V\to\wedge^s V^*,\theta\mapsto A(\theta),$$

定义为

$$A(\theta)(X_1,\cdots,X_s) = \frac{1}{s!}\sum_\pi(-1)^\pi\theta(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots,X_{\pi(s)}),$$

其中求和取遍所有 $(1,2,\cdots,s)$ 的置换 π.容易验证,$A(\theta)\in\wedge^s V^*$.

定理 5 1° A 为线性映射;

2° $\theta\in\wedge^s V^*\Leftrightarrow A(\theta)=\theta$;

3° 若 $\theta\in\otimes^{0,s}V$,则 $A(A(\theta))=A(\theta)$.

3.2.3 外积

设 $\alpha \in \Lambda^r V^*$，$\beta \in \Lambda^s V^*$，定义外积[(或反称积或格拉斯玛(Grassmann)积或楔积)

$$\Lambda: \Lambda^r V^* \times \Lambda^s V^* \to \Lambda^{r+s} V^*,$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\alpha \otimes \beta),$$

即

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \cdots, X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_\pi (-1)^\pi \alpha(X_{\pi(1)}, \cdots, X_{\pi(r)}) \cdot \beta(X_{\pi(r+1)}, \cdots, X_{\pi(r+s)}).$$

当 $r = s = 1$ 时，

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2) = \alpha(X_1)\beta(X_2) - \alpha(X_2)\beta(X_1).$$

定理 6 1° $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$，
$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$，
$\alpha \wedge (\lambda\beta) = (\lambda\alpha) \wedge \beta = \lambda(\alpha \wedge \beta), \lambda \in \mathbf{R}$；} 双线性；

2° $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha, \alpha \in \Lambda^r V^*, \beta \in \Lambda^s V^*$，反交换性. 当 $r = s = 1$ 时，有 $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \alpha \wedge \alpha = 0$；

3° $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \dfrac{(r+s+t)!}{r!s!t!} A(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$，

$\alpha \in \Lambda^r V^*, \beta \in \Lambda^s V^*, \gamma \in \Lambda^t V^*$，结合律.

由此，$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ 与作外积的次序无关. 更一般地，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s$ 与外积的次序无关，且

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s = \frac{(r_1 + \cdots + r_s)!}{r_1! \cdots r_s!} A(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s).$$

定理 7 设 V 为 n 维向量空间，$\{e_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为 V 的一个基，$\{e^i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为它的对偶基，则 $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n\}$ 为 $\Lambda^s V^*$ 的一个基，因而 $\Lambda^s V^*$ 为 C_n^s 维向量空间.

3.2.4 格拉斯玛代数或外代数

设 $\Lambda V^* = \Lambda^0 V^* \oplus \Lambda^1 V^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^n V^*$，其中 $\oplus$ 表示直和，显然 $\{1; e^i, i = 1,2,\cdots,n; e^{i_1} \wedge e^{i_2}, 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n; \cdots, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n\}$ 形成了 ΛV^* 的一个基. ΛV^* 是由 1 和 $\Lambda^1 V^* = V^*$ 生成的 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ 维的向量空间. 这里乘法 Λ 可线性开拓到 ΛV^* 上，即要求 Λ 关于向量加法是分配的. 这乘法也是结合的，并关于加法和乘法 Λ 形成一环，从而 ΛV^* 是一个具有单位元 1 的代数，称为**格拉斯玛代数或外代数**.

由张量的分量变换公式和 ω 的反称性得到

$$\overline{\omega}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\begin{vmatrix}C_{j_1}^{i_1} & \cdots & C_{j_1}^{i_s}\\ \cdots & & \\ C_{j_s}^{i_1} & \cdots & C_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s},$$

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n}\overline{\omega}_{j_1\cdots j_s}\overline{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\overline{e}^{j_s},$$

其中
$$\overline{e}_i=\sum_{j=1}^{n}C_i^j e_j.$$

3.2.5 外形式丛和外微分形式 ω

类似于张量丛的论述，由公式

$$\overline{\omega}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\begin{vmatrix}C_{j_1}^{i_1} & \cdots & C_{j_1}^{i_s}\\ \cdots & & \\ C_{j_s}^{i_1} & \cdots & C_{j_s}^{i_s}\end{vmatrix}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

可定义与 C^r 向量丛 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{B}\}$ 相联系的 s 阶 C^r 外形式丛

$$\wedge^s\xi^*=\{\wedge^s E^*=\bigcup_{p\in M}\wedge^s E_p^*,M,\pi_1,\mathrm{GL}(C_n^s,\mathbf{R}),\mathbf{R}^{C_n^s},\mathscr{B}^s\},$$

它是与 ξ 的相联系的 $(0,s)$ 型 C^r 张量丛的子向量丛.

设 $U\subset M$，称截面

$$\omega:U\to\wedge^s E^*=\bigcup_{p\in M}\wedge^s E_p^*,p\mapsto\omega_p$$

为 U 上的 s 阶外形式，U 称为这外形式的定义域. 如果 ω 为 C^0(连续) 截面，则称它为 U 上的 s 阶 C^0(连续) 外形式；如果 $U\subset M$ 为开集，称 $C^k(1\leqslant k\leqslant r)$ 截面 ω 为 U 上的 s 阶 C^k 外微分形式，其全体记为 $C^k(\wedge^s E^*|_U)$.

当 $s=0$ 时，ω 为 U 上的 C^k 函数；当 $s=1$ 时，ω 也称为 U 上的 C^k 普法夫(J. F. Pfaff) 形式；当 $s>n$ 时，$\omega=0$.

考虑与 n 维 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$ 的切丛 $\xi=\{TM=\bigcup_{p\in M}T_pM,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{B}\}$ 相联系的 s 阶 C^∞ 外形式丛

$$\wedge^s\xi^*=\{\wedge^s T^*M=\bigcup_{p\in M}\wedge^s T_p^*M,M,\pi_1,\mathrm{GL}(C_n^s,\mathbf{R}),\mathbf{R}^{C_n^s},\mathscr{B}^s\},$$

它是与 ξ 相联系的 $(0,s)$ 型 C^∞ 张量丛的子向量丛，其中 $\wedge^s T_p^*M$ 为 p 点处关于切空间 T_pM 的 s 阶外形式的全体.

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D},(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^j\}\in\mathscr{D},U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$. 因为

$$\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i},\mathrm{d}y^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i,$$

$$\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_s}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\frac{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_s},$$

特别当 $s=n$ 时，有

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = \frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

此外，还有

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s}\\ &= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n} \overline{\omega}_{j_1\cdots j_s}\mathrm{d}y^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{j_s},\\ \overline{\omega}_{j_1\cdots j_s} &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}\omega_{i_1\cdots i_s}.\end{aligned}$$

记 U 上的 s 阶 C^∞ 外微分形式的全体为 $C^\infty(\wedge^s T^* U)$. 其直和为 $C^\infty(\wedge T^* U) = C^\infty(\wedge^0 T^* U) \oplus C^\infty(\wedge^1 T^* U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(\wedge^n T^* U)$，如果 $\omega \in C^\infty(\wedge T^* U)$，则在局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 中，

$$\begin{aligned}\omega = \omega_0 &+ \sum_{i=1}^n \omega_i \mathrm{d}x^i + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\omega_{i_1 i_2}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge \mathrm{d}x^{i_2} + \cdots +\\ &\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_s} + \cdots +\\ &\omega_{1\cdots n}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^n,\end{aligned}$$

其中 $\omega_0,\omega_{i_1 i_2},\cdots,\omega_{i_1\cdots i_s},\cdots,\omega_{1\cdots n} \in C^\infty(U_\alpha,\mathbf{R})$.

3.2.6 外微分运算 d

设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，定义**外微分运算**.

$$\mathrm{d}_s : C^\infty(\wedge^s T^* M) \to C^\infty(\wedge^{s+1} T^* M),\ \omega \mapsto \mathrm{d}_s\omega,$$

简记为 $\mathrm{d}\omega$.

如果 $s = 0, f \in C^\infty(\wedge^0 T^* M) = C^\infty(M,\mathbf{R}), X \in C^\infty(TM), \mathrm{d}f(X) = Xf$；如果 $s \geqslant 1, \omega \in C^\infty(\wedge^s T^* M), X_i \in C^\infty(TM), i = 1,2,\cdots,s+1$，令

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_{s+1}) = &\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,X_{i-1},\widehat{X}_i,X_{i+1},\cdots,X_{s+1}) +\\ &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_{i-1},\widehat{X}_i,\\ &X_{i+1},\cdots,X_{j-1},\widehat{X}_j,X_{j+1},\cdots,X_{s+1}).\end{aligned}$$

显然，上述定义的 d 可用自然方法线性扩张到 $C^\infty(\wedge T^* M) \to C^\infty(\wedge T^* M)$. 不难证明，定义的 $\mathrm{d}f \in C^\infty(\wedge^1 T^* M)$，$\mathrm{d}\omega \in C^\infty(\wedge^{s+1} T^* M)$.

定理 8 设 $f \in C^\infty(\wedge^0 T^* M), \omega \in C^\infty(\wedge^s T^* M), s \geqslant 1$，在局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 中，

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_s},$$

则

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i,$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} d\omega_{i_1 \cdots i_s} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\omega_{i_1 \cdots i_s} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}. \end{aligned}$$

定理 9　外微分运算 d 具有以下性质:

1° $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$,

$d(\lambda\omega) = \lambda d\omega, \omega, \eta \in C^\infty(\wedge^s T^* M), \lambda \in \mathbf{R}$;

2° $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta, \omega \in C^\infty(\wedge^r T^* M), \eta \in C^\infty(\wedge^s T^* M)$, 反导性;

3° $d^2\omega = d(d\omega) = 0, \omega \in C^\infty(\wedge^s T^* M)$;

4° 如果 $\omega_1, \cdots, \omega_k$ 为 C^∞ 普法夫形式,则

$$d(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_k,$$

特别地, $d(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = 0$.

定理 10　设 $(M_i, \mathscr{D}_i)$ 为 n_i 维 C^∞ 流形, $i = 1, 2, f: M_1 \to M_2$ 为 C^∞ 映射, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in C^\infty(\wedge^r T^* M_2), \eta \in C^\infty(\wedge^s T^* M_2), \lambda \in C^\infty(\wedge^0 T^* M_2) = C^\infty(M_2, \mathbf{R})$,则

1° $f^* \omega \in C^\infty(\wedge^r T^* M_1)$;

2° $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^* \omega_1 + f^* \omega_2$;

3° $f^*(\lambda \cdot \omega) = (\lambda \circ f) \cdot f^* \omega$;

4° $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$;

5°
$$\begin{aligned} & f^*\Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n_2} \omega_{j_1 \cdots j_r} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_r}\Big) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n_1 \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n_2}} (\omega_{j_1 \cdots j_r} \circ f) \frac{\partial(y^{j_1} \circ f, \cdots, y^{j_r} \circ f)}{\partial(x^{i_1}, \cdots, x^{i_r})} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \end{aligned}$$

特别地,

$$f^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} dx^i;$$

当 $n_1 = n_2 = n$ 时,

$$f^*(\lambda dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (\lambda \circ f) \frac{\partial(y^1 \circ f, \cdots, y^n \circ f)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n;$$

6° $d(f^* \omega) = f^*(d\omega)$,即 d 与 f^* 可交换.

应用定理8的结论可作为外微分d定义的出发点,然后验证它与局部坐标系的选取无关,这是用坐标观点(即古典观点)定义 d.再可推出相应的定理 9 和 10.

3.3 C^∞ 流形的定向和斯托克斯定理

3.3.1 C^∞ 流形的定向

设$(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形，如果存在 $\mathscr{D}'_1 \subset \mathscr{D}$满足：

1° $\{U \mid (U,\varphi) \in \mathscr{D}'_1\}$ 覆盖 M；

2° 设$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\} \in \mathscr{D}'_1,(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^j\} \in \mathscr{D}'_1$，有

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)} > 0,$$

则称$(M,\mathscr{D})$ 是**可定向的**. 如果$(M,\mathscr{D})$ 不是可定向的，则称它是**不可定向的**.

条件2°，即$\left\{\frac{\partial}{\partial y^i} \mid i = 1,2,\cdots,n\right\}$ 和$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} \mid i = 1,2,\cdots,n\right\}$ 为切空间的**同向基**(记作$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]} = \overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$)，其中

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{bmatrix}.$$

如果 $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}$满足 1°,2°最大性，即如果$(U,\varphi) \in \mathscr{D}$与任何$(U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \mathscr{D}_1$ 满足 2°，则$(U,\varphi) \in \mathscr{D}_1$，称 $\mathscr{D}_1$ 为$(M,\mathscr{D})$ 的一个**定向**.

一个**定向流形**指的是三序组$(M,\mathscr{D}, \mathscr{D}_1)$，其中 $\mathscr{D}_1$ 为$(M,\mathscr{D})$ 的一个定向. 显然，如果 $\mathscr{D}'_1$ 满足 1°,2°，则

$$\mathscr{D}_1 = \{(U,\varphi) \mid (U,\varphi) \in \mathscr{D}, \text{且与 } \mathscr{D}'_1 \text{ 中的元素满足 } 2°\}$$

为$(M,\mathscr{D})$ 的一个定向. 此外，如果 $\mathscr{D}_1$ 为$(M,\mathscr{D})$ 的一个定向，则

$$\mathscr{D}_{-1} = \{(U,\rho_{反} \circ \varphi) \mid (U,\varphi) \in \mathscr{D}_1\}$$

为$(M,\mathscr{D})$ 的另一个定向，其中 $\rho_{反}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，$\rho_{反}(x^1,\cdots,x^{n-1},x^n) = (x^1,\cdots,x^{n-1},-x^n)$.

定理 11 设$(M,\mathscr{D})$ 为 n 维连通的 C^∞ 可定向流形，则它恰有两个定向.

定理 12 设$(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形.

1° 如果存在 M 上的一个处处非 0 的 n 次 C^∞ 微分形式 ω，则 M 是可定向的.

2° 如果$(M,\mathscr{D})$ 是可定向的 A_2 流形，则存在 M 上的处处非 0 的 n 次 C^∞ 微分形式 ω.

定理 13 设$(M,\mathscr{D})$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 n 维 C^∞ 正则子流形(超曲面)，则

$(M,\mathscr{D})$ 可定向 $\Leftrightarrow M$ 上存在处处非 0 的连续法向量场，即存在连续映射

$$N: M \to T\mathbf{R}^{n+1},$$

$$x \mapsto N(x) \perp i_{*x}(T_xM), N(x) \neq 0,$$

其中 $I: M \to \mathbf{R}^{n+1}$ 为包含映射.

应用可定向的定义、定理12、定理13可知,$\mathbf{R}^n$ 中的开子流形,C^∞ 可平行的流形(特别是具有整体坐标的流形,李群),S^n,n 维复解析流形视作 $2n$ 维实解析流形是可定向的. n 维实射影空间 $P^n(\mathbf{R})$,当 n 为奇数时是可定向的;当 n 为偶数时是不可定向的. Möbius 带是不可定向的.

定理 14 设$(W;\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 可定向流形,定向为 $\mathscr{D}_1$,$(M,\mathscr{D}_M)$为$(W,\mathscr{D})$的开子流形. 则

1° $(M,\mathscr{D}_M)$ 是可定向的;

2° 如果 M 在 W 中的边界点(如果对 $p\in W$ 的任何开邻域它必含 M 中的点,也必含 $W-M$ 中的点,则称 p 为 M 在 W 中的边界点)集 ∂M 为 W 的 $n-1$ C^∞ 正则子流形,则 ∂M 也是可定向的.

3.3.2 边界流形 ∂M 的诱导定向

如果 ∂M 为 W 的 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形,由1.2.4定理5,对任何 $p\in\partial M$,存在 p 的局部坐标系(U,φ),$\{x^i\}$ 使得

$$\begin{aligned}\varphi(M\cap U) &= \varphi(U)\cap\{x\in\mathbf{R}^n \mid x^n>0\},\\ \varphi(\partial M\cap U) &= \varphi(U)\cap\{x\in\mathbf{R}^n \mid x^n=0\}.\end{aligned}\qquad (*)$$

设 $\mathscr{D}_1$ 为定理14中的定向,$\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi),\{x^i\} \mid (U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$ 且满足$(*)\}$. 如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$,$\{x^i\}\in\mathscr{D}_2$,$(U_\beta,\varphi_\beta)$,$\{y^j\}\in\mathscr{D}_2$,则在 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 中,必有

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}\right|_{x^n=0}>0.$$

于是,$\{(\partial M\cap U,\varphi|_{\partial M\cap U}) \mid (U,\varphi)\in\mathscr{D}_2\}$ 确定了 ∂M 上的一个定向,因而 ∂M 是可定向的.

由 $\{\overrightarrow{(-1)^n\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right]} \mid (U,\varphi),\{x^i\}\in\mathscr{D}_2\}$ 所确定的 ∂M 的定向称为由 W 的定向 $\mathscr{D}_1$ 所确定的 ∂M 的诱导定向.

3.3.3 定向流形 M 上的微分形式 ω 的积分

定向流形 M 上的微分形式的积分是数学分析中第二型曲线、曲面积分的推广. 而这种积分的定义还必须应用近代数学中极其重要的单位分解的存在性.

设$(M,\mathscr{D})$为 n 维 C^∞ 可定向流形,$\mathscr{D}_1$ 为其定向,记此定向流形为 $\overline{M}$. ω 为 M 上的 n 次 C^∞ 外微分形式,$\mathrm{supp}\,\omega=\overline{\{p\in M \mid \omega(p)\neq 0\}}$ 为紧致集. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x_\alpha^i\} \mid \alpha\in\mu\}\subset\mathscr{D}_1$,且 $\{U_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$ 为 M 的局部有限的开覆盖,$\{g_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$ 为从属于 $\{U_\alpha \mid \alpha\in\mu\}$ 的广义单位分解. 在$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$,$\{x_\alpha^i\}$ 中,

$$g_\alpha\omega = g_\alpha\cdot a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n.$$

显然,$\mathrm{supp}\,g_\alpha\omega\subset\mathrm{supp}\,\omega$ 为紧致集,故

$$\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)\mathrm{d}x_\alpha^1\cdots\mathrm{d}x_\alpha^n$$

为有限值.称

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \int_M \left(\sum_{\alpha\in\mu} g_\alpha\right)\omega = \sum_{\alpha\in\mu}\int_M g_\alpha\omega \\ &= \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)} (g_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)\mathrm{d}x_\alpha^1\cdots\mathrm{d}x_\alpha^n \\ &= \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)} (g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\,\underline{(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega}\end{aligned}$$

为 ω 在 M 上的积分,其中$\underline{(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega}$ 为 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上的 n 次 C^∞ 外微分形式 $(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega = a_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^n$ 删去外积号 $\wedge$.因为 $\mathrm{supp}\omega$ 紧致和 $\{g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 关于广义单位分解的定义中的条件2°,$\mathrm{supp}\omega$ 只与有限个 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交.所以上述和中实际上只有有限项可能不为0.应用黎曼积分中的变量代换公式,容易证明积分 $\int_M\omega$ 的定义与 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),g_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ 的选取无关,即积分的定义是合理的.

由上述和黎曼积分的性质立即有

定理 15　设 $(M,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 流形,$\mathscr{D}_1$ 为其定向,$\vec{M}$ 为相应于 $\mathscr{D}_1$ 的定向流形.ω,ω_1,ω_2 为 M 上的 n 次 C^∞ 外微分形式,$\mathrm{supp}\omega,\mathrm{supp}\omega_1,\mathrm{supp}\omega_2$ 为紧致集,$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

1° $\int_{-M}\omega = -\int_M\omega$, $-\vec{M}$ 为与 $\vec{M}$ 定向相反的定向流形;

2° $\int_M(\lambda\omega_1+\mu\omega_2) = \lambda\int_M\omega_1+\mu\int_M\omega_2$;

3° 如果 M_1,M_2 为 M 的不相交的开集,$M=M_1\cup M_2$.$\vec{M_1},\vec{M_2}$ 与 M 的定向一致,则

$$\int_M\omega = \int_{M_1}\omega+\int_{M_2}\omega.$$

3.3.4　斯托克斯定理

在引进流形 M 的定向,边界流形 ∂M 的诱导定向以及定向流形上微分形式的积分后,就能建立极其重要的**斯托克斯定理**.

定理 16　设 $(W,\mathscr{D})$ 为 n 维 C^∞ 可定向流形,$\mathscr{D}_1$ 为其定向,$M\subset W$ 为开子流形,∂M 为 M 的边界,或者为空集或者为 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形.相应于 $\mathscr{D}_1$ 的定向流形 M 确定了 M 和(由 ∂M 的诱导定向确定的)∂M.ω 为 W 上的 $n-1$ 次 C^∞ 微分形式,$\mathrm{Supp}\omega$ 是紧致的.$I:\partial M\to M$ 为包含映射.则

$$\int_M\mathrm{d}\omega = \int_{\partial M}I^*\omega\left(或\int_{\partial M}\omega\mid_{\partial M}\right).$$

在不致混淆的情形下,将斯托克斯定理记作 $\int_M\mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega$.

3.3.5 $\mathbf{R}^n$ 中斯托克斯定理的几个特例

例2 牛顿-莱布尼兹公式(图3-1).

$M\subset\mathbf{R}^n$ 为1维 C^∞ 正则子流形，$\partial M=\{a,b\}$，$\vec{M}$ 为1维 C^∞ 定向流形，$\{t\mid t_0-\varepsilon<t<t_1+\varepsilon,t_0<t_1,\varepsilon>0\}$ 为含 M 的定向局部坐标系. $\overrightarrow{\partial M}=\{-a,+b\}$ 为诱导定向所确定的流形. $\omega=f,\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f$，则

$$\int_M\mathrm{d}f=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=f(x(t))\Big|_{t_0}^{t_1}=f(x)\Big|_a^b=\int_{\partial M}f.$$

例3 格林(G.Green)公式

$W=\mathbf{R}^2$，M 为 $\mathbf{R}^2$ 中的有界区域，∂M 为 C^∞ 封闭曲线，且为1维正则子流形. 定向流形 $\vec{W}$ 确定了 $\vec{M}$ 和诱导定向确定了流形 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，则

$$\int_M\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_{\partial M}p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y.$$

例4 斯托克斯公式(图3-1).

W 为 $\mathbf{R}^3$ 中2维 C^∞ 正则子流形(超曲面)，M 为 W 的开子流形，∂M 为1维 C^∞ 正则子流形，且为 C^∞ 封闭曲线. 定向流形 $\vec{W}$ 确定了 $\vec{M}$ 和诱导定向确定了 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y+r\mathrm{d}z$，

$$\mathrm{d}\omega=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ p & q & r\end{vmatrix}$$

则

$$\int_M\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ p & q & r\end{vmatrix}=\int_{\partial M}p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y+r\mathrm{d}z.$$

例5 高斯公式(图3-1).

$W=\mathbf{R}^3$，M 为 $\mathbf{R}^3$ 中的有界开集，∂M 为2维 C^∞ 正则子流形，且为闭超曲面. 定向流形 $\vec{W}$ 确定了 $\vec{M}$ 和诱导定向确定了 $\overrightarrow{\partial M}$. $\omega=p\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+r\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，则

$$\int_M\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\int_{\partial M}p\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+r\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

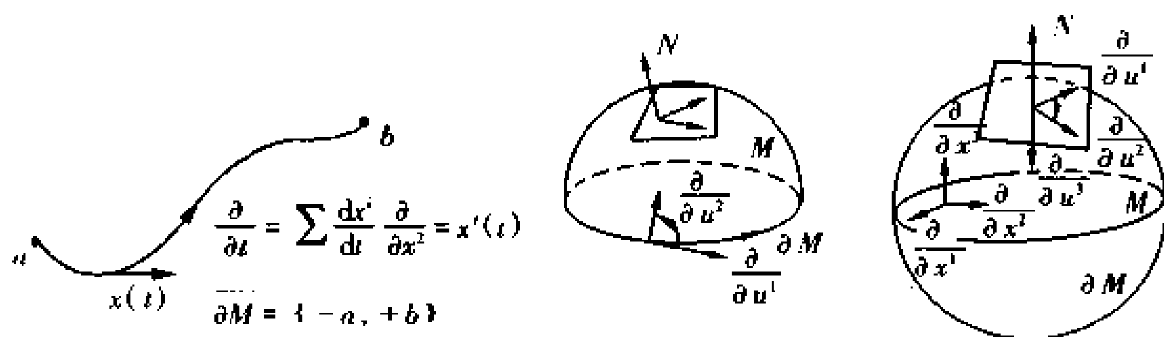


图 3-1

4 黎曼流形

4.1 黎曼度量和黎曼流形

4.1.1 向量丛上的黎曼度量

设 $\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{B}\}$ 为 $C^r(r\in\{0,1,\cdots,\infty\})$ 向量丛，M 为 n 维 C^r 流形. $\otimes^{0,2}\xi=\{\otimes^{0,2}E,M,\pi_1,\mathrm{GL}(m^2,\mathbf{R}),\mathbf{R}^{m^2},\mathscr{B}^{0,2}\}$ 为 ξ 的(0,2)型 C^r 张量丛. 所谓 C^r 向量丛 ξ 上的一个 C^r 黎曼度量或内积就是在每个纤维上正定和对称的 C^r 截面 $g=\langle,\rangle:M\to\otimes^{0,2}E$. 即对任何 $p\in M$，(0,2) 型张量(双线性函数) $g_p=\langle,\rangle_p:E_p\times E_p\to\mathbf{R},(X,Y)\mapsto g_p(X,Y)=\langle X,Y\rangle_p$ 满足：

1° $g_p(X,Y)\geqslant 0$；$g_p(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$，正定性；

2° $g_p(X,Y)=g_p(Y,X)$，对称性；

3° g 为 C^r 张量场(C^r 性)，

其中 $X,Y\in E_p$.

设 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\in\mathscr{B}$ 为 ξ 的局部平凡化，$X_i(x)=\psi_\alpha^{-1}(x,e_i)$，$i=1,2,\cdots,m$ 为 $\pi^{-1}(p)$ 的基. $g_{ij}=g(X_i(p),X_j(p))$ 为 g 关于 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 的分量. 由定义，显然 (g_{ij}) 和它的逆矩阵都是正定矩阵. 如果 $X=\sum\limits_{i=1}^m a^iX_i$，$Y=\sum\limits_{j=1}^m b^jX_j$，则

$$g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^m a^ib^jg_{ij}.$$

如果$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)\in\mathscr{C}$为$\xi$的另一局部平凡化，$\overline{X}_i=\psi_\beta^{-1}(p,e_i)$，$i=1,2,\cdots,m$为$\pi^{-1}(p)$的另一基.$\overline{g}_{ij}=g(\overline{X}_i(p),\overline{X}_j(p))$为$g$关于$(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$的分量.则

$$\overline{g}_{ij}=\sum_{k,l=1}^{m}d_i^kd_j^lg_{kl},$$

$$\begin{bmatrix}\overline{g}_{11}&\cdots&\overline{g}_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ \overline{g}_{m1}&\cdots&\overline{g}_{mm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1^1&\cdots&d_1^m\\ \vdots&&\vdots\\ d_m^1&\cdots&d_m^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11}&\cdots&g_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ g_{m1}&\cdots&g_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1^1&\cdots&d_m^1\\ \vdots&&\vdots\\ d_1^m&\cdots&d_m^m\end{bmatrix},$$

其中$D=(d_j^i)=C^{-1}=g_{\beta\alpha}(p)^{-1}$.

C^r向量丛ξ上给定一个**黎曼度量**$g=\langle,\rangle$，直观上就是将每一点的纤维赋以内积而欧几里德化，同时要求从一点到另一点变化时保持C^r性.因此，它就是欧几里德空间的推广.

定理1（黎曼度量的存在性） 设$(M,\mathscr{D})$为n维$C^r(r\geq 1)$的A_2流形，则C^r向量丛$\xi=\{E,M,\pi,\mathrm{GL}(m,\mathbf{R}),\mathbf{R}^m,\mathscr{C}\}$上存在黎曼度量.

4.1.2 切丛上的黎曼度量

当ξ为n维C^∞流形M的切丛时，$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y_i=\frac{\partial}{\partial y^i}$，$m=n$，$C=(c_j^i)=g_{\beta\alpha}(p)=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$，$D=(d_j^i)=C^{-1}=g_{\beta\alpha}(p)^{-1}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$.此时，称$(M,g)=(M,\langle,\rangle)$为$n$维$C^\infty$**黎曼流形**.

设$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$为$p\in M$的局部坐标系，$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$为$g$关于$\{x^i\}$的分量.由定义，显然$(g_{ij})$以及它的逆矩阵$(g^{ij})$都为正定矩阵.如果$X=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial y^j}$，则

$$g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}a^ib^jg_{ij}.$$

如果(U_β,φ_β)，$\{y^i\}$为$p\in M$的另一局部坐标系，$\overline{g}_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$，则

$$\overline{g}_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}g_{kl},$$

$$\begin{bmatrix}\overline{g}_{11}&\cdots&\overline{g}_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \overline{g}_{n1}&\cdots&\overline{g}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11}&\cdots&g_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ g_{n1}&\cdots&g_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{bmatrix}.$$

由此可给出$C^r(r\geq 1)$黎曼流形的坐标观点（古典观点）的定义.

设 $X,Y\in T_pM$,称 $\|X\|=\langle X,X\rangle^{1/2}$ 为 X 的模.如果 $X\neq 0,Y\neq 0$,根据施瓦兹(K.H.A.Schwarz)不等式 $|\langle X,Y\rangle|\leqslant\|X\|\,\|Y\|$ 可以定义 X 和 Y 之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为

$$\cos\theta=\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\,\|Y\|}.$$

设 $\sigma:[a,b]\to M$ 为 C^∞ 曲线,$\sigma'(t)=\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 为沿 σ 的切向量场,定义从 a 到 b 的 σ 的长为

$$|\sigma|_a^b=\int_a^b\langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle^{1/2}\mathrm{d}t=\int_a^b\|\sigma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

一般地,一条分段 C^∞ 曲线 σ(即 $\sigma:[a,b]\to M$ 连续,且 σ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上为 C^∞ 曲线,$i=1,2,\cdots,k-1$),其中 $a=t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$ 的长定义为

$$|\sigma|_a^b=\sum_{i=1}^{k-1}|\sigma|_{t_i}^{t_{i+1}},$$

通过简单计算知,$|\sigma|_a^b$ 不依赖于 $\sigma([a,b])$ 的参数的选取.

定理 2 设 (M,g) 为 n 维连通 C^∞ 黎曼流形,对任何 $p,q\in M$,令

$$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\mid\sigma\text{ 为连接 }p\text{ 和 }q\text{ 的分段 }C^\infty\text{ 曲线}\},$$

则

$$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\mid\sigma\text{ 为连接 }p\text{ 和 }q\text{ 的分段 }C^\infty\text{ 曲线,且在各段上处处 }\sigma'\neq 0\}.$$

进一步,(M,ρ) 为度量空间,并且由 ρ 所诱导的拓扑和流形 M 上的拓扑一致.

定理 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为连通的 n 维 C^∞ 流形,则以下条件是互相等价的:

1° M 为 A_2 空间;

2° M 上存在黎曼度量;

3° M 为度量空间.

定理 4 C^∞ 的 A_2 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上切丛 $\zeta=\{TM,M,\pi,\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{B}\}$ 的构造群总可简化为 $O(n)$;它可简化为 $\mathrm{SO}(n)\Leftrightarrow$ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 是可定向的.

4.2 第一型积分

4.2.1 C^∞ 规范正交基

由格拉姆-施密特(J.P.Gram-E.Schmidt)正交化过程,有

定理 5 设 $(M,g)=(M,\langle,\rangle)$ 为 n 维 C^∞ 黎曼流形,则在任何局部坐标系 $(U,\varphi),\{x^i\}$ 中,必存在 C^∞ 的规范正交基向量场.

定理 6 设 $(M,g)=(M,\langle,\rangle)$ 为 n 维 C^∞ 黎曼流形.$\{e_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 和 $\{\bar{e}_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为 T_pM 的规范正交基,而 $\{e^i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 和 $\{\bar{e}^i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 分别为它们的对偶基.如果 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}=\overrightarrow{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n]}$(定向相同,即这两组基向量的变换矩阵的行列式大于 0),则

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \bar{e}^1 \wedge \cdots \wedge \bar{e}^n.$$

此外，p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 与 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}$ 一致，即 $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]} = \overrightarrow{[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}]_p}$，则

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

其中 $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$.

4.2.2 体积元

设 (M,g) 为 n 维 C^∞ 可定向的黎曼流形，由定理5和6，在 M 上确定了一个处处非0的 C^∞ n 形式，它在每个与 M 的定向 $O = \{O_p \mid p \in M\}$ 一致的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 中（即 $\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]_p} = O_p$）可表示为

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

称它为 M 上的由定向 $O = \{O_p \mid p \in M\}$ 确定的体积元，记作 $\mathrm{d}V$. 当 $n = 1$ 时，称为弧长元，记作 $\mathrm{d}s$；当 $n = 2$ 时，称为面积元，记作 $\mathrm{d}A$.

值得注意的是 $\mathrm{d}V$ 是 M 上处处非0的 n 次微分形式. 根据3.3.1定理12 1°知，$\mathrm{d}V$ 正表明了 M 的可定向性.

4.2.3 绝对体积元和第一型积分

设 (M,g) 为 n 维 C^∞ 黎曼流形（M 不必是可定向的），定义绝对体积元为

$$|\mathrm{d}V| = \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

（在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中的表示）.

设 f 为 M 上具有紧支集 $\mathrm{Supp}f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$ 的连续函数. 更进一步可以定义第一型积分

$$\int_M f|\mathrm{d}V| = \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(f\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(\rho_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot\sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x_\alpha^1\cdots\mathrm{d}x_\alpha^n.$$

容易验证，它与 M 上的局部有限的局部坐标系 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x_\alpha^i\} \mid \alpha \in \mu\}$ 的开覆盖以及从属于它的 C^∞ 广义单位分解 $\{\rho_\alpha \mid \alpha \in \mu\}$ 的选取无关.

对于 M 上的任意连续函数 f，令

$$f^+(p) = \begin{cases} f(p), & f(p) \geqslant 0, \\ 0, & f(p) < 0, \end{cases} \qquad f^-(p) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0, \\ -f(p), & f(p) \leqslant 0. \end{cases}$$

如果 (M,g) 为 n 维 C^∞ 连通黎曼流形，根据定理3，M 为 A_2 空间，因此存在 M 中的开集 M_k，使得 $\overline{M_k}$ 紧致，$M = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$，且 $M_1 \subset \overline{M_1} \subset M_2 \subset \overline{M_2} \subset \cdots$. 当

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^+ |dV| \text{ 和 } \lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^- |dV|$$

中至少有一个有限时,定义

$$\int_M f |dV| = \lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^+ |dV| - \lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^- |dV|$$

为 f 在 M 上的广义第一型积分.明显地,它是第一型积分的推广.值得注意的是这定义与 $\{M_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ 的选取无关,且广义积分值可为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

当 $f\equiv 1$ 时,称 $\int_M |dV| = \sum_{\alpha\in\mu}\int_{\varphi_\alpha(M\cap U_\alpha)}(\rho_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\sqrt{\det(g_{ij})}dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n$ 为 M 的体积,它也可为 $+\infty$,1 维和 2 维情形,"体积"通常分别称为"长度"和"面积".

特别当 M 为 n 维 C^∞ 紧致连通黎曼流形时,上述的 $\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^+ |dV|$, $\lim_{k\to+\infty}\int_{M_k} f^- |dV|$, $\int_M f |dV|$ 都为有限值.还可选取 $M_k = M, k = 1,2,\cdots$.

如果 $\vec{M}$ 为定向流形,$dV = e^1\wedge\cdots\wedge e^n$ 为体积元(其中 $\{e_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$ 为与定向一致的规范正交基),则

$$\int_M f |dV| = \int_M f e^1\wedge\cdots\wedge e^n.$$

为区别起见,称定向流形 $\vec{M}$ 上的外微分形式的积分 $\int_M \omega$ 为第二型积分.

4.2.4　C^∞ 浸入子流形的黎曼度量

定理 7　设 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 为 n_1 维 C^∞ 流形,(M_2,g) 为 n_2 维 C^∞ 黎曼流形,$f: M_1\to M_2$ 为 C^∞ 浸入,则 f^*g 为 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 上的 C^∞ 黎曼度量,使 (M_1,f^*g) 成为 C^∞ 黎曼流形.

例 1　设 $(M,g) = (M,\langle,\rangle)$ 为 n 维 C^∞ 黎曼流形.$\sigma:[a,b]\to M$ 为 C^∞ 曲线,则在 M 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 中,曲线弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^t \{g(\sigma'(t),\sigma'(t))\}^{1/2}dt \\ &= \int_a^t \left\{g\left(\sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^n \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\}^{1/2}dt \\ &= \int_a^t \left\{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right\}^{1/2}dt. \end{aligned}$$

于是,弧长元

$$\begin{aligned} ds &= \left\{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right\}^{1/2}dt \\ &= \left\{\left[\frac{dx^1}{dt},\cdots,\frac{dx^n}{dt}\right]\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn}\end{bmatrix}\left(\frac{dx^1}{dt},\cdots,\frac{dx^n}{dt}\right)'\right\}^{1/2}dt, \end{aligned}$$

在微分几何里，有时记作

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j.$$

更一般地，如果 K 为 M 的 k 维 C^∞ 正则子流形，$\{u^i \mid i = 1,2,\cdots,k\}$ 为定向流形 $\vec{K}$ 的局部坐标系. 则 K 上的 k 维体积元为

$$\begin{aligned}
dV &= \left\{\det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)\right\}^{1/2} du^1 \wedge \cdots \wedge du^k \\
&= \left\{\det\left(g\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x^s}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial x^s}\right)\right)\right\}^{1/2} du^1 \wedge \cdots \wedge du^k \\
&= \left\{\det\left(\sum_{l,s=1}^{n} g_{ls} \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^s}{\partial u^j}\right)\right\}^{1/2} du^1 \wedge \cdots \wedge du^k \\
&= \left\{\det\left[\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{matrix}\right]\right\}^{1/2} \times \\
&\quad du^1 \wedge \cdots \wedge du^k.
\end{aligned}$$

例2 设 $\{x^i\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的通常的整体坐标系. 定义 $\mathbf{R}^n$ 上的 C^∞ 黎曼度量为

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \delta_j^i,$$

$$\langle X, Y\rangle = \left< \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right> = \sum_{i,j=1}^{n} a^i b^j.$$

显然，$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 为整体的规范正交的 C^∞ 坐标基向量场，而 $\{dx^i\}$ 为其对偶基，$dV = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 为体积元.

设 $\vec{M}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 $n-1$ 维 C^∞ 定向正则子流形，M 上的局部坐标系 $\{u^1,\cdots,u^{n-1}\}$ 与 $\vec{M}$ 一致，由 $\mathbf{R}^n$ 的上述黎曼度量诱导出 M 上的一个黎曼度量. 设 $\sum_{i=1}^{n} h^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 为 M 上的与 $\vec{M}$ 相一致的 C^∞ 单位法向量场. 则

$$\begin{aligned}
dV_M &= \left\{\det\left[\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix}\right]\right\}^{1/2} du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} h^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

例3 设 $\mathbf{R}^3$ 的通常的整体坐标系为 $\{x, y, z\}$，$\vec{M}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的2维 C^∞ 定向正则

子流形，M 上的局部坐标系$\{u,v\}$与$\vec{M}$一致．由 $\mathbf{R}^3$ 的通常的黎曼度量诱导出 M 上的一个黎曼度量，则在此局部坐标系中，与 M 一致的 C^∞ 单位法向量场为

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right\|}=h^1\frac{\partial}{\partial x}+h^2\frac{\partial}{\partial y}+h^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

于是，M 上的面积元为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= h^1\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-h^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+h^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=\left(h^1\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+h^2\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+h^3\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\
&=\det\begin{bmatrix} h^1 & h^2 & h^3\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{bmatrix}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\
&=\left(h^1\frac{\partial}{\partial x}+h^2\frac{\partial}{\partial y}+h^3\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\\
&=\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

如果记 $E=\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\rangle$，$G=\langle\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\rangle$，$F=\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\rangle$，则

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|=(EG-F^2)^{1/2},$$

$$\mathrm{d}A=(EG-F^2)^{1/2}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

参 考 文 献

1 徐森林．流形和斯托克斯定理．北京：高等教育出版社，1983．

2 徐森林，薛春华．流形．北京：高等教育出版社，1991．

·近代数学卷·

第6篇

李群与李代数

编　者　孟道骥
审校者　郝钢新

目 录

引　言

李群是挪威数学家李(Marius Sophus Lie,1842—1899)创建的一类群.他在研究微分方程解的分类时,引入了连续变换群及其在单位元附近的导数所构成的无穷小变换的集合,并研究了它们之间的关系.这就是今天所谓的(局部)李变换群及其李代数.

李的工作在最初较长一个时期内与数学的其他分支关系不大,但是,自1920年以来由于基灵(Killing)、嘉当(E.Cartan),H.外尔(Weyl)等的工作有了迅速发展.李代数现包含模李代数、Kac-Moody代数等已独立于李群,更有代数群、量子群等等.无论从深度,还是从广度来说,"李群理论"已不能表示其内容.因而,许多学者称其为"李理论"(Lie Theory),它已成为数学的一个重要分支.这个理论不仅与数学中的各个分支有密切关系,而且与物理学、化学等均有本质的联系.

由于篇幅所限,我们只能介绍最基本的概念与知识.这里的介绍分为四部分:李代数,李群,紧李群的结构和紧李群的表示.

1　李　代　数

1.1　李代数的定义

定义1　若域F上线性空间$\mathfrak{g}$有二元运算$(x,y)\to[x,y]$(通常称为**换位运算或括积**),且满足:

1° 此二元运算是双线性的;

2° $[x,x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{g}$;

3° 雅可比(Jacobi)恒等式成立,即

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g},$$

则称$\mathfrak{g}$为F上的**李代数**.

由1°,2°得出

$$[x,y]=-[y,x]\quad\forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

定义2　设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是域F上李代数$\mathfrak{g}$的一组基,则有

$$[x_i,x_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}x_k.$$

称数组$\{C_{ij}^k,1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$为$\mathfrak{g}$对于基$x_1,x_2,\cdots,x_n$的**结构常数**.

定理1　当且仅当下列条件成立时,域F中数组$\{C_{ij}^k,1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$能成为$F$上$n$维李代数的结构常数.

1° $C_{ii}^k = 0, 1 \leqslant i, k \leqslant n$;

2° $C_{ij}^k = -C_{ji}^k, 1 \leqslant i, j, k \leqslant n$;

3° $\sum_{l=1}^{n}(C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m) = 0, 1 \leqslant i, j, k, m \leqslant n$.

设 $m_i (i = 1,2)$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的非空子集，分别以 $m_1 + m_2, [m_1, m_2]$ 表示由 $\{m_1 + m_2 \mid m_i \in m_i\}, \{[m_1, m_2] \mid m_i \in m_i\}$ 生成的子空间.

定义 3 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 满足

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h},$$

则称为 $\mathfrak{g}$ 的**子代数**；若满足

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h},$$

则称为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**.

$$C(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的理想，称为 $\mathfrak{g}$ 的**中心**.

定理 2 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 在商空间

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{\bar{x} = x + \mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

中定义括积为

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 也是李代数，称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**.

定义 4 F 上李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 F 上李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的线性映射(线性同构) φ 若满足

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}_1,$$

则称 φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同态(同构)**.

$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构，记为 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$.

设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的自然映射 π 也是李代数的同态.

定理 3 设 φ 是李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到李代数 $\mathfrak{g}_2$ 上的同态，则 φ 的核 $\ker \varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想，且 $\mathfrak{g}_1/\ker \varphi \cong \mathfrak{g}_2$.

1.2 线性李代数与表示

定理 4 设 V 是域 F 上的线性空间，$\mathrm{gl}(V)$ 是 V 的所有线性变换构成的结合代数，在 $\mathrm{gl}(V)$ 中定义括积如下

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in \mathrm{gl}(V),$$

则 $\mathrm{gl}(V)$ 是李代数，称为**一般线性李代数**.

域 F 上所有 n 阶方阵 $\mathrm{gl}(n, F)$ 构成一个结合代数，在其中定义括积：

$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in \mathrm{gl}(n, F),$$

则构成一个李代数，$\dim V = n$ 时，$\mathrm{gl}(n, F)$ 与 $\mathrm{gl}(V)$ 同构，也称为一般线性李代数.

定义 5 $\mathrm{gl}(n, F)(\mathrm{gl}(V))$ 及其子代数均称为**线性李代数**.

除 $\mathrm{gl}(n, F)$ 外，重要的线性李代数有

1° 特殊线性李代数

$$\mathrm{sl}(n, F) = \{X \in \mathrm{gl}(n, F) \mid \mathrm{tr} X = 0\}.$$

2° **正交李代数**

$$\mathrm{so}(n,F)=\{X\in \mathrm{gl}(n,F)\mid X^{\mathrm{T}}+X=\mathbf{0}\}.$$

3° **辛李代数**

$$\mathrm{sp}(n,F)=\{X\in \mathrm{gl}(n,F)\mid X^{\mathrm{T}}J+JX=\mathbf{0}\},$$

其中

$$J=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & I_n\\ -I_n & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

I_n 是 n 阶单位方阵.

4° **洛伦兹(Lorentz)李代数**

设 p,q 为非负整数,$I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p,I_q)$,

$$o(p,q,F)=\{X\in \mathrm{gl}(p+q,F)\mid X^{\mathrm{T}}I_{p,q}+I_{p,q}X=\mathbf{0}\}.$$

$p=0,q=n$ 及 $p=n,q=0$ 为正交李代数.

5° **酉李代数**

$$u(n)=\{X\in \mathrm{gl}(n,C)\mid \overline{X}^{\mathrm{T}}+X=\mathbf{0}\}.$$

是 n^2 维实李代数.

6° **特殊酉李代数**

$$\mathrm{su}(n)=u(n)\cap \mathrm{sl}(n,C).$$

7° **(p,q) 型酉李代数**

$$u(p,q)=\{X\in \mathrm{gl}(n,C)\mid \overline{X}^{\mathrm{T}}I_{p,q}+I_{p,q}X=\mathbf{0}\}.$$

8° **特殊(p,q)型酉李代数**

$$\mathrm{su}(p,q)=u(p,q)\cap \mathrm{sl}(p+q,C).$$

9° **(p,q) 型辛李代数**

$$\mathrm{sp}(p,q)=\{X\in \mathrm{gl}(2(p+q),C)\mid X^{\mathrm{T}}J+JX=0,\ \overline{X}^{\mathrm{T}}K_{p,q}+K_{p,q}X=\mathbf{0}\},$$

其中

$$K_{p,q}=\mathrm{diag}(I_{p,q},I_{p,q}).$$

当 $p=0,q=n$ 或 $p=n,q=0$ 时,有

$$\mathrm{sp}(n)=\mathrm{sp}(n,C)\cap u(2n).$$

10° **特殊正交星李代数**

$$\mathrm{so}^*(2n)=\{X\in \mathrm{gl}(2n,C)\mid \overline{X}^{\mathrm{T}}J+JX=\mathbf{0},X^{\mathrm{T}}+X=\mathbf{0}\}$$

是 $2n^2-n$ 维实李代数.

11° **酉星李代数**

$$u^*(2n)=\{X\in \mathrm{GL}(2n,C)\mid \overline{X}^{\mathrm{T}}J=JX\}.$$

12° **特殊正交星李代数**

$$\mathrm{su}^*(2n)=u^*(2n)\cap \mathrm{sl}(2n,C).$$

定义 6　设 $\mathfrak{g}$, V 分别是域 F 上的李代数和线性空间.若 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(V)$ 中的一个同态,则称 ρ(或(ρ,V))是 $\mathfrak{g}$ 的一个以 V 为表示空间的线性表示,简称表示,$\dim V$ 称为表示的维数,$\ker\rho$ 称为表示的核.

定理5 设 $\mathfrak{g}$ 是 F 域上的李代数,则对任一 $x \in \mathfrak{g}$,可以定义 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 中的一个元素 $\mathrm{ad}x$ 为

$$\mathrm{ad}x(y) = [x,y], \forall y \in \mathfrak{g},$$

则 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

又,对于 $x,y \in \mathfrak{g}$,

$$B(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)$$

是 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数,称为 $\mathfrak{g}$ 的基灵(Killing)型,满足

$$B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = 0, \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

1° $\mathrm{sl}(n,C)$ 的基灵型是 $B(X,Y) = 2n\mathrm{tr}(XY)$.

2° $\mathrm{so}(n,C)$ 的基灵型是 $B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}(XY)$.

3° $\mathrm{sp}(n,C)$ 的基灵型是 $B(X,Y) = 2(n+1)\mathrm{tr}(XY)$.

1.3 可解李代数与幂零李代数

定理6 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数.定义

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \cdots;$$
$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k}], \cdots,$$

则它们都是 $\mathfrak{g}$ 的理想,分别称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数序列**与**降中心序列**.

定义7 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数.若有 k 使得 $\mathfrak{g}^{k} = 0$,则称 $\mathfrak{g}$ 为**幂零李代数**;若有 k 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$,则称 $\mathfrak{g}$ 为**可解李代数**.

显然,交换李代数是幂零李代数,幂零李代数是可解李代数.

域 F 上所有 k 阶上三角方阵集 $t(k,F)$ 构成可解李代数.

域 F 上所有 k 阶对角元素相等的上三角方阵集 $n(k,F)$ 构成**幂零李代数**.

定理7(恩格尔(Engel)定理) 设 V 是复数域 C 上的线性空间,$\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(V)$ 的子代数,其中任何元素均是 V 的幂零线性变换,则 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数.

定理8(李定理) 设 (ρ,V) 是复数域 C 上有限维可解李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示.则在 V 中有基,使得任何 $x \in \mathfrak{g}$,$\rho(x)$ 在此基下的矩阵为上三角矩阵.

定义8 当且仅当 $x \in \mathfrak{h}$ 时,若李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 满足 $[x,\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$,则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**嘉当子代数**.

定理9 设 $\mathfrak{h}$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数,则 $\mathfrak{g}$ 有子空间的直接和分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

其中 Δ 是 $\mathfrak{h}$ 上的非零线性函数的集合,称为根系,其元素 α 称为根,

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}h - \alpha(h)\mathrm{id})^{k}x = 0, h \in \mathfrak{h}\}$$

称为属于 α 的**根子空间**,上述分解称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**根子空间分解**.

1.4 半单李代数

定义9 如果李代数 $\mathfrak{g}$ 中不含非平凡的交换理想,则称为**半单李代数**;若还不

含非平凡理想,称为**单李代数**.

定理 10 李代数 $\mathfrak{g}$ 关于下列条件等价:

1° 是半单的;

2° 不含非平凡的幂零理想;

3° 不含非平凡的可解理想;

4° 基域特征为零时,基灵型非退化.

定理 11 基灵型非退化的半单李代数可分解为单理想的直接和,除这些单理想的次序外,这种分解是唯一的.

特别,从此定理知复半单李代数的研究归结为复单李代数的研究.

定理 12 设 $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数,$\mathfrak{g}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 Δ 是根系.则有以下结论:

1° $\mathfrak{g}$ 的基灵型 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制(x,y)是非退化的,于是,可将 $\mathfrak{h}$ 与其对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 等同,即有

$$\alpha(h) = (\alpha,h), \quad \alpha,h \in \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^*;$$

2° 若 $\alpha \in \Delta$,则当且仅当 $k = \pm 1$ 时,$k\alpha \in \Delta$;

3° Δ 线性生成 $\mathfrak{h}$.

4° $\alpha \in \Delta, \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = (\alpha,h)x, h \in \mathfrak{h}\};$$

5° 设 $\alpha,\beta \in \Delta$,则

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta] = \begin{cases} \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, & 若\ \alpha+\beta \in \Delta, \\ C_\alpha, & 若\ \alpha+\beta = 0, \\ (0), & 其他. \end{cases}$$

6° 设 $\mathfrak{h}_R$ 是Δ生成的实线性空间,则 $\dim \mathfrak{h}_R = \dim \mathfrak{h}$,且基灵型在 $\mathfrak{h}_R$ 上的限制(x,y)是正定对称双线性的,因此 $\mathfrak{h}_R$ 成为欧几里德空间;

7° 设 $\alpha,\beta \in \Delta$,则

$$\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = \frac{r}{2}, \quad r = 0,1,2,3.$$

定义 10 设 V 是 n 维实线性空间,$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是一组基.在 V 中若有 k 使得 $x_i = y_i, 1 \leqslant i \leqslant k-1; x_k > y_k$,则定义序为

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i > \sum_{i=1}^n y_i v_i,$$

这种序称为**字典序**.若 $v > 0(v < 0)$,则称 v 为**正(负)向量**.

定义 11 设 $\mathfrak{h}$ 是复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.Δ 是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系.在 $\mathfrak{h}_R$ 中给定字典序,Δ 中正(负)向量分别称为**正(负)根**.所有正(负)根的集合$\Delta_+(\Delta_-)$称为**正(负)根系**.若 $\alpha \in \Delta_+$ 且不能写成两个正根之和,则称为**素根**,所有素根的集合 Π 称为**素根系**.

定理 13 设 $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.$\Delta,\Delta_+,\Delta_-,\Pi$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的

根系，正根系，负根系，素根系．则有以下结果：

1° $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-, \Delta_- = -\Delta_+$;

2° 设$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，若 $\alpha \in \Delta_+$，则有 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik} \in \Pi$ 使得

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i1} + \alpha_{i2}, \cdots, \alpha = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} \in \Delta_+;$$

3° Π 是 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}_R$ 的基，且若 $\alpha \in \Delta_+$，则

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, k_i \text{ 非负整数};$$

4° 设$\alpha_i, \alpha_j \in \Pi, i \neq j$，则

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = 0, -1, -2 \text{ 或 } -3,$$

矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{2(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} & \cdots & \frac{2(\alpha_1, \alpha_n)}{(\alpha_n, \alpha_n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{2(\alpha_n, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} & \cdots & \frac{2(\alpha_n, \alpha_n)}{(\alpha_n, \alpha_n)} \end{bmatrix}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当矩阵．

定义 12 设$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$\mathfrak{g}$的素根系．以 n 个点分别表示$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，将第 i 点与第 j 点用

$$\frac{4(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}$$

条线段连接起来，若$(\alpha_i, \alpha_i) < (\alpha_j, \alpha_j)$则画一个从第 j 点到第 i 点的箭头，如此得到的图形称为 Π 或 $\mathfrak{g}$ 的邓肯(Dynkin)图．

定理 14 1° 当且仅当它们的邓肯图相同时，二复半单李代数同构．

2° 当且仅当其根系不能分解为两个正交子集之和；当且仅当其正根系不能分解为两个正交子集之和；当且仅当其素根系不能分解为两个正交子集之和；当且仅当其邓肯图是连通的时，一个复半单李代数是单的．

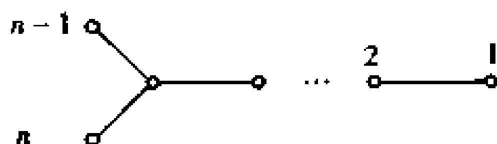
定理 15 复单李代数的邓肯图有而且只能有以下情形：

1° A_n:

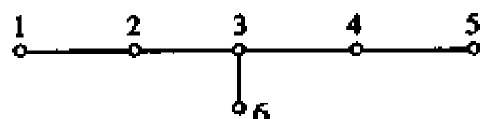
2° B_n:

3° C_n:

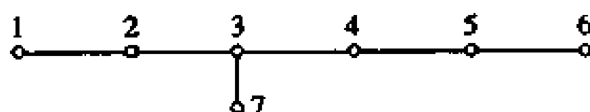
4° D_n:



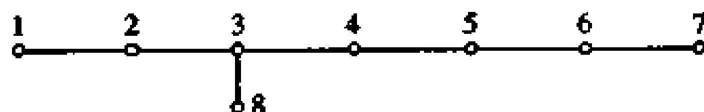
5° E_6:



6° E_7:



7° E_8:



8° F_4:

9° G_2:

A_n, B_n, C_n, D_n 分别是 $\mathrm{sl}(n+1, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{so}(2n+1, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{sp}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{so}(2n, \boldsymbol{C})$ 的图，这些单李代数称为**典型单李代数**.

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 所对应的李代数称为**例外单李代数**.

单李代数的嘉当矩阵如下.

A_n:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

B_n:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

C_l:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

D_n:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

G_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

F_4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

E_6, E_7 分别从 E_8 的嘉当矩阵去掉后两行两列，一行一列.

2 李　　群

2.1　李群与局部李群

定义 1　李群是具有下列性质的集合 G

1° G 是一个群；

2° G 是一个解析流形；

3° 乘积流形 $G \times G$ 到 G 中映射 $(x,y) \to xy^{-1}$ 解析.

注：3° 中条件也可改为 $(x,y) \to xy$ 解析.

由定义立即可知 $\forall g \in G$，左平移 L_g 与右平移 R_g 均是解析同胚映射. 因而李群 G 在各点维数相同. 这个维数就叫 G 的**维数**，记为 $\dim G$.

在定义中，若 G 是实解析流形，则称 G 为**实李群**. 若 G 是复解析流形，则称 G 为**复李群**.

任一 m 维的复解析流形，有自然方式看成 $2m$ 维的实解析流形. 因而复李群 G，也是 $2\dim G$ 维的实解析流形. $(x,y) \to xy$ 是复解析流形 $G \times G$ 到 G 上的解析映射，自然也是实解析流形 $G \times G$ 到 G 上的解析映射. 故此时 G 也是 $2\dim G$ 维的实李群.

例 1 $\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）对于加法运算就是 n 维实（或复）李群.

例 2 $GL(n,\mathbf{R})$ 为所有 n 阶可逆方阵的集合，对矩阵乘法 $GL(n,\mathbf{R})$ 是 n^2 维实李群.

同样所有 n 阶复可逆方阵的集合 $GL(n,\mathbf{C})$ 是 n^2 维的复李群，因而也是 $2n^2$ 维的实李群.

设 e 是李群 G 的单位元素，U 是 e 的一个坐标邻域. (U,φ) 是标架，有 e 的邻域 W，使得 $WW \subseteq U$. 因此 $\forall x,y \in W$，有 $xy \in U$，且 $\varphi(xy)$ 是 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 的解析函数. 设

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x,$$
$$\varphi(y) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = y,$$
$$\varphi(xy) = (f_1, f_2, \cdots, f_n) = f(x,y),$$

则有

$$f_i(x,y) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n), 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2-1}$$

为 $\varphi(W) \times \varphi(W)$ 上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的解析函数.

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), \cdots, f_n(x,y))$$

称为**乘法函数**. 由其偏导数定义的解析函数

$$l_j^i(x) = \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}\Big|_{y=e}$$

称为**辅助函数**.

定义 2 设 U 为局部群，而且 U 在 φ 下同胚于欧几里德空间中的一个连通开集. 若 $a,b \in U$，$ab^{-1} \in U$，则 $\varphi(ab^{-1})$ 是 $\varphi(a)$，$\varphi(b)$ 的解析函数，称 U 为**局部李群**.

以后经常用 a 表示 $\varphi(a)$. 因而上述条件可改为 $(a,b) \to ab^{-1}$ 是解析映射.

任何李群 G 的单位坐标邻域显然构成局部李群.

在局部李群的定义中，可把 $(a,b) \to ab^{-1}$ 解析，换成 $(a,b) \to ab$ 解析.

定理 1 设 G 是连通拓扑群，e 的一个开邻域 U 关于 G 的乘法为局部李群. 则在 G 中可引进唯一的解析结构使 G 成为李群，其诱导拓扑与原来的拓扑一致.

定理2　设 G 是一个群，G 中一个包含 e 的子集 V，又是 G 的生成组，又是局部李群．则有唯一的方式将 G 定义成李群，且在 V 的某个单位开邻域上解析结构是一致的，且 G 连通．

定理3　连通李群 G 的拓扑适合第二可数公理，即在 G 中有可数基．当且仅当 G 的连通分支至多可数个时，李群 G 有可数基．

2.2　李群的几何性质

设 G 为李群，(U,φ) 是单位 e 处的一个标架．仍以 x 表示 $\varphi(x)$．$f(x,y)$ 是乘法函数，$l_j^i(x)$ 是辅助函数．令

$$L(x)=(l_j^i(x)),L^{-1}(x)=(\overline{l}_j^i(x)).$$

以 $D^1(G)$ 表示解析向量场集合，$D_1(G)$ 表示解析一次微分形式集合．

定义3　G 是李群，向量场 $X\in D^1(G)$ 称为左不变向量场，如果 $\forall g\in G$ 有

$$\mathrm{d}L_g(X)=X. \tag{2-2}$$

设 $X,Y\in D^1(G)$ 都是左不变向量场．定义换位运算

$$[X,Y]=X\circ Y-X\circ Y$$

则 $[X,Y]$ 也是左不变的（$\circ$ 表示映射的合成）．

定理4　1° 李群 G 的所有左不变向量场的集合 Lie$G$ 对于所定义的换位运算来说构成李代数，称为李群 G 的李代数．

2° 李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 与 G 在 e 处的切空间 $T_e(G)$ 在映射

$$X\to X|_e=X_e,X\in\mathfrak{g} \tag{2-3}$$

下是同构的线性空间．因而 $\dim\mathfrak{g}=\dim G$．由此可在 $T_e(G)$ 中定义换位运算为

$$[X_e,Y_e]=[X,Y]_e,\quad \forall X_e,Y_e\in T_e(G) \tag{2-4}$$

（其中 X,Y 是左不变向量场，在 e 处的值分别为 X_e,Y_e），$T_e(G)$ 为与 $\mathfrak{g}$ 同构的李代数．

Lie$G$ 可理解为左不变向量场构成的李代数，也可理解为单位元素 e 的切空间 $T_e(G)$ 构成的李代数．

引理1　设 (U,φ) 是李群 G 的一个单位标架，$f(x,y)$，$l_j^i(x)$ 分别为乘法函数及辅助函数．对应于 $T_e(G)$ 的基 $\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}$ 的左不变向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在 (U,φ) 中的坐标为

$$(X_i)_x=\sum_{j=1}^n l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

例3　$\mathbf{R}^n$ 对向量加法 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$：

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

构成李群，乘法函数为

$$f_i(x,y)=x_i+y_i,1\leqslant i\leqslant n.$$

辅助函数为

$$l_j^i(x) = \delta_j^i, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

$T_0(\mathbf{R}^n)$ 中基$\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}$ 对应的左不变向量场为$(X_i)_x = \frac{\partial}{\partial x_i}$.于是$[X_i, X_j] = 0$,即李 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维交换李代数.

由此也可以知道,可将李 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 等同起来.

例 4 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的乘法函数为

$$f_{ij}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj},$$

辅助函数为

$$l_{st}^{ij}(x) = \frac{\partial f_{ij}(x,y)}{\partial y_{st}}\Big|_{y=I_n} = x_{is}\delta_{jt}.$$

因而对应于 $T_{I_n}(\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}))$ 中切向量$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ 的左不变向量场为

$$X_{ij} = \sum_s x_{si}\frac{\partial}{\partial x_{sj}}.$$

因而有

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}.$$

因而$\sum a_{ij}X_{ij} \to (a_{ij})$ 是李 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 到 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$ 的同构映射.可记李 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R}) = \mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$.

定理 5 设 G 为李群,(U,φ) 为单位 e 处的标架,$f(x,y)$,$l_j^i(x)$ 分别为乘法函数、辅助函数.令

$$L(x) = (l_j^i(x)), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}\right).$$

则有

1° $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = L(xy)L(y)^{-1}, \forall x,y \in W \subseteq U$, W 是 e 的邻域;

2° $\sum_k\left(l_i^k(x)\frac{\partial l_j^q(x)}{\partial x_k} - l_j^k(x)\frac{\partial l_i^q(x)}{\partial x_k}\right) = \sum_k C_{ij}^k l_k^q(x)$;

3° 在上式中 C_{ij}^k,$1 \leqslant i,j,k \leqslant n$ 是常数,且满足

$$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0,$$

$$\sum_l (C_{ij}^l C_{lk}^q + C_{jk}^l C_{li}^q + C_{ki}^l C_{lj}^q) = 0.$$

以上结果分别称为李的第一、第二、第三基本定理.

定义 4 设 G 是李群.如果 $L_g^*\omega = \omega, \forall g \in G$,则 $\omega \in D_1(G)$ 称为左不变的(亦名莫雷尔 - 嘉当)(形式)

由于 $\mathrm{d}L_g$ 将 $T_x(G)$ 映到 $T_{gx}(G)$,因而 L_g^* 将 $T_{gx}^*(G)$ 映到 $T_x^*(G)$.因此知,ω 是莫雷尔 - 嘉当形式,即

$$L_g^*\omega_x = \omega_{g^{-1}x}, \forall x,g \in G.$$

引理 2 当且仅当 $\forall X \in \mathfrak{g}$,$\langle X,\omega\rangle$ 是常数时,$\omega \in D_1(G)$ 是莫雷尔 - 嘉当形

式.

定理6　李群 G 上所有莫雷尔-嘉当形式构成的线性空间是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间.

又若 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的对偶基,且

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}X_k,$$

则

$$\mathrm{d}(\omega_i)=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}C_{jk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k=-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}C_{jk}^{i}\omega_j\wedge\omega_k,$$

其中 d 是外微分算子.

定义5　如果 $\forall g\in G$, L_g 都是 G 的仿射变换,即

$$\nabla_X(Y)=\mathrm{d}L_{g^{-1}}(\nabla_{\mathrm{d}L_g(X)}(\mathrm{d}L_gY)),\forall X,Y\in D^1(G),$$

则李群 G 上的仿射联络 ∇ 叫做左不变的.

定理7　设 $\mathfrak{g}$, ∇ 是李群 G 的李代数与仿射联络,则 ∇ 是左不变的充分必要条件是,对任何 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 有 $\nabla_X(Y)\in\mathfrak{g}$.

设 ∇ 是 G 的左不变联络,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基.由于 $\nabla_{X_i}(X_j)\in\mathfrak{g}$,故有常数 $\{\Gamma_{ij}^{k}\}$ 使得

$$\nabla_{X_i}(X_j)=\sum_{k}\Gamma_{ij}^{k}X_k.$$

特别,若 $X=\sum_{i}\alpha_iX_i$, $Y=\sum_{j}\beta_jX_j\in\mathfrak{g}$,则有

$$\nabla_X(Y)=\sum_{i,j,k}\alpha_i\beta_j\Gamma_{ij}^{k}X_k.$$

如果 $[X_i,X_j]=\sum_{k}C_{ij}^{k}X_k$, Γ_{ij}^{k} 的取值如下:

(1) $\Gamma_{ij}^{k}=0$,称为(-)联络,此时有

$$\nabla_X(Y)=0,\forall X,Y\in\mathfrak{g};$$

(2) $\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}C_{ij}^{k}$,称为(0)联络,此时有

$$\nabla_X(Y)=\frac{1}{2}[X,Y],\forall X,Y\in\mathfrak{g};$$

(3) $\Gamma_{ij}^{k}=C_{ij}^{k}$,称为(+)联络,此时有

$$\nabla_X(Y)=[X,Y],\forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

在(-)、(0)、(+)联络下均有

$$\nabla_X(X)=0,\forall X\in\mathfrak{g}.$$

2.3　单参数子群与指数映射

定义6　若映射 $\theta:\mathbf{R}\to G$ 解析,而且是实数加法群 $\mathbf{R}$ 到李群 G 的群同态映射(简称解析同态),则称 $\theta(t)$ 是 G 的一个单参数子群.

定理 8 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数，则 $\mathfrak{g}$ 与 G 的单参数子群之间有一一对应关系：$X \to \theta(t)$，使得

$$\theta(0) = e, \dot{\theta}(t) = X_{\theta(t)}.$$

推论 1 设 ∇ 是李群 G 的左不变联络，$X_e \in T_e(G)$，则当且仅当对应于 X_e 的左不变向量场 X 满足 $\nabla_X(X) = 0$ 时，测地线 $\gamma_{X_e}(t)$ 是 G 的单参数子群.

定义 7 设 X 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中任一元素，$\theta(t)$ 是对应的单参数子群. 映射 $\exp: X \to \theta(1)$ 称为**指数映射**.

定理 9 设 $X \in \mathfrak{g}$，$\theta(t)$ 为对应的单参数子群，则有

$$\theta(t) = \exp tX, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

因而有

$$\exp(t+s)X = \exp tX \exp sX, \quad \forall t, s \in \mathbf{R}.$$

例 5 在例 2 中知道 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$ 与 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的李代数同构. $X = (a_{ij}) \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$ 对应于 $TI_n(\mathrm{GL}(n\mathbf{R}))$ 中切向量 $\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ 所对应的左不变向量场仍以 X 表示. 则

$$\exp tX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{n!} X^k.$$

定理 10 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数，exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射，则 exp 解析，而且在 $\mathfrak{g}$ 的原点附近 exp 是解析同胚.

又若 G 连通，则 $\exp\mathfrak{g} = \{\exp X \mid X \in \mathfrak{g}\}$ 生成 G.

定义 8 N_0, N_e 如上，则对 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_i\}$ 有

$$N_e = \{\exp \sum x_i X_i \mid \sum x_i X_i \in N_0\}.$$

于是

$$\exp \sum x_i X_i \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是 N_e 上的可容许坐标系，称为**第一类标准坐标系**.

引理 3 设 G 是李群. 它的李代数 $\mathfrak{g}$ 有空间直和分解

$$\mathfrak{g} = m \dotplus n.$$

则存在 0 在 m 与 n 中的有界连通开邻域 U_m 与 U_n 使得映射

$$\Phi: (A, B) \to \exp A \exp B, A \in U_m, B \in U_n,$$

是 $U_m \times U_n$ 到 e 在 G 中某个开邻域上的解析同胚.

显然，引理对 $\mathfrak{g}$ 的任意直和分解

$$\mathfrak{g} = m_1 + m_2 + \cdots + m_5,$$

也是成立的. 由此引理立即可以得到下面定义.

定义 9 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，则存在 e 的邻域 N_e，使得 $\forall g \in N_e$，有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$g = \exp x_1 X_1 \exp x_2 X_2 \cdots \exp x_n X_n,$$

而且 $g \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 N_e 上的一个坐标系. 此坐标系称为**第二类标准坐标系**.

定义 10 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，则存在 e 的邻域 N_e，

使得 $\forall g \in \perp N_e$，有 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$g = \exp\sum_{i=1}^{r} x_i X_i \exp\sum_{i=r+1}^{n} x_i X_i,$$

而且 $g \to (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 N_e 上的一个坐标系. 此坐标系称为第三类标准坐标系.

引理 4 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数，则存在 $\mathfrak{g}$ 的原点邻域 N_0，满足：若 $X \in N_0$，则对 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$tX \in N_0$，并且对于 G 上解析函数 f，有

$$f(g\exp X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X^n f)(g) = e^X f(g), X \in N_0.$$

这个公式叫做泰勒公式. 一般，$\forall X \in \mathfrak{g}$，$t$ 充分小后 $tX \in N_0$. 因而有

$$f(g\exp tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(X^n f)(g) = e^{tX} f(g).$$

定理 11 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数. $\mathfrak{g}$ 作为欧几里德空间，对加法是李群，其李代数可与 $\mathfrak{g}$ 本身等同，即李 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射，则有

$$\mathrm{d}\exp X = \mathrm{d}(L_{\exp X})_e \cdot \frac{\mathrm{id} - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}, \forall X \in \mathfrak{g},$$

其中 $\mathrm{ad}X$ 定义为：$\mathrm{ad}X(Y) = [X, Y]$，$\forall Y \in \mathfrak{g}$.

定理 12 若 $\sigma: t \to \sigma(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 到李群 G 的连续同态，则 $\sigma(t)$ 是 G 的单参数子群.

定理 13 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数，exp 是 $\mathfrak{g}$ 到 G 的指数映射，则有

$$\begin{aligned}
&\exp tX \exp tY \\
&\quad = \exp\left(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)\right); \\
&\exp(-tX)\exp(-tY)\exp tX \exp tY \\
&\quad = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3)); \\
&\exp tX \exp tY \exp(-tX) \\
&\quad = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)),
\end{aligned}$$

其中 t 为趋于零的实参数，$\frac{1}{t^3}O(t^3)$ 在 $|t|$ 充分小时有界，而且对 t 解析.

2.4 李群的子群

定义 11 李群 G 的子群（正规子群）H，若又是 G 的子流形，则称 H 为 G 的**李子群（正规子群）**.

又若 H 是 G 的正则子流形（即 H 的拓扑是 G 的诱导拓扑），则称 H 为**正则李子群（正规子群）**.

李群 G 的李子群 H 必为李群，因而也是拓扑群.

李群 G 的连通李子群 H 称为 G 的**解析子群**.

定理 14 设 H 是李群 G 的李子群，$\mathfrak{h}$，$\mathfrak{g}$ 分别为 H，G 的李代数，则 $\mathfrak{h}$ 可视为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，且

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid t \to \exp tX \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 到 } H \text{ 中的连续映射}\}.$$

反之，若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，则在 $\exp\mathfrak{h}$ 生成的子群 H 中可定义解析结构，使 H 为 G 的解析子群，且以 $\mathfrak{h}$ 为其李代数.

因而在 G 的解析子群与 $\mathfrak{g}$ 的子代数间有一一对应关系.

推论 2　若 H_1 与 H_2 均为李群 G 的李子群. 作为拓扑群 $H_1 = H_2$，则作为李群亦有 $H_1 = H_2$.

定理 15　设 H 是李群 G 的闭子群，则在 H 上有唯一的解析结构使 H 为 G 的正则子群.

反之，若 H 是 G 的正则子群则必为闭子群.

定义 12　如果存在 n^2 元多项式集 S，使得 $g = (g_{ij}) \in G$ 的充分必要条件是

$$p(g) = p(g_{ij}) = 0, \forall p \in S,$$

则一般线性群 $GL(n,\mathbf{R})(GL(n,\mathbf{C}))$ 的子群 G 称为**代数群**.

如果存在 $2n^2$ 元多项式集 S 使得 $g = (a_{ij} + b_{ij}\sqrt{-1}) \in G(a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R})$ 的充分必要条件是

$$p(g) = p(a_{ij}, b_{ij}) = 0, \forall p \in S.$$

则群 $GL(n,\mathbf{C})$ 的子群 G 称为**伪代数群**.

定理 16　一般线性群的代数群与伪代数群均是闭子群. 因而也是李子群.

以下令 $F = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 将 $GL(n,F)$ 的李代数看作 $\mathrm{gl}(n,F)$. 于是，$X \in \mathrm{gl}(n,F)$，有

$$\exp tX = e^{tX}.$$

若 H 是 G 的闭子群，$\mathfrak{h}$ 为 H 的李代数，则

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathrm{gl}(n,F) \mid e^{tX} \in H, \forall t \in F\}.$$

1° 特殊线性群

$$SL(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid \det A = 1\},$$

李代数为 $\mathrm{sl}(n,F)$.

2° 正交群与特殊正交群

$$O(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid A'A = I_n\},$$

李代数为 $o(n,F)$.

注意到此时 $\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}\dfrac{X' + X}{2} = 0$. 故 $\exp o(n,F)$ 生成的群不是 $O(n,F)$，而是**特殊正交群**

$$SO(n,F) = \{A \in O(n,F) \mid \det A = 1\} = O(n,F) \cap SL(n,F).$$

将此群的李代数记为 $\mathrm{so}(n,F)$，则

$$\mathrm{so}(n,F) = o(n,F).$$

$SO(2,\mathbf{R})$，$SO(3,\mathbf{R})$ 分别为平面、空间的**转动**（**旋转**）**群**.

3° 辛群

$$SP(n,F) = \{A \in GL(n,F) \mid A'JA = J\},$$

李代数为 $\mathrm{sp}(n,F)$.

4° **洛伦兹群**

$$O(p,q,F)=\{A\in GL(p+q,F)\mid A'I_{p,q}A=I_{p,q}\},$$

李代数为 $o(p,q,F)$.

$O(p,q,F)$称为(p,q)型洛伦兹群.$(p,q)=(1,3)$,$F=\mathbf{R}$,即$O(1,3,\mathbf{R})$就是爱因斯坦(Einstein)狭义相对论中的洛伦兹群.

$p=0,q=n$及$p=n,q=0$为正交群.

5° **酉群**

$$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbf{C})\mid \overline{A}'A=I_n\}$$

是$GL(n,\mathbf{C})$的伪代数子群,视$GL(n,\mathbf{C})$为$2n^2$维实李群,则$U(n)$为n^2维实闭子群.李代数为$u(n)$.

6° **特殊酉群**

$$SU(n)=U(n)\cap SL(n,\mathbf{C}),$$

李代数为$su(n)$.

7° **(p,q)型酉群**

$$U(p,q)=\{A\in GL(n,\mathbf{C})\mid \overline{A}'I_{p,q}A=I_{p,q}\},$$

李代数为$u(p,q)$.

8° **特殊(p,q)型酉群**

$$SU((p,q)=U(p,q)\cap SL(p+q,\mathbf{C})$$

李代数为$su(p,q)$.

9° **(p,q)型辛群**

$$SP(p,q)=\{A\in GL(2(p+q),\mathbf{C})\mid A'JA=J,\quad \overline{A}'K_{p,q}A=K_{p,q}\},$$

李代数为$sp(p,q)$.

当$p=0,q=n$或$p=n,q=0$时,记

$$SP(0,n)=SP(n,0)=SP(n)=SP(n,\mathbf{C})\cap U(2n),$$

李代数为$sp(n)$.

10° **特殊正交星群**

$$SO^*(2n)=\{A\in GL(2n,\mathbf{C})\mid \overline{A}'JA=J,A'A=I_{2n}\}$$

是$2n^2-n$维实李群.李代数为$so^*(2n)$.

11° **酉星群**

$$U^*(2n)=\{A\in GL(2n,\mathbf{C})\mid \overline{A}J=JA\},$$

李代数为$u^*(2n)$.

12° **特殊酉星群**

$$SU^*(2n)=U^*(2n)\cap SL(2n,\mathbf{C}),$$

李代数为$su^*(2n)$.

总结以上例子得到本章末的表2-1.

2.5 同态与局部同态

定义13 若φ是李群G_1到李群G_2的群同态,又是连续映射,则称为李群的同

态,简称同态.

若 φ 是李群 G_1 到李群 G_2 的群同构,又是同胚映射,则称为**李群的同构**,简称**同构**.

定理 17 1° 若 φ 是李群 G_1 到李群 G_2 的同态,则 φ 为解析映射.又若 φ 为同构,则 φ 必为解析同胚.

2° 使拓扑群成为李群的解析结构是唯一的.

定理 18 设 φ 是李群 G_1 到 G_2 上的同态(同构),$\mathfrak{g}_i$ 是 G_i 的李代数,$i = 1,2$.则 $d\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 上的同态(同构),且

$$\varphi(\exp X) = \exp d\varphi(X), \forall X \in \mathfrak{g}_1.$$

推论 3 若 φ,ψ 均是连通李群 G_1 到李群 G_2 上的同态,且 $d\varphi = d\psi$,则 $\varphi = \psi$.

由李群的同态(同构)可以得到李代数的同态(同构).反之则不然.因为李代数仅仅是李群的局部性质.因而从李代数的同态(同构)仅能得到李群的"局部"同态(同构).

定义 14 设 φ 是局部李群 U_1 到局部李群 U_2 上的解析映射,且满足:若 $u,v,uv \in U_1$,则

$$\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v),$$

则称 φ 是局部李群 U_1 到局部李群 U_2 上的同态.

又若 φ 是解析同胚,则称 φ 是 U_1 到 U_2 的同构.

定义 15 设 $e_i(i = 1,2)$ 分别为李群 G_i 的单位元素.如果存在 e_i 在 G_i 中的邻域 U_i 作为局部李群是同态(同构)的,则称李群 G_1 和李群 G_2 **局部同态(同构)**.

类似地,可以定义局部李群的**局部同态(同构)**.

定理 19 设李群 G_1 的李代数 $\mathfrak{g}_1$ 和李群 G_2 的李代数 $\mathfrak{g}_2$ 同态(同构),则李群 G_1 和李群 G_2 局部同态(同构).

2.6 表示的基本概念

定义 16 李群 G 到 $GL(V)$ 中的同态 ρ,称为李群 G 的一个**表示**,记为(ρ,V),V 叫**表示空间**,V 的维数称为**表示的维数**.

V 的子空间 V_1 若满足 $\rho(g)V_1 = V_1, \forall g \in G$,则称为**不变子空间**.于是

$$\rho_{V_1}: g \to \rho(g) \mid V_1$$

是以 V_1 为表示空间的一个表示(ρ_{V_1},V_1),称为(ρ,V) 的**子表示**.

定义 $\rho_{V/V_1}: G \to GL(V/V_1)$ 如下

$$\rho_{V/V_1}(g)(V + V_1) = \rho(g)V + V_1, \forall g \in G, V \in V.$$

于是$(\rho_{V/V_1},V/V_1)$ 也是李群 G 的一个表示,称为(ρ,V) 对(ρ_{V_1},V_1) 的**商表示**.

如果除$\{0\}$,V 外,另无不变子空间,则李群 G 的表示(ρ,V) 称为**不可约的**,否则称为**可约的**.

如果对任一不变子空间 V_1 存在不变子空间 V_2,使得

$$V = V_1 \dotplus V_2,$$

则李群 G 的表示(ρ, V) **称为完全可约的**.此时记 $\rho = \rho_{V_1} \dotplus \rho_{V_2}$,称 ρ 为子表示 ρ_{V_1} 与 ρ_{V_2} 的直和.

引理 5 设 V_1, V_2 是李群 G 的表示(ρ, V) 的不变子空间,则 $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 也是不变子空间.

引理 6 设(ρ, V) 是李群 G 的完全可约表示,V_1 是任一不变子空间,则子表示 (ρ_{V_1}, V_1) 也是完全可约表示.

定理 20 设(ρ, V) 是李群 G 的有限维表示,则下述三个条件是等价的:

1° (ρ, V) 完全可约;

2° (ρ, V) 是不可约子表示的直接和;

3° V 是极小不变子空间之和,即

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_s,$$

其中每个 V_i 是非零极小不变子空间,(ρ_{V_i}, V_i) 不可约.

定义 17 设$(\rho_1, V_1),(\rho_2, V_2)$ 是李群 G 的两个表示,如有 V_1 到 V_2 上的线性同构 $\mathscr{A}$ 使得 $\forall g \in G$,

$$\mathscr{A}\rho_1(g) = \rho_2(g)\mathscr{A}, \forall g \in G,$$

则称表示(ρ_1, V_1) 与(ρ_2, V_2) 等价.

定理 21 设李群 G 有两个不可约表示$(\rho_i, V_i)(i = 1,2)$.若有 V_1 到 V_2 内的非零线性映射 $\mathscr{A}$ 使得

$$\mathscr{A}\rho_1(g) = \rho_2(g)\mathscr{A}, \quad \forall g \in G, \tag{2-5}$$

则 $\mathscr{A}$ 为线性同构,进而$(\rho_1, V_1),(\rho_2, V_2)$ 等价.

特别当

$$(\rho_1, V_1) = (\rho_2, V_2) = (\rho, V) \tag{2-6}$$

为 G 的不可约复表示(即 V 为复向量空间),$\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换,且

$$\mathscr{A}\rho(g) = \rho(g)\mathscr{A}, \quad \forall g \in G \tag{2-7}$$

时,则

$$\mathscr{A} = c\,\mathrm{id}_V, c \in \mathbf{C}. \tag{2-8}$$

此即所谓舒尔(Schur)引理.

要注意:李群的同态可导出其李代数的同态;$\mathrm{GL}(V)$ 的李代数为 $\mathrm{gl}(V)$,而且此时有

$$\exp X = e^X, \forall X \in \mathrm{gl}(V).$$

定理 22 设(ρ, V) 是连通李群 G 的表示,$\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数,则$(\mathrm{d}\rho, V)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的表示.而且当且仅当 V_1 是$(\mathrm{d}\rho, V)$ 的不变子空间时,V_1 是(ρ, V) 的不变子空间.

于是当且仅当$(\mathrm{d}\rho, V)$ 不可约(完全可约)时,(ρ, V) 不可约(完全可约).

2.7 李群基本定理的逆定理

定理 23(李群第一基本定理的逆定理) 设 n 元的 $n \times n$ 矩阵函数

$$L(x) = (l_j^i(x))$$

在 $x = 0$ 处解析,且

$$L(0) = I_n,$$

于是在 $x = 0$ 附近,$L(x)$ 有逆,记为

$$L^{-1}(x) = (\tilde{l}_j^i(x)).$$

又设 $2n$ 元函数

$$z_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

在 $x = y = 0$ 处解析.并设 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right)$.若下面等式成立

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = L(z)L^{-1}(y),$$

则 $f(x,y)$ 是一个局部李群的乘法函数,其左不变向量场为

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

定理 24(李第二基本定理的逆定理) 设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空开集,$\mathscr{D}^1(V)$ 的一些元素构成李代数 $\mathfrak{g}$,且满足

1° $\dim\mathfrak{g} = n$;

2° $\{X_p \mid X \in \mathfrak{g}\} = T_p(V)$,

则存在在局部同构意义下唯一的局部李群,以 $\mathfrak{g}$ 为其李代数.

这个定理的证明说明了 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 确定之后也就可以确定 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,也就可以确定局部李群.

定理 25(李第三基本定理的逆定理) 设 ℓ 是 $\mathbf{R}$ 上的抽象李代数,$\dim\ell = n$.于是在基本同构的意义下存在唯一的局部李群 L,其李代数为 ℓ.

定理 26 设 V 是一个局部李群,且 $V^{-1} = V$,则存在一个李群 G,以 V 为其单位邻域.

由此定理我们知道,对任何有限维李代数均有李群以其为李代数.

2.8 李群的覆盖群

定义 18 设 G_1, G_2 是连通李群,$f: G_1 \to G_2$ 是同态映射,且(G_1, f)是 G_2 的覆盖,则称 G_1 为 G_2 的覆盖群,$f^{-1}(e_2) = \Gamma$ 为**覆盖群**(G_1, f) 关于 G_2 的庞加莱(Poincare)群,$[\Gamma : e_1]$ 称为**覆盖叶数**.

引理 7 设(G_1, f)是李群 G_2 的覆盖群,则其庞加莱群 $\Gamma = f^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的离散正规子群,因而 $\Gamma \subseteq C(G_1)$,且

$$f^{-1}(g_2) = g_1\Gamma,$$

其中 g_1 是 $f^{-1}(g_2)$ 中任一元素,G_1/Γ 与 G_2 是同构的拓扑群.

定义 19 若(G_1, f_1)与(G_2, f_2)均为李群 G 的覆盖群,若有 G_1 到 G_2 的同构 φ 使得

$$f_1 = f_2\varphi,$$

则称(G_1,f_1)与(G_2,f_2)等价.

显然,(G_1,f_1)与(G_2,f_2)是 G 的等价覆盖,它们的庞加莱群同构.

定理 27　设 G 是一个连通李群,则在同构意义下存在唯一的连通且单连通李群 $\tilde{G}$,及 $\tilde{G}$ 到 G 上的覆盖映射f,使得$(\tilde{G},f)$是 G 的覆盖群,$(\tilde{G},f)$称为 G 的**通用覆盖群**.

推论 4　设$(\tilde{G},f)$为连通李群 G 的通用覆盖群,则 $\mathrm{d}f$ 是李 G 到李 G 的同构映射.

定理 28　设 $\tilde{G}$,G 是连通李群,且 $\tilde{G}$ 是单连通的.它们的李代数分别为 $\tilde{\mathfrak{g}}$,$\mathfrak{g}$.ρ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的同构映射.则存在 $\tilde{G}$ 到 G 的覆盖同态f使得 $\mathrm{d}f = \rho$.

定理 29　设 G 是一个连通且单连通的李群.Γ_1,Γ_2是 G 的离散正规子群.则当且仅当存在 G 的自同构θ使得$\theta(\Gamma_1) = \Gamma_2$时,$G/\Gamma_1$与 G/Γ_2同构.

2.9　李群的自同构群

定义 20　设 $\mathfrak{g}$ 是连通李群 G 的李代数,$G(\mathfrak{g})$的所有自同构所构成的群,称为 $G(\mathfrak{g})$的自同构群,记为 $\mathrm{Aut}G(\mathrm{Aut}\mathfrak{g})$.

1° 当且仅当$\rho_1 = \rho_2$,即 d 是 $\mathrm{Aut}G$ 到 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的一一映射时,若 $\rho \in \mathrm{Aut}G$,则 $\mathrm{d}\rho \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$,而且 $\mathrm{d}\rho_1 = \mathrm{d}\rho_2$.于是

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{d}(\mathrm{Aut}G).$$

2° 设$(\tilde{G},f)$是 G 的通用覆盖群,于是 G 同构于 $\tilde{G}/\Gamma$.

$$\Theta = \{\tilde{\theta} \in \mathrm{Aut}\,\tilde{G} \mid \tilde{\theta}(\Gamma) = \Gamma\}$$

与 $\mathrm{Aut}G$ 是同构的群.

3° 从以上可得到下面关系:

$$\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \supseteq \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \supseteq \mathrm{d}(\mathrm{Aut}\,\tilde{G}) \supseteq \mathrm{d}\Theta \cong \mathrm{d}(\mathrm{Aut}G),$$

$$\mathrm{Aut}\,\tilde{G} \supseteq \Theta \cong (\mathrm{Aut}G).$$

定理 30　$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的闭子群,因而是李群.

定理 31　设 $\tilde{G}$ 为连通且单连通李群,$\mathfrak{g}$ 为其李代数,则

$$\mathrm{d}(\mathrm{Aut}\,\tilde{G}) = \mathrm{Aut}\mathfrak{g},$$

且 d 为同构映射,因而 $\mathrm{Aut}\,\tilde{G}$ 为李群.

定理 32　Θ 为 $\mathrm{Aut}\,\tilde{G}$ 的闭子群,故 Θ,$\mathrm{Aut}G$ 均为李群;$\mathrm{d}\Theta$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的闭子群,也是李群.

定义 21 设 G 为李群，对 $g \in G$，由

$$\operatorname{ad}g(h) = ghg^{-1}, \forall h \in G$$

定义的自同构 ad$g$，称为 G 的**内自同构**，G 的所有内自同构所构成的群称为 G 的**内自同构群**，记为 ad$G$.

定义 22 设 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数，$g \in G$. 于是 $d(\operatorname{ad}g) = \operatorname{Ad}g$ 为 $\mathfrak{g}$ 的自同构，称为 $\mathfrak{g}$ 的内自同构，由 $\{\operatorname{Ad}g \mid g \in G\}$ 生成的群 AdG 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构群**.

定义 23 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数，其线性变换 D 若满足

$$D([x,y]) = [Dx,y] + [x,Dy], \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

则称 D 为 $\mathfrak{g}$ 的导子. 特别，对 $x \in \mathfrak{g}$，ad$x$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**导子**，称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子**.

定理 33 $\mathfrak{g}$ 的所有导子的集合 Der$\mathfrak{g}$ 是 $gl(\mathfrak{g})$ 的子代数. 称为 $\mathfrak{g}$ 的**导子代数**；$\mathfrak{g}$ 的所有内导子的集合 ad$\mathfrak{g}$ 为 Der$\mathfrak{g}$ 的理想，称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子代数**.

定理 34 设 $\mathfrak{g}$ 为连通李群 G 的李代数，则李群 Aut$\mathfrak{g}$ 的李代数为 Der$\mathfrak{g}$.

定理 35 设 G 为连通李群，$\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数，$g \in G$，$X, Y \in \mathfrak{g}$. 则有

1° $\exp t(\operatorname{Ad}g)Y = \operatorname{ad}g(\exp tY)$；

2° $\operatorname{Ad}\exp X = e^{\operatorname{ad}X}$；

3° AdG 为 Aut$\mathfrak{g}$ 的连通正规李子群，其李代数为 ad$\mathfrak{g}$.

推论 5 设 H 为连通李群 G 的李子群，则当且仅当 H 的李代数 $\mathfrak{h}$ 为 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想时，H 正规.

注 1 设 $\mathfrak{g}$ 为连通李群 G 的李代数. 从上面讨论得到 $(\operatorname{Ad},\mathfrak{g})$ 是 G 的表示，称为 G 的**伴随表示**，$(d\operatorname{Ad},\mathfrak{g}) = (\operatorname{ad},\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的表示，称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

一般李代数的伴随表示可以脱离李群而独立定义、研究.

注 2 一般说来，AdG 不一定是 Aut$\mathfrak{g}$ 的**闭子群**.

2.10 商空间与商群

定义 24 设 G 是一个李群，M 是一个微分(解析)流形，如果

1° G 是 M 上的拓扑变换群；

2° $G \times M$ 到 M 上的映射 $\mathscr{B}(g,p) = gp$ 是可微映射

则称 G 是 M 的**李变换群**.

又若 G 在 M 上的作用是可递的，则称 M 是**齐性空间**.

显然，$\forall g \in G$，g 是 $\mathfrak{M}$ 的**微分同胚**.

定理 36 设 $\mathfrak{G}$ 是微分流形 $\mathfrak{M}$ 上的李变换群，$p \in M$，则有

1° p 的迷向子群

$$G_p = \{g \in G \mid gp = p\}$$

是 G 的闭子群，因而是 G 的李子群；

2° 记 $\mathscr{B}_p(g) = gp.\mathscr{B}_p$ 是 G 到 M 的映射，故 $d\mathscr{B}_p$ 将 $T_e(G)$ 映到 $T_p(M)$. 特别有

$$(d\mathscr{B}_p)_e^{-1}(0) = T_e(G_p);$$

3° 若 G 有效可递地作用于 M，设 $\mathfrak{g}_1$ 为 G 的右不变向量场构成的李代数(与 G 的

李代数反同构),则 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathrm{d}\mathscr{P}_p(\mathfrak{g}_1)$ 同构.

$\mathrm{d}\mathscr{P}_p(\mathfrak{g}_1)$ 中元素称为 M 上的**无穷小变换**.

定理 37 设 H 是李群 G 的闭子群,则在 G/H 上可建立解析结构,使其为解析流形.设 $\pi: G \to G/H$ 为自然映射.又 $\forall x \in G$, G/H 到 G/H 的映射 A_x

$$A_x(\pi(y)) = \pi(xy), \forall y \in G$$

是解析同胚,且 G 是 G/H 的李变换群.

定理 38 设 G 是流形 M 上可递李变换群. G_{p_0} 是 $p_0 \in M$ 的迷向子群.又设 α 是 G/G_{p_0} 到 M 的映射:

$$\alpha(gG_{p_0}) = gp_0.$$

则有

1° 若 α 是 G/G_{p_0} 到 M 上的同胚映射,则 α 是微分同胚;

2° 若 α 是同胚, M 是连通流形,则 G 的单位连通分支 G_0 在 M 上作用可递.

推论 6 设 H 是李群 G 的闭子群,则可在 G/H 上定义唯一的解析结构使得 G 是 G/H 上的李变换群.

定理 39 设 H 是李群 G 的闭正规子群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 分别为 G, H 的李代数.则 G/H 上有解析结构使 G/H 是李群,而且 G/H 的李代数同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

以后,就将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 看成 G/H 的李代数.

定理 40(同态基本定理) 设 θ 是李群 G_1 到李群 G_2 上的同态,则 $\theta^{-1}(e_2)$ 是 G_1 的闭正规子群.又设 π 为 G_1 到 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 的自然同态,则有 $G_1/\theta^{-1}(e_2)$ 到 G_2 的李群的同构 φ 使得

$$\theta = \varphi\pi.$$

推论 7 设 G_0 是李群 G 的单位连通分支,则 G/G_0 是离散群.

定理 41 设 G 是 n 维连通交换李群(或复李群),则

$$G \cong \mathbf{R}^k \otimes T^{n-k},$$

其中

$$T^{n-k} = \underbrace{\mathbf{R}/\mathbf{Z} \otimes \mathbf{R}/\mathbf{Z} \otimes \cdots \otimes \mathbf{R}/\mathbf{Z}}_{n-k}$$

为 $n-k$ 维环面.

对复李群,只要将 $\mathbf{R}$ 改为 $\mathbf{C}$ 就行了.

推论 8 设 G 是 1 维连通李群, X 是其李代数中非零元素.若 G 非紧,则 $G = \exp tX = \mathbf{R}$;若 G 紧,则 $G = \exp tX = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

定理 42 设 G 是连通且单连通李群, H 为其连通正规子群,则 H 为闭子群.

定理 43 设 G 为连通李群,李代数为 $\mathfrak{g}$.则有

1° G 的换位子群 $G^{(1)}$ 是连通闭正规子群.且 $G^{(1)}$ 的李代数是

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}];$$

2° $G/G^{(1)}$ 是交换李群;

3° 如果 H 是 G 的闭正规子群,且 G/H 交换,则 $H \subseteq G^{(1)}$.

表 2-1 列出了典型李群及其李代数.

表 2-1　典型李群及其李代数

名　称	符　号	李代数	维　数
欧几里德空间	$\mathbf{R}^n$	$\mathbf{R}^n$	n
实环面	$T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$	$\mathbf{R}^n$	n
复环面	$T_{\mathbf{C}}^n = \mathbf{C}^n/Z^n + \sqrt{-1}Z$	$\mathbf{C}^n$	n
一般线性群	$\mathrm{GL}(n,F)$	$\mathrm{gl}(n,F)$	n^2
特殊线性群	$\mathrm{SL}(n,F)$	$\mathrm{sl}(n,F)$	n^2-1
正交群	$O(n,F)$	$o(n,F)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
特殊正交群	$\mathrm{SO}(n,F)$	$\mathrm{so}(n,F)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
辛群	$\mathrm{SP}(n,F)$	$\mathrm{sp}(n,F)$	$2n^2+n$
(p,q)型洛伦兹群	$O(p,q,F)$	$o(p,q,F)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
酉群	$U(n)$	$u(n)$	n^2
特殊酉群	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{su}(n)$	n^2-1
(p,q)型酉群	$U(p,q)$	$u(p,q)$	$(p+q)^2$
特殊(p,q)型酉群	$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathrm{su}(p,q)$	$(p+q)^2-1$
(p,q)型辛群	$\mathrm{SP}(p,q)$	$\mathrm{sp}(p,q)$	$2(p+q)^2+p+q$
特殊正交星群	$\mathrm{SO}^*(2n)$	$\mathrm{so}^*(2n)$	$2n^2-n$
酉星群	$U^*(2n)$	$u^*(2n)$	$4n^2$
特殊酉星群	$\mathrm{SU}^*(2n)$	$\mathrm{su}^*(2n)$	$4n^2-1$

3　紧李群的结构

3.1　约化李群的分解

定义 1　李群 G 如果其李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 为半单(单)李代数,则称为半单(单)

李群.

定理1 设 G 是连通半单李群,其李代数为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_s,$$

其中 $\mathfrak{g}_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想,则有

1° $G^{(1)} = G$;

2° G 的中心 $C(G)$ 是零维李群,即 G 仅有离散中心;

3° $\mathrm{Ad}G$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的单位连通分支,半单;

4° $G = G_1G_2\cdots G_s$. G_i 是单李群, $\mathrm{Lie}G_i = \mathfrak{g}_i$.

定义2 若$(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 完全可约,则李代数 $\mathfrak{g}$ 称为约化的.

若$(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ 完全可约,则连通李群 G 称为约化的.

连通李群当且仅当其李代数约化时,其约化.

定理2 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, $\mathfrak{r}$ 为其根基(即 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想), $\mathfrak{s}$ 为其幂零根基(即 $\mathfrak{g}$ 的所有有限维不可约表示之核的交, $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r}$).则下面条件等价:

1° $\mathfrak{g}$ 约化;

2° $\mathfrak{g}^{(1)}$ 半单;

3° $\mathfrak{g}$ 是半单李代数与交换李代数的直和;

4° $\mathfrak{g}$ 有一个有限维表示,相应的双线性型是非退化的;

5° $\mathfrak{g}$ 有一个忠实的有限维的完全可约表示;

6° $\mathfrak{g}$ 的幂零根基 $\mathfrak{s} = \{0\}$;

7° $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心.

所谓 $\mathfrak{g}$ 的一表示(ρ, V) 相应的双线性型是指:

$$(x,y) = \mathrm{tr}\rho(x)\rho(y), \forall x,y \in \mathfrak{g}.$$

定理3 设 $C(G)$ 是连通约化李群 G 的中心.如果 G 是非交换李群,则

$$G = C(G)G_1\cdots G_s,$$

其中 G_i 是单正规子群, $\mathrm{Lie}G_i = \mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想.

3.2 紧李群的不变内积

定义3 李群 G 的拓扑若是紧致的,则称 G 为紧李群.

显然紧李群仅有有限个连通分支.下面凡未声明,所提到的紧李群均指连通紧李群.

引理1 记 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为李群 G 的莫雷尔-嘉当 Maurer-Cartan) 形式, $\omega_i|_e = \mathrm{d}x_i$.则 G 上 n 阶左不变形式 ω 必为

$$\omega = a\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

其中 a 为常数.

若 G 是紧李群,于是有有限个坐标邻域 $U_1,U_2,\cdots,U_s$ 覆盖 G.且有 G 上函数 f_i,满足

1° $\mathrm{Support}\ f_i \subseteq U_i$;

2° $f_i \geqslant 0$;

3° $\sum_{i=1}^{s} f_i = 1$.

于是可以定义

$$\int_G f\omega = \sum_{i=1}^{s} \int_{U_i} ff_i\omega.$$

特别当 $f = 1$ 时，

$$V = \int_G f\omega = \int_G \omega = \sum_{i=1}^{s} \int_{U_i} f_i\omega$$

称为 G 的体积.

体积的定义与 $U_1, U_2, \cdots, U_s$ 及 f_i 的选取无关.

定理 4　设 G 是紧李群，则任何 $f, g \in C^\infty(G)$ 与常数 λ, μ 有

1° $\int_G (\lambda f + \mu g)\omega = \lambda \int_G f\omega + \mu \int_G g\omega$;

2° $\int_G f(\tau\sigma)\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma\tau)\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$, $\forall \tau \in G$;

3° $\int_G f(\sigma^{-1})\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$.

2° 中关系

$$\int_G f(\tau\sigma)\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma_1)\omega(\tau^{-1}\sigma_1) = \int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$$

称为**左不变的**.

$$\int_G f(\sigma\tau)\omega(\sigma) = \int_G f(\sigma_1)\omega(\sigma_1\tau^{-1}) = \int_G f(\sigma)\omega(\sigma)$$

称为**右不变的**.

一个李群上若能定义双不变的积分(即有双不变体积元，Haar 测度) 称为幺模群(unimodular 群). 可以证明下面的群均是幺模的:

1° 李群 G 满足 $\mathrm{Ad}G$ 紧，特别 G 紧;

2° 半单李群;

3° 连通幂零李群.

定义 4　设 V 是 n 维线性空间，G 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的李子群. 如果有

$$(g(x), g(y)) = (x, y), \quad \forall x, y \in V, g \in G,$$

则 V 中内积 (x, y) 称为在 G 下不变.

定理 5(外尔定理)　设 G 为 $\mathrm{GL}(V)$ 的紧子群. 则在 V 上存在 G 的不变内积.

定理 6　连通紧复李群可换，故为复环面.

定理 7　设(ρ, V)是实紧李群 G 的表示，则在 V 中有基，使得 $\rho(G)$ 为 $O(n)$ 的闭子群，其中 $\dim V = n$. 反之，$O(n)$ 的闭子群必为紧李群.

定理 8　设 G 为紧李群，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 为其李代数. 则下面事实成立:

1° G 的任一有限维表示完全可约;

2° G 约化;

3° G 有如下分解

$$G = C(G)G_1\cdots G_s,$$

其中 $C(G)$ 是 G 的中心,G_i 是 G 的单正规子群;

4° G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 有如下分解

$$\mathfrak{g} = C(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s,$$

其中 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心,$\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想.

定义 5 李代数上内积(X,Y)如果有

$$([Z,X],Y) + (X,[Z,Y]) = 0, \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g},$$

则其称为**不变的**.若李代数 $\mathfrak{g}$ 有不变内积,则 $\mathfrak{g}$ 称为**紧李代数**.

显然,若 $\mathfrak{g}$ 的基灵(Killing)型 $B_{\mathfrak{g}}$ 负定,则 $-B_{\mathfrak{g}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的不变内积.因而此时 $\mathfrak{g}$ 是紧李代数,而且半单.

引理 2 设 G 为连通李群,$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 为其李代数.$(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ 为 G 的伴随表示.则 $\mathfrak{g}$ 中关于 $\mathrm{Ad}\mathfrak{g}$ 的不变内积就是 $\mathfrak{g}$ 的不变内积.

推论 1 紧李群的李代数一定是紧李代数.

定理 9 紧李代数 $\mathfrak{g}$ 必为约化李代数.

3.3 紧李代数的嘉当子代数

实数域上一个李代数 $\mathfrak{g}_0$,若把基域扩充为复数域,则得到复数域上的一个李代数,称为 $\mathfrak{g}_0$ 的复化,记 $\mathfrak{g}_0{}^c$.而 $\mathfrak{g}_0$ 称为 $\mathfrak{g}_0{}^c$ 的一个**实形式**.

定理 10 设 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数,$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0{}^c$ 为其复化.$\mathfrak{g}$ 中变换

$$\tau: \quad X + \sqrt{-1}Y \to X - \sqrt{-1}Y, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}_0$$

称为 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的**共轭**.τ 有如下性质:

1° $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y), \forall x,y \in \mathfrak{g}$;

2° $\tau(\alpha x) = \bar{\alpha}\tau(x), \forall \alpha \in \mathbf{C}, x \in \mathfrak{g}$;

3° $\tau[x,y] = [\tau x, \tau y], \forall x,y \in \mathfrak{g}$;

4° $\tau^2 = \mathrm{id}\mathfrak{g}$;

5° $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid \tau(x) = x\}$.

复李代数中的变换 τ 若满足 1°—4°,则称为**半对合**.如果 $\mathfrak{g}$ 有半对合 τ,则 τ 的不动点集 $\mathfrak{g}_0 = \{x \mid \tau x = x\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式.

定理 11 设 $\mathfrak{g}_0$ 是实李代数.$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_c^0$.$\tau$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对应 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭,则下面的结论成立.

1° 若 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数(理想),则 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数(理想).特别,若

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \quad (\text{理想直和}),$$

则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1^c + \mathfrak{g}_2^c \quad (\text{理想直和}).$$

2° 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数(理想),则 $\tau\mathfrak{h}$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的子代数(理想).$\mathfrak{h}$ 可换,则 $\tau\mathfrak{h}$ 可换.

3° 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数,则当且仅当 $\tau\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ 时,存在 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 $\mathfrak{h}_0$,使 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$.因而对 $\mathfrak{g}$ 的任一子代数 $\mathfrak{h}$,则有

$$\mathfrak{h} \cap \tau\mathfrak{h} = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{h})^c.$$

4° 当且仅当 $\mathfrak{g}_0^c$ 半单时，$\mathfrak{g}_0$ 半单.

5° $C(\mathfrak{g}_0)^c = C(\mathfrak{g}_0^c)$；

6° 当且仅当 $\mathfrak{g}_0^c$ 约化时，$\mathfrak{g}_0$ 约化.

紧李代数的极大可换子代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.

定理 12　设 $\mathfrak{g}$ 为约化李代数，则有

1° 对 $\mathfrak{g}$ 的任一嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 有 $C(\mathfrak{g}) \subsetneq \mathfrak{h}$.

2° 当且仅当

$$\mathfrak{h} = C(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}_1,$$

其中 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 的嘉当子代数时，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.

3° $\mathfrak{g}_0$ 为实约化李代数，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$，当且仅当 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数时，$\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当子代数.

定理 13　设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数，(X_0, Y_0) 是不变内积. $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个嘉当子代数，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c = C(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}_1$，且

$$\mathfrak{g} = C(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

则有下面一些结果：

1° (X_0, Y_0) 可以按下面方式扩充为 $\mathfrak{g}$ 上非退化不变对称双线性形式：对 $X = X_1 + \sqrt{-1}X_2$，$Y = Y_1 + \sqrt{-1}Y_2$　$(X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_0, i = 1,2)$ 有

$$(X, Y) = (X_1, Y_1) - (X_2, Y_2) + \sqrt{-1}(X_1, Y_2) + \sqrt{-1}(X_2, Y_1);$$

2° 对此扩充有

$$(\tau X, \tau Y) = \overline{(X, Y)};$$

3° $(C(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}^{(1)}) = 0$；

4° $(h, e_\alpha) = 0, \forall h \in \mathfrak{g}, e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta$；

5° $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0, \alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq -\beta$.

由于 (X, Y) 在 $\mathfrak{h}_0$ 上非退化，故在 $\mathfrak{h}$ 上亦非退化. 因而可将 Δ 嵌入 $\mathfrak{h}$ 中，使得

$$\alpha(h) = (\alpha, h), \forall \alpha \in \Delta, h \in \mathfrak{h}.$$

定理 14　设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数. (X_0, Y_0) 是不变内积，(X, Y) 是其在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 上的扩充. $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数. 有 $\mathfrak{h}_0 = C(\mathfrak{g}_0) + \mathfrak{h}_{01}$. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$. 又 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有分解

$$\mathfrak{g} = C(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}_1 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

α 表示 $\mathfrak{h}$ 上线性函数，也表示用 (X, Y) 在 $\mathfrak{h}$ 中的嵌入. 则有

1° $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{01}$，即 $\alpha(h_0)$ 为纯虚数或零，$\forall \alpha \in \Delta, h_0 \in \mathfrak{h}_0$；

2° $\tau(\alpha) = -\alpha, \tau\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$；

3° $[h, e_\alpha] = (\alpha, h)e_\alpha, \forall e_\alpha \in \mathfrak{g}, \alpha \in \Delta$；

4° $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})\alpha, \forall e_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$；

5° 在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中可取 $e_{-\alpha}$ 满足

$$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1,$$

$$\tau e_\alpha = e_{-\alpha},$$
$$\overline{N_{\alpha\beta}} = N_{-\alpha,-\beta}.$$

满足这些条件的$\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$称为**外尔基**.

定理15 设$\alpha,\beta \in \Delta$,β关于α的根链为

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha,$$

则有

1° $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = p - q$;

2° $|N_{\alpha\beta}|^2 = \dfrac{q(p+1)}{2}(\sqrt{-1}\alpha, \sqrt{-1}\beta)$.

定义6 记$\mathfrak{h}_0$为紧李代数$\mathfrak{g}_0$的子代数.Δ是由$\mathfrak{h}_0$及不变内积决定的根系.如果

$$(\alpha, \sqrt{-1}X_0) \neq 0, \forall \alpha \in \Delta,$$

$\mathfrak{h}_0$中元素X_0称为**正则元素**,否则称为**非正则元素**.

引理3 设X_0为$\mathfrak{h}_0$中正则元,则可在$\mathfrak{h}_R$中引进正方向,使$\sqrt{-1}X \in \mathfrak{h}_R$,

$$(\sqrt{-1}X, \sqrt{-1}X_0) > 0,$$

则$\sqrt{-1}X > 0$.由此可决定Δ^+及Π.

反之,若在$\mathfrak{h}_R$中决定了正方向及Δ^+,Π,则有$\mathfrak{h}_0$的正则元X_0,使得在$\mathfrak{h}_R$中按上方法得到的素根系恰为Π.

定义7 $\mathfrak{h}_0$中正则元素集(必为开集)

$$\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta}\{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, \sqrt{-1}X_0) = 0\}$$

的连通分支,称为**外尔房**.记

$$\mathfrak{h}_\alpha^0 = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, \sqrt{-1}X_0) = 0\}.$$

定理16 设$\mathfrak{h}_0$是$\mathfrak{g}_0$的嘉当子代数,Δ是对应的根系,则

1° 对应一个素根系$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$,

$$\Omega_\Pi = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha_i, \sqrt{-1}X_0) > 0, 1 \leq i \leq l\}$$

是非空的连通开凸集;

2° Ω_Π是$\mathfrak{h}_0$的一个外尔房,任何外尔房均有这种形式.即外尔房与素根系有一一对应.

3.4 实紧李群的嘉当子群的共轭性

定义8 实紧李群G_0的最大连通交换子群H_0称为G_0的**嘉当子群**.

引理4 实紧李群G_0的嘉当子群H_0是紧子群,故为环面.且H_0的李代数$\mathfrak{h}_0$ = 李H_0是G_0的李代数$\mathfrak{g}_0$的加当子代数.又若$\mathfrak{h}_0$是$\mathfrak{g}_0$的任一嘉当子代数,则$\exp\mathfrak{h}_0 = H_0$为G_0的嘉当子群.指数映射$\exp:\mathfrak{h}_0 \to H_0$是通用覆盖映射即$(\mathfrak{h}_0, \exp)$是$H_0$的通用覆盖群.

显然,若 H_0 是 G_0 的嘉当子群,则对任何 $A \in \mathrm{Aut}G_0$,$A(H_0)$ 亦为嘉当子群.

定理 17　设 G_0 为实连通紧李群,H_0 为它的嘉当子群.则 H_0 的正规化子 $N(H_0)$ 为紧李子群.而且 $N(H_0)$ 的单位分支 $N(H_0)^0 = H_0$.因而

$$李\ N(H_0) = 李\ H_0$$

定义 9　设 G 是李群,G 的李代数为 $\mathfrak{g}$,若有 $\mathfrak{g} \in G$,使得

$$\mathrm{ad}\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2,$$

则称 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2 \in G$ 为共轭的.

若存在 $\mathfrak{g} \in G$,使得

$$(\mathrm{Ad}\mathfrak{g})X_1 = X_2,$$

则 $X_1, X_2 \in g$ 称为共轭的.

显然,当且仅当 $\exp X_1$ 与 $\exp X_2$ 共轭时,$X_1, X_2 \in g$ 共轭.

定理 18　设 G 是李群,其李代数为 g.又 $g \in G$.$C(g)$ 为 g 在 G 中的中心化子.则 $C(g)$ 是 G 的闭子群,且其李代数

$$李\ C(g) = \{X \in g \mid (\mathrm{Ad}g)X = X\}.$$

又若 $A \in \mathrm{Aut}G$,则 $C(Ag) = AC(g)$.

定义 10　$g \in G$,若 $C(g)^0$($C(g)$ 的单位连通分支)可交换,则称 g 为正则元素.否则称 g 为非正则元素.

显然,正则元素的共轭元素为正则元素.

设 H_0 是实连通紧李群 G_0 的一个嘉当子群,g_0,$\mathfrak{h}_0$ 分别为它们的李代数.Δ 为相应的根系.再令

$$\mathfrak{h}_\alpha{}^k = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, X_0) = 2k\pi\sqrt{-1}\}, \alpha \in \Delta, k \in Z.$$

定理 19　对于 $g_0 = \exp X_0 \in H_0, X_0 \in \mathfrak{h}_0$ 下面条件是等价的:

1° g_0 正则;

2° $C(g_0)^0 = H_0$;

3° $\mathfrak{h}_0 = \{X \in g_0 \mid (\mathrm{Ad}g_0)X = X\}$;

4° $e^{(\alpha, X_0)} \neq 1, \forall \alpha \in \Delta$;

5° $X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha{}^k$.

令

$$H_\alpha = \{g = \exp X_0 \in H_0 \mid X_0 \in \mathfrak{h}_0, e^{(\alpha, X_0)} = 1\},$$

$$\mathfrak{h}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha{}^0 = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, X_0) = 0\},$$

则由上面的定理,可得下面的推论.

推论 2　$\bigcup_{\alpha\in\Delta} H_\alpha = \{\exp X_0 \mid X_0 \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{h}_\alpha^k\}$ 为 H_0 中所有非正则元素的集合.

推论 3　H_α 为 H_0 的闭子群,且 $\mathrm{Lie}H_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha^0$.

推论 4　H_0 中正则元集 $H_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} H_\alpha$ 为 H_0 中开集.

定理 20　设 G_0 是实连通紧李群,H_0 为 G_0 的一个嘉当子群,则

$$G_0 = \bigcup_{g\in G_0} \mathrm{ad}gH_0,$$

即 G_0 的任一元素，都与 H_0 中一个元素共轭.

定理 21　设 G_0 为实连通紧李群，H_0 是其嘉当子群，$\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0$ 分别为 G_0, H_0 的李代数. 则

1° G_0 的任何两个嘉当子群共轭，因之 $\mathfrak{g}_0$ 的任何两个嘉当子代数共轭；

2° $C(G_0) = \bigcap_{g \in G_0} \mathrm{ad}g(H_0)$；

3° exp 是 $\mathfrak{g}_0$ 到 G_0 上的映射，即对任何 $g_0 \in G_0$ 有 $X_0 \in \mathfrak{g}_0$，使得

$$g_0 = \exp X_0;$$

4° 当且仅当存在唯一的嘉当子群 $H_0 \ni g_0$ 时，g_0 为 G_0 的正则元素.

3.5　紧半单李代数决定的李群

定理 22　实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 为紧半单李代数的充分必要条件是其基灵型 B_0 负定.

以后，如不声明，均以 $-B_0$ 为紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的内积.

定理 23　紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 为紧李群，其单位连通分支为 $\exp \mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$ 也是紧李群，记作 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}_0$，且 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的李代数等于 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$，与 $\mathfrak{g}_0$ 同构.

又若 G_0 是以 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的实连通李群，则

$$\mathrm{Ad}G_0 = \mathrm{Int}\mathfrak{g}_0.$$

定理 24　设 G_0 是实连通李群，其李代数

$$\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0 = T_e(G_0)$$

是紧李代数，(X_0, Y_0) 是不变内积，则在 G_0 上有黎曼结构 $Q(X, Y)$ 满足：

1° $Q_e(X, Y) = (X_0, Y_0)$；

2° $Q(X, Y)$ 在左右平移下不变；

3° 由 $Q(X, Y)$ 决定的 G_0 上的黎曼联络是左不变的，且 $\nabla_X(X) = 0$.

因而 G_0 上的测地线是单参数子群，反之亦然，故 G_0 为完备黎曼流形.

定理 25　若实连通李群 G^* 的李代数 $\mathrm{Lie}G^* = \mathfrak{g}_0$ 是紧半单李代数，则 G^* 是紧半单李群.

推论 5　以紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的实连通李群在同构意义下只有有限个.

定理 26　设 G_0 为实连通紧李群，$\mathfrak{g}_0$ 为其李代数，有直和分解

$$\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_0^{(2)}.$$

则 G_0 有李子群的乘积分解

$$G_0 = C(G_0) G_0^*,$$

其中 $C(G_0)$ 紧，G_0^* 紧半单.

3.6　紧李代数的分类

紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s,$$

其中 $C(\mathfrak{g}_0)$ 是环面,$\mathfrak{g}_i$ 为紧单李代数,因而紧单李代数的分类决定了紧李代数的分类.

定理 27 设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧单李代数,则其复化 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^C$ 为复单李代数.

定理 28 设 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数,则有 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式 $\mathfrak{g}_0$.

复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式在 $\mathfrak{g}$ 的内自同构下共轭,因而都是同构的.因此紧半单李代数的分类完全化成了复半单李代数的分类.

$\mathrm{sl}(n, \boldsymbol{C})$ 的紧致实形式为 $\mathrm{su}(n)$.

$\mathrm{so}(n, \boldsymbol{C})$ 的紧致实形式为 $\mathrm{so}(n, \mathbf{R})$.

$\mathrm{sp}(n, \boldsymbol{C})$ 的紧致实形式为 $\mathrm{sp}(n)$.

4 紧李群的自同构群的表示

4.1 紧李代数的自同构群

引理 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是实紧李代数,且

$$\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_0^{(2)},$$

其中 $C(\mathfrak{g}_0)$、$\mathfrak{g}_0^{(2)}$ 分别为 $\mathfrak{g}_0$ 的中心与换位子代数,则

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Aut}C(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0^{(2)}.$$

引理 2 设 $\mathfrak{g}_0$ 为实紧李代数,$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 中由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭为 τ,则 $\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$,可自然扩充为 $\mathfrak{g}$ 的自同构,且满足

$$\sigma\tau = \tau\sigma.$$

反之,若 $\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$,且满足上述关系,则 $\sigma \mid \mathfrak{g}_0 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$,且其扩充恰为 σ.因而可记

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}.$$

由引理 1,主要是要讨论紧半单李代数的 $\mathfrak{g}_0$ 自同构.下面假定 $\mathfrak{g}_0$ 是紧半单李代数. G_0 是任一以 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的连通李群.因此 G_0 是紧半单的.又 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 亦为紧半单李群,以 $\mathrm{Ad}G_0 = \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 为单位连通分支.因而 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 为有限群.其中元素称为 $\mathfrak{g}_0$ 的外自同构.也称 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 \setminus \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 中元素为外自同构,$\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 中元素称为内自同构.

定理 1 设 G_0 是连通紧半单李群,$\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0$. H_0 是 G_0 的一个嘉当子群,李 $H_0 = \mathfrak{h}_0$.令

$$\alpha_0 = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 \mid \sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0\}.$$

将 σ 在 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 上扩充仍记为 σ.则有

1° α_0 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的闭子群,且 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 = \alpha_0\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$;

2° $\alpha_0 \cap \mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Ad}N(H_0)$,其中 $N(H_0)$ 为 H_0 在 G_0 中的正规化子;

3° 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 关于 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,$$

$O_R = \sqrt{-1}O_0, \alpha \in \Delta$,用基灵型嵌入 h_R 中. 此时 $\mathfrak{h}_R$ 为欧氏空间,则有 $\sigma(\mathfrak{h}_R) = O_R, \sigma \in O(O_R), \sigma(\Delta) = \Delta, \forall \sigma \in \mathfrak{a}_0$.

定理2 设 G_0 为连通紧半单李群. H_0 为其嘉当子群. $\mathfrak{g}_0 =$ 李 G_0, $\mathfrak{h}_0 =$ 李 H_0, $\mathfrak{a}_0 = \{\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 \mid \sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0\}$. 有

1° $\{\sigma \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0 \mid \sigma|_{\mathfrak{h}_0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_0}\} = \mathrm{Ad}H_0$;

2° $\mathrm{Ad}H_0$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0$ 的闭子群,且在 $\mathfrak{a}_0$ 及 $\mathrm{Ad}N(H_0)$ 中正规.

定理3 G_0 连通紧半单李群. H_0 为 G_0 的嘉当子群, $N(H_0)$ 是 H_0 的正规化子. 则有

$$\frac{\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0}{\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0} \cong \frac{\mathfrak{a}_0}{\mathrm{Ad}N(H_0)} \cong \frac{\dfrac{\mathfrak{a}_0}{\mathrm{Ad}H_0}}{\dfrac{\mathrm{Ad}N(H_0)}{\mathrm{Ad}H_0}},$$

而且 $\mathfrak{a}_0/\mathrm{Ad}H_0$, $\mathrm{Ad}N(H_0)/\mathrm{Ad}H_0$ 均为有限群,分别称为 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当群与外尔群. 进而有

$$\mathrm{Lie}\mathfrak{a}_0 \cong \mathrm{Lie}N(H_0) = \mathrm{Lie}H_0 = \mathfrak{h}_0.$$

定理4 $A_0 = \{\sigma \in O(\mathfrak{h}_R) \mid \sigma(\Delta) = \Delta\}$ 是 $O(\mathfrak{h}_R)$ 的一个子群. 且

$$\sigma\mathrm{Ad}H_0 \to \bar{\sigma} = \sigma|_{\mathfrak{h}_R}$$

是同构映射,即 $\mathrm{Ad}N(H_0)/\mathrm{Ad}H_0 \cong A_0 = \{\bar{\sigma} \in O(\mathfrak{h}_R) \mid \sigma(\Delta) = \Delta\}$ 的一个子群.

4.2 外 尔 群

本节将要决定 $\mathfrak{g}_0$ 的外尔群.

设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧半单李代数. $\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当子代数. 于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 关于 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^c$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

$\alpha \in \mathfrak{h}_R$,对

$$\mathfrak{h}_\alpha = \{x \in \mathfrak{h}_R \mid (x, \alpha) = 0\}$$

的反射 w_α 为

$$w_\alpha(x) = x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

引理3 $\alpha \in \mathfrak{h}_R$,则

1° $w_\alpha \in O(\mathfrak{h}_R)$;

2° $U \in O(\mathfrak{h}_R)$,则 $Uw_\alpha U^{-1} = wU(\alpha)$;

3° 若 $\alpha \in \Delta$,则 $w_\alpha(\Delta) = \Delta$.

由此可知 $\forall \alpha \in \Delta, w_\alpha \in A_0$.

设在 $\mathfrak{h}_R$ 确定某种正方向后，有 $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$，及素根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$. 于是有对应的外尔房

$$\Omega_\Pi = \{X \in \mathfrak{h}_R \mid (X, \alpha_i) > 0\}.$$

记 $\{w_{\alpha 1}, w_{\alpha 2}, \cdots, w_{\alpha l}\}$ 生成的群为 W'，$\{w_\alpha \mid \forall \alpha \in \Delta\}$ 生成的群为 W. 自然有

$$W' \subseteq W \subseteq A_0.$$

引理4　Δ 为根系. Π 为素根系. Ω_Π 为对应的外尔房. $\sigma \in A_0$. 则 $\sigma(\Omega_\Pi)$ 仍为外尔房. $\sigma(\Pi)$ 为某种次序下的素根系. 且有

$$\sigma(\Omega_\Pi) = \Omega_{\sigma(\Pi)}.$$

引理5　$\forall \alpha \in \Delta$，必有一个素根系 $\Pi \in \alpha$.

定理5　$\Delta, \Pi, \overline{W'}, W$ 定义如上. 有

1° W' 在外尔房集合上可递；

2° $W' = W$；

3° $w \in W$，使 $w(\Pi) = \Pi$，则 $w = \mathrm{id}$.

定理6　$W = \{\bar{\sigma} \in A_0 \mid \exists \sigma \in \mathrm{Ad}N(H_0), \sigma|_{\mathfrak{h}R} = \bar{\sigma}\} \cong \mathrm{Ad}N(H_0)/\mathrm{Ad}H_0$.

通常在李群理论中外尔群定义为 W.

引理6　$\{\sigma \in O(\mathfrak{h}_R) \mid \sigma(\Pi) = \Pi\}$ 是 A_0 的子群.

定理7　设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧半单李代数，则

$$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0 \cong \{\sigma \in O(\mathfrak{h}_R) \mid \sigma(\Pi) = \Pi\}.$$

定理8　对于紧单李代数 $\mathfrak{g}_0$，外自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}_0/\mathrm{Ad}\mathfrak{g}_0$ 如下：

1° A_l 为 2 阶群 $\{\mathrm{id}, (1, l)(2, l-1)\ldots\}$；

2° $D_l, l > 4$ 为 2 阶群 $\{\mathrm{id}, (l, l-1)\}$；

3° D_4 为 S_3(1,3,4 的置换群)；

4° E_6 为 2 阶群 $\{id, (1,5)(2,4)\}$；

5° 其余紧单李代数的外自同构群为单位.

推论1　除 A_l, D_l 与 E_6 外其余紧单李代数的自同构均为内自同构.

单李代数的外尔群与外自同构群如表 4-1 所示.

表 4-1

李代数	W 的阶	W 的结构	外自同构群
A_{l+1}	$(l+1)!$	S_{l+1}	$[Z/(2Z)(l \geqslant 2)]$
B_l, C_l	$2^l l!$	$[Z/(2Z)]^l \propto S$	1
D_l	$2^{l-1} l!$	$[Z/(2Z)]^{l-1} \propto S_l$	$\begin{cases} S_3, & l = 4; \\ Z/(2Z), & l > 4. \end{cases}$
E_6	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$		$Z/(2Z)$
E_7	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$		1
E_8	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$		1
F_4	$2^7 \cdot 3^2$		1
G_2	$2^3 \cdot 3$	$\mathfrak{D}_6$	1

4.3 外尔胞与扩大的外尔群

设 H_0 是连通紧半单李群 G_0 的嘉当子群，$\mathrm{Lie}H_0 = \mathfrak{h}_0$. 若 $X_0 \in \mathfrak{h}_0$，则当且仅当下式成立时，$\exp X_0$ 正则：

$$X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta}\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{h}_\alpha{}^k,$$

其中

$$\mathfrak{h}_\alpha{}^k = \{x_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, X_0) = 2k\sqrt{-1}\pi\}.$$

定义1 $\mathfrak{h}_0$ 中开子集

$$\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta}\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{h}_\alpha{}^k (\subset \mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{h}_\alpha)$$

的连通分支称为外尔胞.

引理7 设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧单李代数. $\mathfrak{h}_0$ 为其嘉当子代数. 对应根系，素根系记为 $\Delta, \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$. φ 为最高根，则集合

$$S_\Pi = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha_i, \sqrt{-1}X_0) > 0, 1 \leqslant i \leqslant l, (\varphi, \sqrt{-1}X_0) < 2\pi\}$$

是一个外尔胞，它是一个 l 维单形，且是 Ω_Π(由 Π 决定的外尔房) 中唯一以原点为顶点的外尔胞.

$\mathfrak{h}_0$ 是欧几里德空间. W 是刚体运动群中子群. 再考虑平移运动的子群.

设 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ 是 l 个整数，则有唯一的 $H_{k_1\cdots k_l} \in \mathfrak{h}_0$，使得

$$(H_{k_1\cdots k_l}, \alpha_i) = 2k_i\sqrt{-1}\pi, \quad 1 \leqslant i \leqslant l$$

对每个 $H_{k_1\cdots k_l}$ 可在 $\mathfrak{h}_0$ 中定义一个平移

$$\tau_{k_1\cdots k_l}: X_0 \to X_0 + H_{k_1\cdots k_l}.$$

定义2 由 $\mathfrak{g}_0$ 的外尔群 $W_{\mathfrak{g}0}$ 与所有平移 $\tau_{k_1\cdots k_l}$ 生成的群 $W_{\mathfrak{g}0}{}^*$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的扩大 Weyl 群.

引理8 对任一 $w^* \in W_{\mathfrak{g}0}{}^*$，均有 $\omega \in W_{\mathfrak{g}0}$，使得

$$\mathrm{Adexp}w^*(H_0) = \mathrm{Adexp}w(H_0), \forall H_0 \in \mathfrak{h}_0.$$

引理9 对任何 $\alpha \in \Delta, k \in Z$，有 $w_\alpha{}^k \in W_{G_0}{}^*$.

定理9 $W_{\mathfrak{g}0}{}^*$ 将外尔胞变为外尔胞，而且 $\mathfrak{h}_0$ 的外尔胞在 $W_{\mathfrak{g}0}{}^*$ 作用下可递.

4.4 紧李代数的复表示

以下几节将讨论紧李群的复表示与实表示. 前面已知，对紧李群 G_0 的任一表示(ρ, V)，V 有$\rho(G_0)$ 不变的内积. 因而 $\rho(G_0) \subseteq O(V)$ 或 $\rho(G_0) \subseteq U(V)$. 由此还知 G_0 的表示是完全可约的.

如果(ρ, V) 是 G_0 的一个表示，则$(\mathrm{d}\rho, V)$ 是 G_0 的李代数 $\mathrm{Lie}G_0 = \mathfrak{g}_0$ 的一个表

示，仍记为(ρ, V).

如果 G_0 有两个表示(ρ_1, V_1)，(ρ_2, V_2)（V_i 基域相同），那么可定义一个新表示$(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 如下：

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g), g \in G_0.$$

这个表示称为(ρ_1, V_1) 与(ρ_2, V_2) 的克罗内克（张量）积.

$(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$对应于$\mathfrak{g}_0$的表示$(d(\rho_1 \otimes \rho_2), V_1 \times V_2)$称为$\mathfrak{g}_0$的表示$(\rho_1, V_1)$ 与(ρ_2, V_2) 的克罗内克（张量）积. 仍将 $d(\rho_1 \otimes \rho_2)$ 记为 $\rho_1 \otimes \rho_2$，则

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(x) = \mathrm{id}V_1 \otimes \rho_2(x) + \rho_1(x) \otimes id_{V_2}, \forall x \in \mathfrak{g}_0.$$

类似地，可以定义多个表示的克罗内克积.

如果(ρ, V) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示，自然，它也是 $\mathfrak{g}_0$ 的复化 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0{}^c$ 的复表示，且有相同的可约性. 反之，若(ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的复表示，自然 ρ 限制在 $\mathfrak{g}_0$，就是 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示. 当然也有相同的可约性. 于是实李代数的复表示论问题就变成了其复化的复表示论的问题.

设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数，$\mathfrak{h}_0$ 是一嘉当子代数. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0{}^c$，$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0{}^c$，于是有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

特别，$\mathfrak{h}_0 = C(\mathfrak{g}_0) + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_R$，$\mathfrak{h}_R$ 是由 Δ 张成的实线性空间.

定义 3　如果

$$\frac{2(\varphi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}, \quad \forall \alpha \in \Delta,$$

则 $\varphi \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 称为整向量；若还满足

$$\frac{2(\varphi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geqslant 0, \quad \forall \alpha \in \Delta^+,$$

则$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中整向量 φ 称为**强整向量**.

例如，$\alpha \in \Delta$，α 是整向量，最高根 φ_0 是强整向量.

定理 10　设 Π 为素根系，W 为外尔群，$\varphi \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$，则有

1° 当且仅当$\dfrac{2(\varphi, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbf{Z}$，$\forall \alpha_i \in \Pi$ 时，φ 是整向量；

2° φ 是整向量，则对任何 $w \in W$，$w(\varphi)$ 亦为整向量；

3° 当且仅当$\dfrac{2(\varphi, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geqslant 0$，$\forall \alpha_i \in \Pi$ 时，整向量 φ 是强整向量.

下面来讨论复表示. 设 G_0 是实连通紧李群，$\mathfrak{g}_0$ = 李 G_0，H_0 是 G_0 的嘉当子代数，$\mathfrak{h}_0$ = 李 $H_0(\rho, V)$ 是复表示. 于是 V 上有不变内积. 故 $\rho(g) \in U(V)$. 因而可以对角化，即

$$\rho(g) = \mathrm{diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \cdots, e^{\mu_N}), \quad N = \dim V.$$

其中对角元素 $|e^{\mu_i}| = 1$，即 μ_i 是纯虚数或 0.

对应于 $\mathfrak{g}_0$ 的表示，$\rho(x_0)$ 是斜埃尔米特(Hermite)矩阵，也可对角化. $\mathfrak{h}_0$ 可交换，故可同时对角化.

$$\rho(x_0) = \mathrm{diag}(\mu_1(x_0),\cdots,\mu_N(x_0)), x_0 \in \mathfrak{h}_0$$

$\mu_i(x_0)$ 是纯虚数.故 μ_i 是 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上的实线性函数.因而用 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c$ 上的不变非退化对称双线性形,可将 μ_i 嵌入 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中,仍以 μ_i 表示之.由此讨论,得到

$$V = \sum_{\mu\in\Phi} V_\mu,$$

其中 $V_\mu = \{v \in V \mid \rho(x_0)v = (\mu, x_0)v, \forall x_0 \in \mathfrak{h}_0\}$.

定义 4 V 中非零向量 v,若满足

$$\rho(x_0)v = (\mu, x_0)v, \forall x_0 \in \mathfrak{h}_0,$$

则称 v 是属于权 μ 的权向量. V_μ 称为权子空间. $\dim V_\mu$ 称为权 μ 的重数.所有权的集合 Φ 称为权系.有时 μ 不是权,也可记作 $\dim V_\mu = 0$.

定理 11 (ρ, V) 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示. $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当子代数.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^c = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha, \quad V = \sum_{\mu\in\Phi} V_\mu.$$

$\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 是外尔基.则有

1° $\rho(e_\alpha)V_\mu \subseteq V_{\alpha+\mu}, \forall \alpha \in \Delta, \mu \in \Phi$;

2° $\alpha \in \Delta, \mu \in \Phi$, μ 关于 α 的权链为

$$\mu - p\alpha, \cdots \mu - \alpha, \mu, \mu + \alpha, \cdots, \mu + q\alpha.$$

即 $\mu + k\alpha \in \Phi$, $-p \leqslant k \leqslant q$,而 $\mu - (p+1)\alpha, \mu + (q+1)\alpha \bar{\in} \Phi$,则有

$$\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = p - q;$$

3° 权系 Φ 在外尔群 W 作用下不变.

推论 2 任何权都是整向量.

定义 5 设 Φ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的表示 (ρ, V) 的权系.如果 $\lambda \in \Phi$,满足

$$\lambda + \alpha \bar{\in} \Phi, \quad \forall \alpha \in \Delta^+,$$

则称为最高权.

一个表示的最高权 λ,必为强整向量.

定理 12 设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示. Φ 为权系. λ 为一最高权.则有下面的结果:

1° $\forall \mu \in \Phi$,则有 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s} \in \Pi$,使

$$\lambda, \lambda - \alpha_{i_s}, \cdots, \lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_s} = \mu \in \Phi;$$

2° $\forall \mu \in \Phi, \mu \leqslant \lambda$;

3° (ρ, V) 的最高权唯一;

4° $\dim V_\lambda = 1$.

定理 13 设 (ρ_i, V_i), $i = 1,2$ 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的两个不可约复表示, Φ_i, λ_i 是它们的权系与最高权.则下面三个条件等价:

1° (ρ_1, V_1) 与 (ρ_2, V_2) 等价,记为 $\rho_1 \sim \rho_2$;

2° $\Phi_1 = \Phi_2$;

3° $\lambda_1 = \lambda_2$.

定理 14　设(ρ_i, V_i)，$i = 1,2$，是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的两个表示，Φ_i 是(ρ_i, V_i)的权系. 则有

1° $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$ 的权系为

$$\Phi = \{\mu_1 + \mu_2 \mid \mu_i \in \Phi_i\} = \Phi_1 + \Phi_2;$$

2° 若(ρ_i, V_i)不可约，则$(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$中有一个不可约子表示其最高权为 $\lambda_1 + \lambda_2$，其中 λ_i 是(ρ_i, V_i)的最高权.

定义 6　设 $\mathfrak{h}_0$ 是紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的嘉当子代数，Δ，Π 是根系与素根系. 满足

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij} \quad j = 1,2,\cdots,l, \alpha_j \in \Pi$$

的强整向量叫第 i 个基本强整向量.

以 λ_i 为最高权的不可约复表示(ρ_i, V_i)在等价的意义下存在唯一，称为第 i 个基本表示.

由此，对任一强整向量 λ，有

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} n_i\lambda_i, \quad n_i = \frac{2(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)},$$

它是表示

$$\underbrace{\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1}_{n_l} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\rho l \otimes \cdots \otimes \rho l}_{n_l}$$

的一个不可约子表示(ρ, V)的最高权.

例 1　SU(2) 的李代数 su(2) 的复化 sl(2) 有基

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

而且

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_+] = 2\boldsymbol{e}_+, [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_-] = -2\boldsymbol{e}_-, [\boldsymbol{e}_+, \boldsymbol{e}_-] = \boldsymbol{\alpha}.$$

$\boldsymbol{\mu} \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 为整向量，则 $\boldsymbol{\mu} = k\boldsymbol{\alpha}$，且 k 为整数或半整数.

$\boldsymbol{\lambda} \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 为强整向量，则 $\boldsymbol{\lambda} = k\boldsymbol{\alpha}$，$k \geq 0$. k 为整数或半整数.

λ 为 su(2) 不可约表示(ρ, V)的最高权，则权系为：

$$\Phi = \{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\alpha}, \cdots, -\boldsymbol{\lambda}\}.$$

显然 $\dim V_{\lambda - h\alpha} = 1$，于是 $\dim V = 2k + 1$. $\rho(\alpha)$ 的特征根 $2k, 2k-2, \cdots, -2k$.

现在继续一般性的讨论.

$\mathfrak{g}_0$ 为紧半单李代数. $\mathfrak{h}_0$ 为其嘉当子代数. Δ，Π 为根系与素根系. (ρ, V) 为它的不可约复表示. Φ 为权系，λ 为最高权.

$\mu \in \Phi$，则有 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{is} \in \Pi$，使

$$\lambda, \lambda - \alpha_{i_1}, \cdots, \lambda - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_s} = \mu \in \Phi.$$

此时称 μ 为 s 层权. 以 Δ^s 记 Φ 中所有 s 层权. 则有

$$\Phi = \Delta^0 \cup \Delta^1 \cup \cdots \cup \Delta^{T(\rho)}.$$

称 $T(\rho)$ 为 (ρ, V) 的高度.

定理 15　$\mathfrak{g}_0$ 紧半单, $\mathfrak{h}_0$ 为其嘉当子代数, Δ, Π 为根系与素根系. $h = \sum m_i \alpha_i \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 满足

$$(h, \alpha_i) = 2.$$

又若 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约复表示, λ 为最高权, 则有

$$T(\rho) = (\lambda, h).$$

定义 7　当高度 $T(\rho)$ 为偶数时, (ρ, V) 称为偶型表示. $T(\rho)$ 为奇数时, (ρ, V) 称为奇型表示.

例 2　对 $\mathrm{su}(2)$, (ρ, V) 最高权为 $k\alpha$ 时, 有 $h = \alpha$,

$$T(\rho) = 2k.$$

因而 $k \in \mathbf{Z}$, 为偶型表示, 此时 $0 \in \Phi$. k 为半整数, 为奇型表示, 此时 $0 \bar{\in} \Phi$.

推论 3　$\mu \in \Phi, \mu = \sum_{i=1}^{l} q_i \alpha_i$, 则

$$\delta(\mu) = 2\sum_{i=1}^{l} q_i \equiv T(\rho) \pmod 2$$

4.5　对偶表示

设 V 是域 F 上的线性空间, $\dim V = n$, 则 V 上所有线性函数(即 V 到 F 的线性映集)构成一个 n 维线性空间 V^*, 称为 V 的对偶空间.

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为其对偶基:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

若 A 是 V 上线性变换, 则由

$$(\mathscr{A}^* f)(v) = -f(\mathfrak{A}v), \quad \forall f \in V^*, v \in V$$

定义了 V^* 上的线性变换 $\mathscr{A}^*$, 满足

1° $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

2° $(\alpha\mathscr{A})^* = \alpha\mathscr{A}^*, \forall \alpha \in F$;

3° $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = -\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$;

4° $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]^* = [\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*]$;

5° 若 $\mathscr{A}$ 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 $\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{A}^*$ 在相应的对偶基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵为 $-A'$(A' 表示 A 的转置).

定义 8　设 (ρ, V) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 则由

$$\rho^*(x) = \rho(x)^*, \forall x \in \mathfrak{g}$$

也得到 $\mathfrak{g}$ 的一个表示 (ρ^*, V^*). 称为 (ρ, V) 的对偶表示.

(ρ^*, V^*) 与 (ρ, V) 有相同的可约性.

定理 16　设 (ρ, V) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，其对偶表示为 (ρ^*, V^*). 则 ρ 与 ρ^* 等价的充分必要条件是 V 上存在非退化的不变双线性函数.

定理 17　设 (ρ, V) 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 则

1° V 上非零的不变双线性函数 f 一定非退化；因之 (ρ, V) 与 (ρ^*, V^*) 等价的充要条件是 V 上有不变双线性函数 $f \neq 0$；

2° 当 V 的基域代数封闭时，V 上其他任何不变双线性函数 F 与 f 差一常数倍，即 $F = cf$，c 为常数；

3° 当 V 的基域代数封闭时，f 对称或者反对称.

定理 18　设 (ρ, V) 是紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复表示，(ρ^*, V^*) 为其对偶表示. Φ、Φ^* 分别为 (ρ, V)，(ρ^*, V^*) 的权系. 则

1° $\Phi^* = -\Phi$.

2° 当 (ρ, V) 不可约，λ 为最高权时，则下面三个条件等价：

(1)　(ρ, V) 与 (ρ^*, V^*) 等价；

(2)　V 上有非零不变双线性函数 f；

(3)　$-\lambda$ 为 Φ 的最低权.

而且，此时若 f 对称，则 $T(\rho)$ 为偶数；若 f 反对称，则 $T(\rho)$ 为奇数.

定理 19　设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧单李代数. (X_0, Y_0) 是 $\mathfrak{g}_0$ 上不变内积，$B(X_0, Y_0)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的基灵型，则

$$(X_0, Y_0) = cB(X_0, Y_0),$$

其中 $c < 0$，为常数.

4.6　紧李群复表示的表示函数与特征标

设 G_0 是实连通紧李群，$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ 是 G_0 的莫雷尔 - 嘉当形式，于是

$$\lambda_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$$

对任何常数 λ_0 是不变 n 次微分形式，在 G_0 上可定义不变积分，可选 λ_0 使得

$$\int_{G_0} \lambda_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = 1.$$

记

$$\mathrm{d}g = \dot{G}_0 = \lambda_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

定理 20　G_0 上平方可积的复值函数集合 $L^2(G_0)$ 是无限维复线性空间，其中可引进内积：$\forall f_1, f_2 \in L^2(G_0)$，

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G_0} f_1(g) \overline{f_2(g)} \mathrm{d}g.$$

若把几乎处处相等的函数视为同一函数，则 $L^2(G_0)$ 为内积空间，并对范数 $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ 为希尔伯特空间.

定义 9　设 (ρ, V) 是 G_0 的复表示. 则在 V 中有对 $\rho(G_0)$ 不变的内积. 对此内积

有 V 的标准正交基.在此基下,$\forall g \in G, \rho(g)$ 有矩阵表示

$$\rho(g) = (\rho_{ij}(g)) \in U(V),$$

$\rho_{ij}(g)$ 称为(ρ, V) 的**表示函数**,而

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\rho(g) = \sum_i \rho_{ii}(g)$$

称为(ρ, V) 的特征标.

定理21(彼得-外尔)　以 P 表示实连通紧李群 G_0 的所有不等价不可约复表示的集合,则

$$\{\sqrt{1/m}\rho_{ij} \mid \rho \in P, m \text{ 为}\rho\text{ 的维数}\}$$

为 $L^2(G_0)$ 的一组标准正交基.

定义 10　$F \in L^2(G_0)$,如果满足

$$F(gg_0g^{-1}) = F(g_0), \quad \forall g, g_0 \in G_0,$$

则称为 G_0 上的类函数,以 $L_0^2(G_0)$ 表示 $L^2(G_0)$ 中的类函数的集合.

定理 22　以 χ_ρ 表示实连通紧李 G_0 的表示(ρ, V) 的特征标,则有

1° $\chi_\rho \in L_0^2(G_0)$;

2° $\chi_{\rho_1+\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$;

3° $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$;

4° 当且仅当 $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$ 时,ρ_1 与 ρ_2 等价.

5° 若

$$\rho = \rho_1^{(1)} + \cdots + \rho_{n_1}^{(1)} + \cdots + \rho_1^{(t)} + \cdots + \rho_{n_t}^{(t)},$$

其中 $\rho_j^{(i)}$ 为 G_0 的不可约复表示,且上标相同的等价,上标不同的不等价,则

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{t} n_i^2.$$

推论 4　G_0 的复表示(ρ, V) 中包含与不可约复表示$(\rho 0, V_0)$ 等价的子表示的个数为 n_0,则

$$n_0 = < \chi_\rho, \chi_{\rho_0} >.$$

推论 5　当且仅当 $< \chi_\rho, \chi_\rho > = 1$ 时,(ρ, V) 不可约.

定理 23　P 为实连通紧李群 G_0 的所有不等价的复不可约表示的集合,则 $\{X_\rho \mid \rho \in P\}$ 构成 $L_0^2(G_0)$ 的一组标准正交基.因而 $L_0^2(G_0)$ 亦为希尔伯特空间.

定理 24　设 G_1, G_2 为实连通紧李群.(ρ_1, V_1),(ρ_2, V_2) 分别为它们的不可约复表示.　$G_0 = G_1 \otimes G_2$(直积).则由

$$\rho(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$$

定义了 G_0 的不可约复表示$(\rho, V_1 \otimes V_2)$.

反之,G_0 的任一不可约复表(ρ, V) 均等价于这样一个表示.

定理 25　n 维实环面 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的任一不可约复表示(ρ, V) 都是一维的,且有

$$\rho(x_1, \cdots, x_n) = e^{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{n} k_i x_i, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbf{Z}$,且为 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的全系不变量.

4.7　$L_0^2(G_0)$ 的积分运算

实连通紧李群 G_0 的任何复表示(ρ,V)的特征标 $\chi_\rho\in L_0^2(G_0)$. 又知 G_0 的任一元素都与 G_0 的一个固定的嘉当子群中某一元素共轭. 因此类函数实际上就是嘉当子群上的函数.

引理 10　设 H_0 是 G_0 的一个嘉当子群. 则由

$$\psi(gH_0,h)=ghg^{-1},\forall g\in G_0,h\in H_0$$

定义了$\frac{G_0}{H_0}\times H_0$ 到 G_0 上的单值解析映射. 而且对 $f\in L_0^2(G)$,有

$$f^\psi(gH_0,h)=f(\psi(gH_0,h))=f(h).$$

引理 11　设 g_0 是 G_0 中正则元素,又 $g_1\in G_0,h_1\in H_0$,使得 $g_0=g_1h_1g_1^{-1}$,则有

1° $\psi^{-1}(gl_0)=\{(glaH_0,a^{-1}h_1a\mid a\in N(H_0)\}$;

2° $|\psi^{-1}(g_0)|=|W_{G_0}|$. W_{G_0} 是 G_0 的外尔群;

3° 对 g_0 的某个邻域 U,ψ 是 U 的覆盖映射,覆盖叶数为 $|W_{G_0}|$.

引理 12　设 $f\in L_0^2(G_0)$,以 $\dot{G}_0,\dot{\frac{G_0}{H_0}},\dot{H}_0$ 分别表示 $G_0,\frac{G_0}{H_0},H_0$上的体积元. ψ^* 表示由 ψ 诱导的 G_0 的微分形式到$\frac{G_0}{H_0}\times H_0$ 的微分形式的映射. 则有

$$\int_{G_0}f(g)\dot{G}_0=\frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{\frac{G_0}{H_0}\times H_0}f(h)\psi^*\dot{G}_0.$$

为了计算 $\psi^*\dot{G}_0$,需要计算 ψ 的雅可比, $\det(\mathrm{d}\psi)=\Delta$.

引理 13　局部解析同胚 ψ 的雅可比为

$$\Delta(\exp A_0)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}|e^{(\frac{\alpha}{2},A_0)}-e^{(\frac{-\alpha}{2},A_0)}|^2,\quad A_0\in\mathfrak{g}_0.$$

定理 26　$f\in L_0^2(G_0)$,则有

$$\int_{G_0}f(g)\dot{G}_0=\frac{1}{|W_{G_0}|}\int_{\dot{H}_0}f(h)\Delta(h)\dot{H}_0.$$

推论 6　$\int_{H_0}\Delta(h)\mathrm{d}h=|W_{G_0}|$.

4.8　特征标公式

设 G_0 为实连通紧半单李群. H_0 是嘉当子群. $\mathfrak{g}_0,\mathfrak{h}_0$ 分别为 G_0,H_0 的李代数. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0^c,\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0^c$. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 分解的根系为 Δ,素根系为 Π,以 W_{G_0} 表示外尔群, $w\in W_{G_0}$ 是

$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 上正交变换，当然也可看成 $\mathfrak{h}_0$ 上的正交变换.

设 Λ 为$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中所有整向量的集合. 又设 $\lambda_1\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 为基本强整向量，则有

$$\Lambda = \left\{\sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \mid m_i \in \mathbf{Z}\right\}.$$

且

$$\omega\Lambda = \Lambda, \quad \forall\, \omega \in W_{G_0}.$$

再设

$$\widehat{\Gamma}_0 = \{x_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\mu, x_0) \equiv 0(\mathrm{mod}2\pi\sqrt{-1}), \mu \in \Lambda\}.$$

引理 14　$\widehat{\Gamma}_0 = \left\{\sum_{i=1}^{l} n_i \dfrac{4\pi\sqrt{-1}}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i \mid n_i \in \mathbf{Z}\right\}$;

$$\Lambda = \{\mu \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}_0 \mid (\mu, x_0) \equiv 0(\mathrm{mod}2\pi\sqrt{-1}), \forall\, x_0 \in \widehat{\Gamma}_0\}.$$

引理 15　令 $\widehat{H}_0 = \dfrac{\mathfrak{h}_0}{\widehat{\Gamma}_0}$，则 $\widehat{H}_0$ 为环面，它的不可约复表示为

$$X_0 \to \mathrm{e}^{(\mu, X_0)}, \quad X_0 \in \frac{\mathfrak{h}_0}{\widehat{\Gamma}_0}, \quad \mu \in \Lambda;$$

因而

$$\int_{\widehat{H}_0} \mathrm{e}^{(\mu, X_0)}\overline{\mathrm{e}^{(\mu', X_0)}}\widehat{H}_0 = \begin{cases} 0, & \mu \neq \mu'; \\ 1, & \mu = \mu'. \end{cases}$$

引理 16　任取 $\delta \in \Lambda$，记

$$f_\delta(X_0) = \sum_{w \in W_{G_0}} (\mathrm{sign}w)\mathrm{e}^{(w(\delta), X_0)} \quad X_0 \in \mathfrak{h}_0,$$

则有

1° $f_\delta(wX_0) = \mathrm{sign}w f_\delta(X_0)$;

2° $f_{w(\delta)}(X_0) = \mathrm{sign}w f_\delta(X_0)$;

3° $f_\delta(\sqrt{-1}\delta') = f_{\delta'}(\sqrt{-1}\delta)$;

4° $\delta, \delta' \in \Lambda, \delta' \overline{\in} \{w(\delta) \mid \omega \in W_{G_0}\}$，则

$$\int_{\widehat{H}_0} f_\delta(X_0)\overline{f_{\delta'}(X_0)}\widehat{H}_0 = 0.$$

引理 17　令 $\beta = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$，则 $\beta \in \Lambda$，而且

$$\beta = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l.$$

又 $w \in W_{G_0}$，使得当且仅当 $w = \mathrm{id}$ 时，$w\beta = \beta$.

引理 18　令 $\theta(A_0) = \prod\limits_{\alpha \in \Delta} (\mathrm{e}^{(\frac{\alpha}{2}, A_0)} - \mathrm{e}^{-(\frac{\alpha}{2}, A_0)})$，则

$$f_\beta(A_0) = \theta(A_0).$$

现设(ρ, V)是G_0的不可约复表示．χ_ρ为其特征标．又$(\mathrm{d}\rho, V) = (\rho, V)$是$\mathfrak{g}_0$的不可约复表示，权系为$\Phi$，最高权为$\lambda$．又有

$$V = \sum_{\mu \in \Phi} V_\mu.$$

对$X_0 \in \mathfrak{h}_0$，有

$$\chi_\rho(\exp X_0) = \sum_{\mu \in \Phi} \dim V_\mu \cdot e^{(\mu, X_0)}.$$

引理 19　对$w \in WG_0$，则有

$$\dim V_{w(\mu)} = \dim V_\mu,$$

从而

$$\chi_\rho(\exp wX_0) = \chi_\rho(\exp X_0).$$

引理 20　设λ是不可约复表示$(\mathrm{d}\rho, V)$的最高权，则

$$w(\beta + \lambda) < \beta + \lambda \quad w \neq \mathrm{id}, w \in WG_0.$$

从而

$$|\{w(\beta + \lambda) \mid w \in WG_0\}| = |WG_0|.$$

定理 27　设(ρ, V)是实连通紧李群G_0的不可约复表示．χ_ρ是特征标．$(\mathrm{d}\rho, V)$为相应的$\mathfrak{g}_0$的不可约复表示．Φ为权系，λ为最高权．有

特征标公式　$$\chi_\rho(\exp x_0) = \frac{f_{\delta+\lambda}(x_0)}{f_\beta(x_0)},$$

维数公式　$$\dim V = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(\beta + \lambda, \alpha)}{(\beta, \alpha)}.$$

现在来讨论反问题，即给定一个强整向量λ，在什么条件下

$$\frac{f_{\lambda+\beta}(X_0)}{f_\beta(X_0)}$$

是由G_0的一不可约复表示的特征标得来的．

令
$$\Gamma_0 = \{x_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid \exp x_0 = e\}.$$

$$\widetilde{\Gamma}_0 = \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid \mathrm{Ap}\exp X_0 = \mathrm{id}\}.$$

则

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma} &= \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha, X_0) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2\pi\sqrt{-1}), \alpha \in \Delta\} \\ &= \{X_0 \in \mathfrak{h}_0 \mid (\alpha_i, X_0) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2\pi\sqrt{-1}), \alpha_i \in \Pi\}.\end{aligned}$$

自然有$\Gamma_0 \subseteq \widetilde{\Gamma}_0$.

引理 21　Γ_0如上，Λ为整向量集．令

$$\Lambda_0 = \{\mu \in \Lambda \mid (\mu, A_0) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2\pi\sqrt{-1}), \forall A_0 \in \Gamma_0\}.$$

又设WG_0为外尔群．则$\forall w \in W_{G_0}, A_0 \in \Gamma_0, \mu \in \Lambda_0$有

$$wA_0 \in \Lambda_0, w(\mu) \in \Lambda_0, \alpha \in \Lambda_0.$$

定理 28　对于强整向量λ，有G_0的不可约复表示(ρ, V)使$(\mathrm{d}\rho, V)$的最高权为

λ 的充分必要条件是

$$(\lambda, A_0) \equiv 0(\bmod 2\pi\sqrt{-1}), \forall A_0 \in \Lambda_0.$$

4.9 实紧李群的实表示

定义 11 复线性空间 L 上的一一对应 σ 如果适合:

1° $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), \forall x, y \in L$;

2° $\sigma(\alpha x) = \bar{\alpha}\sigma(x), \forall \alpha \in C, x \in L$;

3° $\sigma^2 = \mathrm{id}_L$,

则 σ 称为半对合.

引理 22 复线性空间 L 的半对合 σ 与 L 的实形式 $L_0 = \{x \in L \mid \sigma(x) = x\}$ 间有一一对应关系,且

$$\sigma(a + \sqrt{-1}b) = a - \sqrt{-1}b, \quad \forall a, b \in L_0.$$

引理 23 设 $L = L_0^c$, A 是 L 上的线性变换, σ 是 L_0 对应的半对合. 则当且仅当

$$\sigma\mathscr{A} = \mathscr{A}\sigma$$

时, $\mathscr{A}|_{L_0}$ 是 L_0 的线性变换.

引理 24 $L = L_0^c$, 对应的半对合为 σ, 则当且仅当有 $J \in \mathrm{gl}(L_0)$, 使 $J^2 = -\mathrm{id}$, 且有

$$L_1 = \{a + \sqrt{-1}J(a) \mid \forall a \in L_0\}.$$

时, L 有复子空间分解

$$L = L_1 + \sigma(L_1), \quad L_1 \cap \sigma(L_1) = 0.$$

(ρ_0, V_0) 是连通实紧李群 G_0 的实表示 (ρ_0, V_0). 设 $V = V_0^c$, 于是 $\rho_0(g)$ 可自然地开拓到 V 上. 于是得到 G_0 的一个复表示 (ρ, V). 如果 V_0 相应的半对合为 σ, 则有

$$\rho(g)\sigma = \sigma\rho(g), \forall g \in G_0,$$

这时称 (ρ, V) 是 (ρ_0, V_0) 的复化.

引理 25 设 (ρ, V) 是 G_0 的一个复表示. 又 V 有实形式 V_0, 对应的半对合为 σ, 则当且仅当

$$\rho_0(g) = \rho(g), \rho(g)\cdot\sigma = \sigma\cdot\rho(g) \quad g \in G_0$$

时, (ρ, V) 是 G_0 的实表示 (ρ_0, V_0) 的复化.

定义 12 实连通紧李群 G_0 的不可约实表示 (ρ_0, V_0) 若其复化 (ρ, V) 不可约, 则称为第一类, 否则称为第二类.

定理 29 设 (ρ, V) 是实连通紧李群 G_0 的不可约复表示, 则下面三个条件等价:

1° (ρ, V) 是 G_0 的一个第一类不可约实表示 (ρ_0, V_0) 的复化;

2° 在 V 中存在 $\rho(G_0)$ 不变的非退化对称双线性函数;

3° $(d\rho, V)$ 与其对偶表示 $(d\rho^*, V^*)$ 等价, 且 $(d\rho, V)$ 的高度 $T(d\rho) \equiv 0(\bmod 2)$, 即 $(d\rho, V)$ 为偶型表示.

定理 30　设(ρ_0, V_0)为实连通紧李群 G_0 的不可约实表示.(ρ, V)为其复化.σ 为 V 对应 V_0 的半对合,则下面条件等价:

1° (ρ_0, V_0)是第二类的;

2° V 中有极小不变子空间 V_1,使得

$$V = V_1 \dotplus \sigma(V_1)$$

且 $\sigma(V_1)$ 亦为极小不变子空间;

3° 有 V_0 中线性变换 J,满足:

$$J^2 = -\mathrm{id}_V,$$

$$\rho(g)J = J\rho(g), \quad \forall g \in G_0.$$

推论 7　记$(\rho_1, V_1) = (\rho|_{V_1}, V_1)$,$(\rho_1, \sigma V_1) = (\rho|_{\sigma V_1}, \sigma V_1)$,则$(\mathrm{d}\rho_1, \sigma V_1)$与$(\mathrm{d}\rho_1, V_2)$的对偶表示等价.

设(ρ, V)是李群 G 的表示.V^* 是 V 的对偶空间.设 $f \in V^*$,$g \in G$,定义

$$(\rho(g)^* f)(v) = f(\rho(g)^{-1}v),$$

则

$$\rho^*: g \to \rho(g)^*$$

是 G 到 $GL(V^*)$ 中的同态,故(ρ^*, V^*)是 G 的表示.显然,$(\mathrm{d}\rho, V)$是李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ 的表示$(\mathrm{d}\rho, V)$的对偶表示.反之亦然.

引理 26　设(ρ_A, V_1)是实连通紧李群 G_0 的复表示,(ρ_1^*, V_1^*)是(ρ_1, V_1)的对偶表示.而

$$(\rho, V) = (\rho_1 \dotplus \rho_1^*, V_1 \dotplus V_1^*),$$

则有 G_0 的实表示(ρ_0, V_0)其复化为(ρ, V).

定理 31　设(ρ, V)为实连通紧李群 G_0 的不可约复表示,则它是 G_0 的一个第二类不可约实表示(ρ_0, V_0)的复化的不可约子表示的必要充分条件是:在 V 上不存在 $\rho(G_0)$ 不变的非异复对称双线性函数.

推论 8　G_0 的任一不可约复表示(ρ, V)要么是 G_0 的第一类不可约实表示的复化,要么是第二类不可约实表示的复化的一个不可约子表示.

定理 32　实连通紧李群 G_0 的两个不可约实表示(ρ_0, V_0),(ρ'_0, V_0')等价的充分必要条件是:它们的复化(ρ, V),(ρ', V')中有一个不可约子表示等价.

推论 9　实连通紧李群等价的不可约实表示,有相同的类型.

定理 33　设(ρ_0, V_0)与(ρ_0', V_0')为实连通紧李群 G_0 的两个等价的不可约实表示.(v, u),$(v', u')'$ 分别为 V_0,V_0' 上不变内积,则存在 V_0 到 V'_0 上的线性同构 $\mathscr{A}$,使得

$$\rho_0(g)\mathscr{A} = \mathscr{A}\rho_0(g), \quad \forall g \in G_0$$

$$(\mathscr{A}v, \mathscr{A}u) = (v, u), \quad v, u \in V_0.$$

·近代数学卷·

第 7 篇

泛函分析

编　者　童裕孙
审校者　陈晓漫

目 录

引　言

泛函分析是从变分法、积分方程、微分方程、逼近论和理论物理的研究中发展起来的一门数学分支,它综合地运用分析、代数、几何的方法,研究无限维线性拓扑空间和这类空间上各种映射的性质.

泛函分析在 20 世纪的产生和发展,主要受到两个因素的影响.一方面,19 世纪以来数学的进一步抽象化与公理化为泛函分析的产生提供了理论基础.当时,用统一的观点来理解数学各分支所积累的大量材料,不仅是必要的,而且是可能的.由于吸收了几何与代数的方法,不但把许多早期只是在特殊的分析学科里被孤立讨论过的问题联系起来,而且促进了抽象理论的形成.对泛函分析发展起重要作用的另一因素是量子物理学的要求.量子物理对泛函分析的意义,正如牛顿力学对微积分在 18 世纪的发生和发展所起的作用一样.例如,希尔伯特空间上自共轭算子的谱分析,正是 20 世纪 30 年代适应量子力学的需要而发展起来的.

现代泛函分析在几何、拓扑、微分方程、概率论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论等学科中都有重要的应用,它是建立群上调和分析的基础,又是研究有无限个自由度的物理系统的重要工具,它的观念和方法也已广泛地渗入许多工程技术学科之中.

1　距离线性空间

1.1　距离线性空间的基本概念

1.1.1　距离空间

(1) 距离空间　设 X 是非空集合,二元函数 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 满足 $\rho(x,y)=0$ 时,

1° 非负性:$\rho(x,y)\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$;

2° 三点不等式:$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$ 对 X 中任意三点 x,y,z 成立,则称 ρ 为 X 上的距离,称 (X,ρ)(简记为 X)为**距离空间**.

如果 ρ 是 X 上的距离,则它还自然满足对称性,即

3° $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 对 X 上任意两点 x,y 均成立.

(2) 收敛　称距离空间 X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0,或称点列 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限,是指

$$\rho(x_n,x_0)\to 0\quad(n\to\infty),$$

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

距离空间又称为度量空间,是一种特殊而常见的拓扑空间,也是泛函分析中最

重要的一类空间.

例1　E^n　n维欧几里德空间E^n中,对于$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2},$$

则(E^n,ρ)是一个距离空间.

例2　S　设S是复数列$\{x_i\}$全体所成的空间,对于$\boldsymbol{x}=\{x_i\}$,$\boldsymbol{y}=\{y_i\}$,规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},$$

则(S,ρ)是一个距离空间.

例3　$C^k[a,b]$　设k是非负整数,$C^k[a,b]$是$[a,b]$上具有k阶连续导函数的函数(当$k=0$时表示函数本身连续)全体.对于$x,y\in C^k[a,b]$,规定

$$\rho(x,y)=\max_{0\leqslant i\leqslant k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,$$

则$(C^k[a,b],\rho)$是一个距离空间,这个空间中点列的收敛就是前k阶导函数的一致收敛.

例4　$C^\infty[a,b]$　记$[a,b]$上无限次可微函数全体为$C^\infty[a,b]$,对$x,y\in C^\infty[a,b]$,规定

$$\rho(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{t\in[a,b]}\frac{|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|}{1+|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|},$$

则$(C^\infty[a,b],\rho)$是一个距离空间;这个空间中点列的收敛就是各阶导函数和函数列自身均为一致收敛.

例5　设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间,$E\in\mathbf{R}$,$\mu(E)<\infty$,S是E上可测函数全体,其中在E上几乎处处相等的函数视为同一点.对$x,y\in S$,令

$$\rho(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}\mu,$$

则(S,ρ)是一个距离空间,这个空间中点列的收敛就是函数列依测度收敛.

(3) 完备距离空间　设(X,ρ)是一个距离空间,$\{x_n\}$是X中的点列.如果对任何$\varepsilon>0$,存在自然数N,当$n,m\geqslant N$时$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$,则称$\{x_n\}$是一个基本点列.如果$(X,\rho)$中任何基本点列都是收敛点列,则称它是完备的距离空间.

例1至例5中出现的距离空间都是完备的.

(4) 等距同构　设(X,ρ_1),(Y,ρ_2)是两个距离空间;如果存在双射$\mathrm{T}:X\to Y$,使得对任何$x,y\in X$均有

$$\rho_1(x,y)=\rho_2(\mathrm{T}x,\mathrm{T}y),$$

则称(X,ρ_1)与(Y,ρ_2)等距同构.

(5) 距离空间完备化　对任何距离空间(X,ρ),存在一个完备的距离空间$(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$,使得$X$与$\widetilde{X}$中一个稠密子集等距同构.

1.1.2 距离线性空间

以下用 K 记实数域或复数域.

(1) 距离线性空间 数域 K 上的线性空间 X 称为**距离线性空间**,是指 X 同时又是距离空间,而且线性运算关于相应的距离 ρ 是连续的,即

1° $\rho(x_n,x)\to 0,\rho(y_n,y)\to 0$ 时 $\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0\quad(n\to\infty)$;

2° $\rho(x_n,x)\to 0,\alpha\in K$ 时 $\rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0\quad(n\to\infty)$;

3° $\alpha_n,\alpha\in K,\alpha_n\to\alpha,x\in K$ 时 $\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0(n\to\infty)$.

例 1 至例 5 出现的空间都是距离线性空间.

(2) 平移不变的距离 设在距离空间 X 中,对任何 $x,y,z\in X$ 均有

$$\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y),$$

则称这个距离 ρ 是平移不变的.

(3) 对于任何距离线性空间 (X,ρ),都能改赋一个新的平移不变的距离 ρ_1,使得距离线性空间 (X,ρ) 和 (X,ρ_1) 中的收敛性是一致的,即

$$\text{当且仅当 }\rho_1(x_n,x)\to 0\text{ 时},\rho(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty).$$

1.2 赋准范线性空间和赋范线性空间

1.2.1 赋准范线性空间

(1) 准范数和赋准范线性空间 设 X 是线性空间,$\|\cdot\|$ 是 X 上的函数,满足

1° $\|x\|\geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时,$\|x\|=0$;

2° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in X$;

3° $\|-x\|=\|x\|,\forall x\in X$;

4° $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0,\lim\limits_{x_n\to 0}\|\alpha x_n\|=0$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的**准范数**,$(X,\|\cdot\|)$ 为**赋准范线性空间**.

(2) 准范数的特征 设距离线性空间的距离 ρ 是平移不变的,令 $\|x\|=\rho(x,0)$,则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的准范数.反之,设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的准范数,规定 $\rho(x,y)=\|x-y\|$,则 ρ 是 X 上平移不变的距离.这就是说,具有平移不变距离的距离线性空间和赋准范线性空间是一致的.

(3) 弗雷歇空间(Fréchet 空间) 完备的赋准范线性空间称为**弗雷歇空间**.

例 1 至例 5 的空间按 $\|x\|=\rho(x,0)$ 均为弗雷歇空间.

例 6 $L^p(E)(1>p>0)$ 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间,$E\in\mathscr{R},\mu(E)<+\infty$. 记 E 上 p 次可积函数全体为 $L^p(E)$,它按通常的线性运算和 $\|x\|=\int_E|x(t)|^p\mathrm{d}\mu$ 为弗雷歇空间.

1.2.2 赋范线性空间

(1) 拟范数和范数 设 X 是数域 K 上的线性空间,$\|\cdot\|$ 是 X 上的函数,满足

1° $\|x\| \geqslant 0, \forall x \in X$;

2° $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$;

3° $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall \alpha \in K, x \in X$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的**拟范数**;如果 $\|\cdot\|$ 是 X 上的拟范数,且满足当且仅当 $x=0$ 时,$\|x\|=0$,则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的**范数**,称$(X, \|\cdot\|)$(简记为 X)为**赋范线性空间**.

(2) 范数的特征　设(X, ρ)是距离线性空间,规定 $\|x\| = \rho(x, 0)$,则 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数的充要条件是

1° ρ 是 X 上的平移不变距离;

2° $\rho(\alpha x, 0) = |\alpha| \rho(x, 0), \forall \alpha \in K, x \in X$;

(3) 巴拿赫空间　完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间**.

例 1 和例 3 的空间按 $\|x\| = \rho(x, 0)$ 都是巴拿赫空间.

例 7　$l^p(1 \leqslant p < +\infty)$　设 l^p 是满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty$ 的数列$\{x_i\}$全体,对 $x = \{x_n\} \in l^p$,规定 $\|x\| = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$,则 l^p 为巴拿赫空间.

例 8　l^∞　设 l^∞ 是有界数列全体,对 $x = \{x_i\} \in l^\infty$,规定 $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$,则 l^∞ 为巴拿赫空间.

例 9　C_0　设 C_0 是收敛数列全体,则 C_0 作为 l^∞ 的子空间,也是完备的线性空间,即 C_0 也是巴拿赫空间.

例 10　$L^p(E)(1 \leqslant p < +\infty)$　设$(X, \mathscr{R}, \mu)$是一个测度空间,$E \in \mathscr{R}$,$\mu(E) < +\infty$. 记 $L^p(E)$ 是在 E 上可测,且$\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$ 的 x 全体. 把在 E 上几乎处处相等的函数视为同一,对 $x \in L^p(E)$,规定

$$\|x\| = \left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $L^p(E)$ 是一个巴拿赫空间.

例 11　$L^\infty(E)$　设$(x, \mathscr{R}, \mu)$是一个测度空间,$E \in \mathscr{R}$,$L^\infty(E)$是 E 上可测且本性有界,即

$$\|x\| = \inf_{\substack{\mu(F)=0 \\ F \subset E}} \sup_{t \in E \setminus F} |x(t)| < \infty$$

的函数 x 全体,则 $L^\infty(E)$ 按上述 $\|\cdot\|$ 成为巴拿赫空间.

例 12　$C_0(-\infty, \infty)$　$(-\infty, \infty)$上满足 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$ 的连续函数 x 全体,按通常的线性运算和范数

$$\|x\| = \max_t |x(t)|$$

是一个巴拿赫空间.

例 13　$V_0[a, b]$　记$[a, b]$上满足:1° $x(a)=0$; 2° 在(a, b)中右连续; 3° 在$[a, b]$上有界变差的函数全体,规定

$$\|x\| = \bigvee_a^b(x),$$

则 $V_0[a,b]$ 是一个**巴拿赫空间**.

(4) 商空间　设 X 是赋范线性空间, L 是 X 的线性子空间, 对 $\tilde{x} \in X/L$, 规定

$$p(\tilde{x}) = \inf\{\|x\| \mid x \in \tilde{x}\},$$

则 $p(\cdot)$ 是 X/L 上的拟范数, 当 L 是 X 的闭子空间时, $p(\cdot)$ 是 X/L 上的范数.

定理 1　设 X 是线性空间, $p(\cdot)$ 是 X 上的拟范数, 记 $L = \{x \mid p(x) = 0\}$, 在商空间 X/L 上规定

$$\tilde{p}(\tilde{x}) = p(x), \quad x \in \tilde{x} \in X/L,$$

则 $\tilde{p}(\cdot)$ 必是 X/L 上的范数.

例如, 设 X 是可测集 E 上的可积函数全体, L 是 E 上几乎处处等于 0 的函数全体, 则 X/L 就是 $L^1(E)$.

1.3 内积空间

1.3.1 内积空间

(1) 内积和内积空间的定义　设 H 是数域 K 上的线性空间, 如果对 H 中任何两个元 x, y, 都对应于一个数 $(x,y) \in K$, 满足

1° 正定性: 对一切 $x \in H$, $(x,x) \geqslant 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $(x,x) = 0$;

2° 共轭对称性: 对任何 $x, y \in H$, $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

3° 对第一变元的线性: 对任何 $x,y,z \in H$ 及 $\alpha, \beta \in K$, 成立着

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z),$$

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 H 上的**内积**, 称 $(H,(\cdot,\cdot))$ (简记为 H) 为**内积空间**.

(2) 设 H 为内积空间, $(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的内积, 规定 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, 则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的范数, 称 $\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数.

(3) 希尔伯特空间　完备的内积空间称为**希尔伯特空间**

(4) 极化恒等式　设 H 为实内积空间, 则

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2);$$

设 H 为复内积空间, 则

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2).$$

(5) 平行四边形公式　设 H 为内积空间, 由内积导出的范数 $\|\cdot\|$ 对任何 $x, y \in H$ 均满足

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

反之, 如果赋范线性空间 X 上范数满足上述等式, 则此范数必由某内积导出.

1.3.2 投影定理

(1) 直交 设 H 是内积空间, $x,y\in H$. 如果 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y 直交, 记作 $x\perp y$.

如果 M,N 是 H 的两个子集, 对任何 $x\in M, y\in N$ 均有 $x\perp y$, 则称 M 与 N 直交, 记作 $M\perp N$.

设 M 是 H 的子集, H 中所有与 M 直交的元素全体称为 M 的直交补, 记作 $M^{\perp}$.

(2) 投影 设 M 是内积空间 H 的线性子空间, $x\in H$. 如果有 $x_0\in M, x_1\perp M$, 使得 $x=x_0+x_1$, 则称 x_0 是 x 在 M 上的投影.

定理2(投影定理) 设 M 是内积空间 H 的完备线性子空间, 则对任何 $x\in H$, x 在 M 上的投影唯一地存在.

1.3.3 直交系

(1) 就范直交系 设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的一个子集, 如果对于任何 $x,y\in\mathscr{F}$ 均有 $(x,y)=0$, 则称 $\mathscr{F}$ 是 H 中的直交系; 如果对直交系 $\mathscr{F}$ 中任何元素 x, 均有 $\|x\|=1$, 就称 $\mathscr{F}$ 为**就范直交系**.

(2) 贝塞尔(Bessel)不等式 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系, 则对任何 $x\in H$, 均有

$$\|x\|^2\geqslant\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2.$$

(3) 完备就范直交系和帕塞瓦尔(Parseval)等式 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是希尔伯特空间 H 中的就范直交系, 而且对任何 $x\in H$, 均有

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2,$$

就称 $\mathscr{F}$ 是 H 上的完备就范直交系, 称上述关系式为帕塞瓦尔等式.

1.3.3 直交展开

设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系, 称 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$ 为 x 关于 $\mathscr{F}$ 的傅里叶级数, 称 (x,e_λ) 为 x 关于 e_λ 的傅里叶系数. 如果

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda,$$

则称 x 可以按 $\mathscr{F}$ 展开成傅里叶级数.

定理3 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系, E 是 $\mathscr{F}$ 张成的线性闭子空间, 则对 $x\in H$, 下列命题等价:

1° $x\in E$;

2° $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$;

3° $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$.

定理4(黎兹-费希尔定理) 设 H 是希尔伯特空间, $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 中

的就范直交系，一族数$\{C_\lambda\}$满足$\sum_{\lambda\in\Lambda}|C_\lambda|^2<+\infty$，则必存在$x\in H$，使得$x$关于$e_\lambda$的傅里叶系数为$C_\lambda$，而且

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda e_\lambda.$$

1.4　拓扑线性空间

1.4.1　拓扑线性空间的概念

设X是实数域或复数域K上的线性空间，$(X,\mathscr{T})$又是一个拓扑空间，满足

1°按拓扑$\mathscr{T}$，X是豪斯多夫(Hausdorff)空间；

2° X上的线性运算是连续的，即$X\times X\to X$上的加法运算$(x,y)\mapsto x+y$和$K\times X\to X$上的数乘运算$(\alpha,x)\mapsto\alpha x$都是连续的，则称$X$是**拓扑线性空间**.

距离线性空间是一种特殊的拓扑线性空间.

1.4.2　有界集，完全有界集和紧集

(1) 吸收集　设A,B是线性空间X的非空子集，若有$\varepsilon>0$，使得$\{\lambda x\mid|\lambda|<\varepsilon,x\in B\}\subset A$，则称$A$吸收$B$；如果$A$吸收任何单元素集，则称$A$为**吸收集**.

(2) 有界集　设B是拓扑线性空间X的一个子集.如果0的任一邻域都吸收B，则称B是X中的**有界集**.

(3) 完全有界集　设B是拓扑线性空间X的一个子集，如果对0的任一邻域$\mathscr{O}$，存在X的有限子集A，使得$B\subset A+\mathscr{O}$，则称B是X中的**完全有界集**.

定理5　在拓扑线性空间中，紧集必是完全有界集，完全有界集必是有界集.

(4) 完备集　设$\{x_\alpha\}$是拓扑线性空间X中的网，如果对0的任何邻域$\mathscr{O}$，有α_0，使得$\alpha_0<\alpha,\alpha_0<\beta$时，$x_\alpha-x_\beta\in\mathscr{O}$，则称$\{x_\alpha\}$是一个基本网.如果$A$是$X$的一个子集，而且$A$中任何基本网必收敛于$A$中的点，则称$A$是$X$中的完备集.

定理6　拓扑线性空间X的子集A为紧集的充要条件是A为完全有界的，而且A是完备的.

1.4.3　有限维拓扑线性空间的特征

局部完全有界　设X是拓扑线性空间，如果存在0的一个完全有界的邻域，则称X为局部完全有界的.

定理7　设X是拓扑线性空间，则X是有限维的充要条件是X为局部完全有界的.

由这个定理可得到一个常用的结论：

定理8　赋范线性空间X是有限维的充要条件是X中的单位球$\{x\mid\|x\|\leqslant1\}$是紧的.

1.4.4　局部凸空间

(1) 局部基　设$(X,\mathscr{T})$是拓扑线性空间,称$\mathscr{T}$在0处的基为$\mathscr{T}$的**局部基**.

(2) 凸集和凸包　设A是线性空间X的子集,如果

$$\{tx+(1-t)y \mid t\in(0,1),x,y\in A\}\subset A,$$

则称A是**凸集**.对X的任何子集B,一切包含B的凸集的交集称为B的凸包,记作$\mathrm{CO}(B)$.

(3) 局部凸空间　设$(X,\mathscr{T})$是拓扑线性空间,如果存在全部由凸集组成的$\mathscr{T}$的局部基,则称$(X,\mathscr{T})$为局部凸拓扑线性空间,简称为**局部凸空间**.

定理9　设$(X,\mathscr{T})$是局部凸空间,则必有X上的拟范数族P,使得$\{\mathscr{O}(0,p,1) \mid p\in P\}$组成$\mathscr{T}$的局部基,其中

$$\mathscr{O}(0,p,1)=\{x \mid p(x)<1\}.$$

1.4.5　有界型空间

(1) 有界型空间　设$(X,\mathscr{T})$为局部凸空间,如果在X的有界集上取值均有界的拟范数都是连续的,则称$(X,\mathscr{T})$是**有界型空间**.

(2) 均衡集　设A是线性空间X的子集,而且

$$\{\lambda x \mid |\lambda|\leqslant 1,x\in A\}=A,$$

则称A为**均衡集**.

(3) 有界型空间的特征　X为有界型空间的充要条件是X中吸收每个有界集的均衡凸集都以0为内点.

(4) 满足第一可列公理的局部凸空间是有界型空间.

1.4.6　桶式空间

(1) 桶和桶式空间　局部凸空间X中的均衡凸闭吸收集称为X中的桶.如果X中的每一个桶均以0为内点,则称X为**桶式空间**.

(2) 桶式空间的特征　局部凸空间X是桶式空间的充要条件是X中下半连续的拟范数都是连续的.

(3) 弗雷歇空间是桶式空间.

1.4.7　端点和克赖茵-密尔玛定理(Krein-Milman定理)

设A是线性空间X中的凸集,$x_0\in A$,如果有$y,z\in A,t\in(0,1)$,使得$x_0=ty+(1-t)z$时必有$y=z$,则称x_0是A的**端点**.

定理10(克莱茵-密尔玛定理)　设A是局部凸空间中的非空凸紧集,则A必有端点;若A的端点全体为B,则

$$\overline{\mathrm{CO}(B)}=A.$$

2 对偶空间

2.1 连续线性泛函

2.1.1 连续线性泛函的概念

(1) 线性算子和线性泛函　设 T 是实或复数域 K 上线性空间 $X \to Y$ 的映射，满足

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \forall \alpha, \beta \in K, x, y \in X,$$

则称 T 是 $X \to Y$ 的**线性算子**；如果又有 $Y = K$，则称 T 为**线性泛函**.

(2) 设 f 是拓扑线性空间 X 上的线性泛函，则 f 连续的充要条件是 $\{x \mid f(x) = 0\}$ 为闭集.

(3) 赋范线性空间上的有界线性算子　设 T 是赋范线性空间 $X \to Y$ 的线性算子，如果

$$\sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leqslant 1\} < +\infty,$$

则称 T 是**有界线性算子**，这个上确界称为 T 的范数，记作 $\|T\|$.

对有界线性算子 T，$\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\|$.

(4) 赋范线性空间上线性算子是有界的充要条件是它为连续的.

例 1　设 f 是赋范线性空间 X 上非零连续线性泛函，$A = \{x \mid x \in X, f(x) = 1\}$，$d = \inf\{\|x\| \mid x \in A\}$，则 $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

2.1.2 汉恩-巴拿赫定理

(1) 凸泛函　设 p 是线性空间 X 上的泛函，对任何 $t \geqslant 0, p(tx) = t\,p(x)$，而且 $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$，则称 p 是 X 上的**凸泛函**.

定理 1(实线性空间上的汉恩-巴拿赫定理)　设 X 是实线性空间，p 是 X 上的凸泛函，X_0 是 X 的线性子空间，f_0 是 X_0 上的线性泛函. 对一切 $x \in X_0, f_0(x) \leqslant p(x)$，则存在 X 上的线性泛函 f，使得

$$f|_{X_0} = f_0, f(x) \leqslant p(x), \forall x \in X.$$

定理 2(汉恩-巴拿赫定理)　设 X 是实或复数域上的线性空间，p 是 X 上的拟范数，X_0 是 X 的线性子空间，f_0 是 X_0 上的线性泛函，而且当 $x \in X_0$ 时，$|f_0(x)| \leqslant p(x)$，则存在 X 上的线性泛函 f，使得

$$f|_{X_0} = f_0, |f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X.$$

定理 3(赋范线性空间上的汉恩-巴拿赫定理)　设 X_0 是赋范线性空间 X 的线性子空间，f_0 是 X_0 上的连续线性泛函，则存在 X 上的连续线性泛函 f，使得 $f|_{X_0} = f_0$，$\|f\| = \|f_0\|$.

由汉恩－巴拿赫定理可以导出以下几个常用的结论.

(2) 设 X 是赋范线性空间，G 是 X 的线性子空间，$\rho(x_0,G)=\inf_{y\in G}\|x_0-y\|>0$，则必存在 X 上的连续线性泛函 f，使得 $f|_G=0$，$f(x_0)=\rho(x_0,G)$，$\|f\|=1$.

(3) 设 X 是赋范线性空间，$x_0\in X$，$x_0\neq 0$，则必存在 X 上的连续线性泛函 f，使得 $f(x_0)=\|x_0\|$，而且 $\|f\|=1$.

(4) 设 X 是赋范线性空间，对任何 $x_0\in X$，有

$$\|x_0\|=\sup_{\|f\|=1}|f(x_0)|.$$

2.1.3 汉恩－巴拿赫定理(几何形式)

线性簇 设 X 是实数域或复数域 K 上的线性空间，L 为 X 的子集，如果存在 X 的线性子空间 X_0 和 $x_0\in X$，使得 $L=x_0+X_0$，则称 L 为一个**线性簇**. 如果 X_0 为 X 的非平凡的极大子空间，则称 L 为一个**超平面**.

定理4 (汉恩－巴拿赫定理的几何形式) 设 X 是实数域或复数域 K 上的线性空间，A 是 X 中的凸吸收集，L_0 是 X 中的线性簇，$A\cap L_0=\varnothing$，则存在 X 上的实线性泛函 f，记 L 为超平面 $\{x\mid f(x)=1\}$，必有

1° $L_0\subset L$；

2° $f(x)\leqslant\inf\{a\mid a>0,x\in aA\}$；

3° $A\subset\{x\mid f(x)\leqslant 1\}$.

推论 设 X 是拓扑线性空间，A 是 X 中的凸吸收集，A 的内部(内点全体) A° 非空，L_0 是 X 的线性簇，$A\cap L_0=\varnothing$，则存在 X 上的连续线性泛函 f，记 L 为超平面 $\{x\mid f(x)=1\}$ 成立着.

1° $L_0\subset L$；

2° $A^\circ\subset\{x\mid f(x)<1\}$；

3° $\bar{A}\subset\{x\mid f(x)\leqslant 1\}$.

定理5 设 X 是实数域上的拓扑线性空间，A_1,A_2 是 X 中互不相交的非空凸集，则

1° 如果 A_1 的内部非空，则必存在实连续线性泛函 f 和实数 a，使得 $A_1\subset\{x\mid f(x)\leqslant a\}$，$A_2\subset\{x\mid f(x)\geqslant a\}$.

2° 如果 A_1 和 A_2 又都是开集，则必存在实连续线性泛函 f 和实数 a，使得 $A_1\subset\{x\mid f(x)<a\}$，$A_2\subset\{x\mid f(x)>a\}$.

上述结论1°，2°可表述为超平面 $L=\{x\mid f(x)=a\}$ 分离(或严格分离) A_1 和 A_2.

2.2 对偶空间和自反性

2.2.1 对偶空间的概念

设 X 是拓扑线性空间，X 上连续线性泛函全体称为 X 的**对偶空间**(或共轭空

间),记作 X^*.

定理 6 设 X 是赋范线性空间,则它的对偶空间 X^* 按泛函范数是巴拿赫空间.

2.2.2 赋范线性空间上连续线性泛函的表示

一般说来,如果一个抽象的赋范线性空间能与一个具体的赋范线性空间等距同构,就称这个具体的空间为抽象空间的一个表示.所谓 X 上连续线性泛函的表示,就是研究 X^* 这个赋范线性空间能和怎样的具体空间实现等距同构.

例 2 $(l^p)^* = l^q$,其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p\geqslant 1$,当 $p=1$ 时 $q=\infty$.即当且仅当存在唯一的 $\eta=\{\eta_i\}\in l^q$,使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i, x=\{x_i\}\in l^p$$

且 $\|f\|=\|\eta\|_q$ 时,$f\in(l^1)^*$.

例 3 $(C_0)^*=l^1$.

例 4 $(L^p(E))^*=L^q(E)$,其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p\geqslant 1, p=1$ 时 $q=\infty$,即当且仅当存在唯一的 $\eta\in L^q(E)$,使得

$$f(x)=\int_E x(t)\eta(t)\,\mathrm{d}\mu(t), x\in L^p(E),$$

且 $\|f\|=\|\eta\|_q$ 时,$f\in(L^p(E))^*$.

例 5 $(C[a,b])^*=V_0[a,b]$,即当且仅当存在唯一的 $g\in V_0[a,b]$,使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t), x\in C[a,b],$$

而且 $\|f\|=\|g\|$ 时,$f\in(C[a,b])^*$.

2.2.3 赋范线性空间的自反性

(1) 二次对偶空间 设 X 是赋范线性空间,称 $X^{**}=(X^*)^*$ 为 X 的二次对偶空间.

(2) $X\to X^{**}$ 的典则嵌入映射 设 X 是赋范线性空间,规定 $\tau: X\to X^{**}$ 为

$$\tau(x)(x^*)=x^*(x), x\in X, x^*\in X^*,$$

则 τ 是等距映射,称之为 $X\to X^{**}$ 的典则嵌入映射.

(3) 自反性 设 X 是赋范线性空间,如果典则嵌入 $\tau: X\to X^{**}$ 是到上的,则称 X 为**自反空间**.

例 6 设$(X,\mathscr{B},\mu)$是测度空间,$1<p<\infty$,则 $L^p(X)$ 是自反空间.

例 7 $(C_0,\|\cdot\|_\infty)$是非自反空间.

(4) 自反的赋范线性空间必为巴拿赫空间.

定理 7 设 X 是巴拿赫空间,则当且仅当 X^* 是自反空间时,X 是自反空间.

(5) 一致凸赋范线性空间 设 X 为赋范线性空间,如果对任何 $\varepsilon>0$,存在 δ

>0,当 $x,y\in X$,$\|x\|\leqslant 1$,$\|y\|\leqslant 1$,$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ 时 $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\leqslant 1-\delta$,则称 X 是一致凸的.

定理 8(密尔玛定理)　一致凸巴拿赫空间必是自反的.

2.3　弱拓扑与弱 * 拓扑

2.3.1　线性空间对

设 X,Y 是同一个数域 K 上的线性空间,$<x,y>$ 是定义于 $X\times Y$ 上的双线性泛函,满足

1° 如果对每个 $y\in Y$,$<x,y>=0$,则 $x=0$;

2° 如果对每个 $x\in X$,$<x,y>=0$,则 $y=0$,

就称 X 和 Y 由双线性泛函 $<x,y>$ 形成一个线性空间对.

例 8　设 X 是局部凸空间,其对偶空间为 X^*,在 $X\times X^*$ 上定义

$$<x,x^*>=x^*(x),$$

则 X 和 X^* 成为一个空间对.

2.3.2　弱拓扑和弱 * 拓扑

(1) 关于空间对的弱拓扑　设 X,Y 按 $<x,y>$ 成为一个空间对,由拟范数族

$$\{|<x,y>|\mid y\in Y\}$$

确定的 X 上的局部凸拓扑为 X 关于空间对 X,Y 的弱拓扑,记作 $\sigma(X,Y)$.

(2) 弱拓扑　设 X 为局部凸空间,X^* 是其对偶空间,称 $\sigma(X,X^*)$ 为 X 上的弱拓扑.

(3) 弱 * 拓扑　设 X 为局部凸空间,X^* 是其对偶空间,称 $\sigma(X^*,X)$ 为 X^* 上的弱 * 拓扑.

2.3.3　极

设 X,Y 关于双线性泛函 $<x,y>$ 为线性空间对,$A\subset X$,$B\subset Y$,A 和 B 的极集分别规定为

$$A^0=\{y\in Y\mid |<x,y>|\leqslant 1,\forall x\in A\},$$
$$B^0=\{x\in X\mid |<x,y>|\leqslant 1,\forall y\in B\}.$$

例 9　设 X 是赋范线性空间,X^* 为其对偶空间,X 和 X^* 按 $<x,x^*>=x^*(x)$ 是空间对,关于这个空间对,对任何 $A\subset X$,有

$$A^0=\{y\in X^*\mid \|y\|\leqslant 1\}.$$

定理 9(双极定理)　设 X,Y 是线性空间对,则 A 的两次极 $A^{00}=(A^0)^0$ 等于 A 的均衡凸 $\sigma(X,Y)$ 闭包.

2.3.4　阿拉格罗 - 布巴基定理

定理 10[阿拉格罗 - 布巴基(Alaoglu-Bourbaki)定理]　设 X 是局部凸空间,

$p(x)$ 是 X 上的连续拟范数,则

$$X_p^* = \{f \in X^* \mid \sup_{p(x)\leq 1} |f(x)| < +\infty\}$$

按 $\|f\| = \sup_{p(x)\leq 1} |f(x)|$ 为巴拿赫空间,而且 X_p^* 中的单位球关于 X^* 中的弱 * 拓扑 $\sigma(X^*, X)$ 是紧集.

3 线性算子的理论

3.1 线性算子基本概念

3.1.1 连续线性算子

(1) 连续线性算子　设 X, Y 为实数域或复数域 K 上的赋准范线性空间, $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset X$, $\mathrm{T}: \mathscr{D}(\mathrm{T}) \to Y$ 称为线性算子,如果

$$\mathrm{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathrm{T}x + \beta \mathrm{T}y, \forall \alpha, \beta \in K, x, y \in \mathscr{D}(\mathrm{T}).$$

$\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 称为 T 的定义域, $(\mathscr{R}(T) = \{\mathrm{T}x \mid x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})\}$ 称为 T 的值域. 如果 $x_n, x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})(n = 1, 2, \cdots)$, $x_n \to x$ 时, $\mathrm{T}x_n \to \mathrm{T}x$, 则称 T 在 x 处连续.

若线性算子 T 在某点 x 处连续,则必在 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 上处处连续.

(2) 赋范线性空间上的连续线性算子　设 X, Y 均为赋范线性空间, $X \to Y$ 的连续线性算子全体记作 $B(X \to Y)$. 记 $B(X) = B(X \to X)$.

例 1　设 $K(t, s)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上的二元连续函数, $\mathrm{T}: C[a, b] \to C[a, b]$ 定义为

$$\mathrm{T}x(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) \mathrm{d}s,$$

则可验证 $\mathrm{T} \in B(c[a, b])$, 且

$$\|\mathrm{T}\| = \max_{a\leq t\leq b} \int_a^b |K(t, s)| \mathrm{d}s.$$

例 2　设 $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 是 $C[0, 1]$ 中具有连续导数的函数全体,规定

$$(\mathrm{T}x)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t), \qquad x \in \mathscr{D}(\mathrm{T}),$$

则对 $x_n(t) = \sin n\pi t$, 有 $\|x_n\| = 1$, 而

$$\|\mathrm{T}x_n\| = n \to \infty,$$

因此 T 是无界的,从而也不是连续的.

定理 1　设 X 是赋范线性空间, Y 是巴拿赫空间,则 $B(X \to Y)$ 也是巴拿赫空间.

3.1.2 线性算子的运算

设 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ 的定义域都是赋范空间 X 的子空间,值域包含于赋范空间 Y, 则

1° 和 T_1+T_2 $\mathscr{D}(T_1+T_2)=\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)$,

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x;$$

2° 数乘 αT_1 $\mathscr{D}(\alpha T_1)=\mathscr{D}(T_1)$

$$(\alpha T_1)(x)=\alpha(T_1x);$$

3° 积 T_1T_2 $\mathscr{D}(T_1T_2)=\{x\in\mathscr{D}(T_2)\mid T_2x\in\mathscr{D}(T_1)\}$

$$(T_1T_2)(x)=T_1(T_2x);$$

4° 扩张 当 $\mathscr{D}(T_1)\subset\mathscr{D}(T_2)$ 且

$$T_1x=T_2x,\forall x\in\mathscr{D}(T_1)$$

时,称 T_2 是 T_1 的扩张,记作 $T_1\subset T_2$;

5° 逆 T^{-1} 如果 $x\neq 0$ 时必有 $Tx\neq 0$,则T具有逆算子 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$,

$$T^{-1}y=x,$$

其中 x 是满足 $Tx=y$ 的唯一的元.

3.1.3 共轭算子

(1) 稠定算子 设T是赋范线性空间 X 上的线性算子,如果它的定义域 $\mathscr{D}(T)$ 在 X 中稠密,就称T为**稠定算子**.

(2) 赋范线性空间上的共轭算子 设T是 $X\to Y$ 的稠定线性算子,如果对于 $f\in Y^*$,存在 $g\in X^*$,使得对于一切 $x\in\mathscr{D}(T)$,有

$$f(Tx)=g(x),$$

则记 $T^*f=g$,称 $T^*:f\mapsto g$ 为T的**共轭算子**,满足上述条件的 f 全体为 T^* 的定义域.T^* 是线性的.

定理2 设 X,Y,Z 均为赋范线性空间,T_1,T_2 是 X 到 Y 的稠定线性算子,T_3 是 Y 到 Z 的稠定线性算子,则

1° T_1^*,T_2^* 是 Y^* 到 X^* 的闭算子(见3.2.1.(2));

2° 当 T_1+T_2 也是稠定算子时,$(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$;

3° $(\alpha T)^*=\alpha T^*$;

4° 当 $T_1\subset T_2$ 时,$T_2^*\subset T_1^*$;

5° 当 T_3T_1 是稠定算子时,$(T_3T_1)^*\supset T_1^*T_3^*$.

(3) 希尔伯特空间上的共轭算子 设 H 和 G 是两个希尔伯特空间,T是 $H\to G$ 的稠定线性算子.如果对于 $y\in G$,存在 $y^*\in H$,使得 $(Tx,y)=(x,y^*)$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立,则记 $T^*y=y^*$,称 $T^*:y\mapsto y^*$ 为T的共轭算子,满足上述条件的 y 的全体称作 T^* 的定义域.

(4) 把定理2中的 X,Y,Z 改为希尔伯特空间,则结论1°,2°,4°,5°依然成立,结论3°则改为

$$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*.$$

定理3 设 X,Y 是赋范线性空间,$T\in B(X\to Y)$,则 $T^*\in B(Y^*\to X^*)$,且 $\|T\|=\|T^*\|$.

同样的结论对于希尔伯特空间的共轭算子也是成立的.

3.1.4 $B(X \to Y)$ 上的拓扑

设 X,Y 是赋范线性空间，$B(X \to Y)$ 上有三种常用的拓扑.

(1) **一致算子拓扑** 这种拓扑的局部基由形如$\{\mathrm{T} \mid \|\mathrm{T}\| < \varepsilon\}$(其中$\varepsilon > 0$)的集合构成. 当且仅当 $\|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}\| \to 0 \quad (n \to \infty)$时，$\{\mathrm{T}_n\}$按一致算子拓扑收敛于T.

(2) **强算子拓扑** 这个拓扑的局部基由形如

$$\{\mathrm{T} \mid \|\mathrm{T}x\| < \epsilon\}$$

(其中 $x \in X, \varepsilon > 0$) 的集合构成，当且仅当对每个 $x \in X$,

$$\|(\mathrm{T}_n - \mathrm{T})x\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

时，$\{\mathrm{T}_n\}$ 按强算子拓扑收敛于 T.

(3) **弱算子拓扑** 这个拓扑的局部基由形如

$$\{\mathrm{T} \mid |f(\mathrm{T}x)| < \varepsilon\}$$

(其中 $x \in X, f \in Y^*, \varepsilon > 0$) 的集合构成. 当且仅当对每个 $x \in X, f \in Y^*$,

$$f((\mathrm{T}_n - \mathrm{T})x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

时，$\{\mathrm{T}_n\}$ 按弱算子拓扑收敛于 T.

3.2 线性算子基本定理

3.2.1 开映射定理

(1) **开映射** 如果从某拓扑空间到另一拓扑空间的一个映射把定义域中任一开集映为值域中的开集，就称这个映射为开映射.

(2) **闭算子** 设有两个拓扑空间 X,Y，T是从$\mathscr{D}(\mathrm{T})(\subset X)$ 到 Y 的映射，如果T的图像

$$G(\mathrm{T}) = \{(x,\mathrm{T}x) \mid x \in \mathscr{D}(\mathrm{T})\}$$

是乘积拓扑空间 $X \times Y$ 中的闭集，就称T是一个闭算子.

定理4(开映射定理) 设 X,Y 均为弗雷歇空间，T是从$\mathscr{D}(\mathrm{T})(\subset X)$ 到 Y 中的闭线性算子，其值域是 Y 中的第二纲集合，则T必是开映射，而且 $\mathscr{R}(\mathrm{T}) = Y$.

作为特例，设 X,Y 均为弗雷歇空间，连续线性算子T以 X 为定义域，值域为 Y，则T必是开映射.

3.2.2 闭图像定理

定理5(闭图像定理) 设 X,Y 均为弗雷歇空间，$\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 是 X 中第二纲集，T是$\mathscr{D}(\mathrm{T})$ 到 Y 中的闭线性算子，则T必是连续的，并且 $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = X$.

推论1 定义于整个弗雷歇空间上并取值于弗雷歇空间的闭线性算子必是连续的.

3.2.3 逆算子定理

定理6(逆算子定理) 设 X,Y 均为弗雷歇空间，闭线性算子T是 X 到 Y 的双

射，则 $T^{-1}: Y \to X$ 必是连续的.

推论2 设 X, Y 均是巴拿赫空间，有界线性算子 $T: X \to Y$ 是双射，则 T^{-1} 必是有界的.

推论3(范数等价性) 设 $(X, \|\cdot\|_1), (x, \|\cdot\|_2)$ 均为巴拿赫空间，而且存在 $M > 0$，使得

$$\|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \forall x \in X,$$

则必存在 $m > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leq m\|x\|_1, \forall x \in X.$$

3.2.4 共鸣定理(一致有界定理)

定理7(共鸣定理) 设 X 和 $X_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 均为巴拿赫空间，$T_\lambda: X \to X_\lambda$ 均为有界线性算子，而且

$$\{x \mid \sup_\lambda \|T_\lambda x\| < +\infty\}$$

是 X 中的第二纲集，则必有 $\sup_\lambda \|T_\lambda\| < +\infty$.

推论4 设 $\{T_n\}$ 是一列由巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的有界线性算子，则对一切 $x \in X$，$\{T_n x\}$ 均收敛的充要条件是以下两个条件同时满足：

1° $\{\|T_n\|\}$ 是有界数列；

2° 对 X 中某稠密子集中的每个 x，$\{T_n x\}$ 收敛.

3.3 线性算子的正则集与谱

3.3.1 算子的正则点与谱点

(1) 正则算子　设 X, Y 为两个赋范线性空间，T 为线性算子，$\mathscr{D}(T) \subset X$. 如果 $\mathscr{R}(T) = Y$，T^{-1} 存在而且有界，则称 T 为正则算子.

(2) 正则集和预解算子　设 X 是复赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)(\subset X)$ 到 X 中的线性算子，λ 是一个复数. 如果 $\lambda I - T$ 是正则算子，则称 λ 是 T 的正则点，称 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是 T 的预解算子. 正则点的全体称为正则集，记为 $\rho(T)$.

(3) 谱点　不是正则点的复数称为 T 的谱点，谱点全体称为 T 的谱集，记作 $\sigma(T)$.

3.3.2 谱的分类

设 X 是赋范线性空间，线性算子 $T: \mathscr{D}(T)(\subset X) \to X$.

(1) 点谱　如果有非零的 $x \in \mathscr{D}(T)$ 和复数 λ 使得

$$Tx = \lambda x,$$

就称 λ 是 T 的特征值，x 为 T 的相应于 λ 的特征向量. T 的特征值全体称为 T 的点谱. 记作 $\sigma_p(T)$.

(2) 连续谱　T 的非特征值的谱点全体称为 T 的连续谱. 记作 $\sigma_c(T)$.

(3) 近似点谱 如果存在一列单位向量$\{x_n\}$,使得

$$(\lambda I - T)x_n \to 0,$$

就称λ为T的近似谱点,其全体即T的近似点谱,记作$\sigma_a(T)$.

(4) 剩余谱 T的非近似谱点的谱点全体称为T的剩余谱,记作$\sigma_r(T)$.

(5)$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_r(T)$.

3.3.3 有界线性算子的谱

(1) 谱半径 设T是赋范线性空间X上的有界线性算子,记

$$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

并称$r(T)$为T的谱半径.

(2) 谱半径公式

$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

(3) 谱集的性质 巴拿赫空间上有界线性算子的谱$\sigma(T)$为非空闭集;$\sigma_r(T)$为开集;$\sigma_a(T)$为闭集.

记$\partial\sigma(T)$为$\sigma(T)$的边界,则$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$.

3.4 重要的线性算子类

3.4.1 赋范线性空间上的紧算子

设X,Y均为赋范线性空间,$T:X \to Y$把X中任何有界集映为致密集,则称T为紧算子,$X \to Y$的紧线性算子全体记作$C(X \to Y)$.

例3 设$K(s,t)$是$[a,b]\times[a,b]$上的平方可积函数,

$$(K\varphi)(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \varphi \in L^2[a,b],$$

则称K为弗雷德霍姆(Fredholm)算子,它是$L^2[a,b]$上的一个紧算子.

定理8 设X,Y是赋范线性空间,则$C(X \to Y)$是$B(X \to Y)$的线性子空间.如果Y是巴拿赫空间,则$C(X \to Y)$是巴拿赫空间$B(X \to Y)$的闭子空间.

定理9(黎斯 - 啸德尔定理) 设X是复巴拿赫空间,T是$X \to X$的紧线性算子,则

1° 当$\dim X = \infty$时,$0 \in \sigma_p(T)$;

2° $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T)$;

3° $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$时,与$\lambda$相应的特征子空间必是有限维的;

4° 不同特征值对应的特征向量线性无关;

5° $\sigma(T)$的极限点只可能为0;

6° T^*也是紧的,而且$\sigma(T) = \sigma(T^*)$;

7° λ是T的非零谱点时,它关于T和T^*的特征子空间的维数相等;

8° 设$\lambda \neq \mu$,$(T-\lambda)x = 0$,$(T^* - \mu)f = 0$,则$f(x) = 0$;

9° 设 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则 $(\lambda I - \tau)x = y$ 可解的充要条件是对 T^* 的任一相应于 λ 的特征向量 f，均有 $f(y) = 0$；

10° 设 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则 $(\lambda I - T^*)\varphi = f$ 可解的充要条件是对 T 的任一相应于 λ 的特征向量 y，均有 $f(y) = 0$.

3.4.2 广义幂零算子

赋范线性空间中谱集为单点集 $\{0\}$ 的算子称为**广义幂零算子**或**拟幂零算子**.

算子 T 是广义幂零算子的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

例 4 $C[a,b]$ 上的沃尔泰拉(Volterra)算子

$$(Vf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是一个广义幂零算子.

3.4.3 希尔伯特空间上的对称算子

(1) 对称算子和自共轭算子　设 A 是希尔伯特空间 H 中的稠定算子，$\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^*)$，且 $x \in \mathscr{D}(A)$ 时 $Ax = A^* x$，即 $A \subset A^*$，就称 A 为**对称算子**，当 $A = A^*$ 时，称 A 为**自共轭算子**或自伴算子.

(2) 亏指数　设 A 是希尔伯特空间 H 上的对称算子，称

$$\dim \mathscr{R}(A + iI)^{\perp} \text{ 和 } \dim \mathscr{R}(A - iI)^{\perp}$$

为 A 的**亏指数**.

自共轭算子的两个亏指数均为 0.

定理 10 希尔伯特空间上稠定线性算子 A 是对称算子的充要条件是对一切 $x, y \in \mathscr{D}(A)$，$(Ax, y) = (x, Ay)$，这也等价于对一切 $x \in \mathscr{D}(A)$，(Ax, x) 均为实数.

例 5 设 $H = L^2[0,1]$. 在 $\mathscr{D}(A) = \{f \mid f 在[0,1]全连续, f' \in L^2[0,1], f(0) = f(1) = 0\}$ 上规定

$$A = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

则 A 就是一个对称算子，但 A 不是自共轭的.

例 6 设 $H = L^2[0,1]$，在 $\mathscr{D}(A) = \{f \mid f 在[0,1]上全连续, f \in L^2[0,1], f(0) = f(1)\}$ 上同样取

$$A = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

则 A 是一个自共轭算子.

(3) 自共轭扩张　设 A 是希尔伯特空间 H 上的对称算子，如果存在 H 上的自共轭算子 $\tilde{A}$，使得 $x \in \mathscr{D}(A)$ 时 $Ax = \tilde{A}x$，就称 $\tilde{A}$ 是 A 的自共轭扩张.

对称算子具有自共轭扩张的充要条件是它的两个亏指数相等.

(4) 半有界算子　设 A 是希尔伯特空间 H 上的对称算子,如果存在实数 c,使得对一切 $x \in \mathscr{D}(A)$,均有

$$(Ax, x) \geqslant c(x, x) \quad (\text{或}(Ax, x) \leqslant c(x, x)),$$

就称 A 为下(上)半有界算子.

定理 11　任一半有界算子必有自共轭扩张.

(5) 正算子　设 A 是希尔伯特空间 H 上的稠定线性算子,如果对一切 $x \in \mathscr{D}(A)$,均有$(Ax, x) \geqslant 0$,就称 A 是正算子.

正算子必是下半有界算子,从而必有自共轭扩张.

3.4.4　希尔伯特 - 施密特(Hilbert-Schmidt)算子

(1) 希尔伯特 - 施密特算子　设 H, G 是两个希尔伯特空间,$\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 H 的完备就范直交系,$T \in B(H \to G)$. 如果

$$\sum_\lambda \| Te_\lambda \|^2 < +\infty,$$

就称 T 是**希尔伯特 - 施密特算子**.

(2) 在上述记号下,记

$$|\!|\!| T |\!|\!| = \sum_\lambda \| Te_\lambda \|^2,$$

则$|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ 是在希尔伯特 - 施密特算子集合上由某内积导出的范数. 该集合按此范数成为希尔伯特空间.

例 7　设 $H = G = L^2(-\infty, \infty)$, $K \in L^2(\mathbf{R}^2)$,算子 T 定义为

$$(T\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \varphi \in L^2(-\infty, \infty).$$

则 T 就是 $H \to G$ 的希尔伯特 - 施密特算子.

3.4.5　核算子

(1) 核算子　设 H, G 是两个希尔伯特空间,$\{e_n\}$ 是 H 的完备就范直交系,$\{h_n\}$ 是 G 中的就范直交系,非负数列$\{\lambda_n\}$满足$\sum \lambda_n < \infty$. 算子 $T \in B(H \to G)$ 可表示为

$$T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi, e_n)h_n, \quad \forall \varphi \in H,$$

就称 T 为**核算子**,也称为迹算子.

(2) 在上述记号下,称$\sum \lambda_n$ 为 T 的迹范数.

核算子全体按迹范数成为一个巴拿赫空间.

定理 12　有界线性算子 T 为核算子的充要条件是它可以表示为两个希尔伯特 - 施密特算子之积.

3.4.6　希尔伯特空间上自共轭算子的谱分解

(1) 投影算子　希尔伯特空间上的幂等自共轭算子,即满足 $P^2 = P, P^* = P$

的算子称为投影算子.

(2) **谱系** 设 $E_t(-\infty < t < +\infty)$ 是希尔伯特空间 H 上一族投影算子,而且满足

1° 单调性,即当 $t > s$ 时,对任何 $x \in H$ 有

$$((E_t - E_s)x, x) \geqslant 0.$$

2° 右连续性,即 $s - \lim\limits_{s \to t+0} E_s = E_t$,其中 s-lim 表示按强算子拓扑的极限;

$$s - \lim_{t \to -\infty} E_t = 0, s - \lim_{t \to +\infty} E_t = I,$$

就称 $E_t(-\infty < t < \infty)$ 是直线上的谱系.

(3) **谱测度** 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的某些子集所成的 σ- 代数,对每个 $\delta \in \mathscr{B}$,$E(\delta)$ 是希尔伯特空间 H 上的投影算子,而且

1° $E(X) = I$;

2° 对 $\mathscr{B}$ 中任何一列互不相交的集合 $\{\delta_n\}$ 总有

$$E(\bigcup \delta_n) = \sum E(\delta_n)$$

(右端和式指在强算子拓扑下的极限),则称 E 是可测空间 $(x, \mathscr{B})$ 上的谱测度,并称 $(x, \mathscr{B}, E)$ 是希尔伯特空间 H 上的谱测度空间.

当 $x = (-\infty, \infty)$,$\mathscr{B}$ 是直线上波雷尔(Borel)集全体时,记 $E_t = E((-\infty, t))$,则 $\{E_t\}$ 便是直线上的谱系.

(4) **谱积分** 设 $(X, \mathscr{B}, E)$ 是希尔伯特空间 H 上的谱测度空间,f 是可测空间 $(X, \mathscr{B})$ 上的有界可测函数,如有 H 上有界线性算子 A,使得

$$(\mathrm{A}x, x) = \int_X f(t) \mathrm{d}(E_t x, x)$$

对一切 $x \in H$ 成立,则称 A 为 f 的谱积分,记作

$$\mathrm{A} = \int_X f(t) \mathrm{d}E_t.$$

上述概念还可推广到 H 的一个稠密集 D_f 上,使

$$\int_X |f(t)|^2 \mathrm{d}(E_t x, x) < +\infty, \quad \forall x \in D_f$$

成为无界可测函数,此时相应的谱积分可能是无界算子.

定理 13(自共轭算子的谱分解定理) 设 A 是复希尔伯特空间 H 上的自共轭算子,则必有直线 R^1 上的唯一的谱测度 $E(\delta)$,使得

$$\mathrm{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda = \int_{\sigma(A)} \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

上述谱积分表示称为 A 的谱分解.

(5) 与自共轭算子相应的谱测度的性质 设自共轭算子 A 相应的谱测度空间为 $(R^1, \mathscr{B}, E)$,其中 $\mathscr{B}$ 是直线上波雷尔集全体,则

1° $\mathrm{A}E(\delta) = E(\delta)\mathrm{A}, \forall \delta \in \mathscr{B}$,即 $E(\delta)H$ 是 A 的约化子空间;

2° $\sigma(\mathrm{A}|_{E(\delta)H}) \subset \bar{\delta}, \forall \delta \in \mathscr{B}$;

3° 如有线性算子 T 满足 TA = AT,则对任何 $\delta \in \mathscr{B}$,均有 $\mathrm{T}E(\delta) = E(\delta)\mathrm{T}$.

3.4.7 等距算子和酉算子

设 H, G 都是希尔伯特空间，线性算子 $V: H \to G$ 满足

$$\|Vx\| = \|x\| \quad (\forall x \in H),$$

则称 V 为 H 上的等距算子.

V 为等距算子的充要条件是 $V^* V = I_H$，这里 I_H 是 H 上的恒等算子.

当上述等距算子的值域为 G 时，称 V 为**酉算子**.

V 为酉算子的充要条件是 $V^* V = I_H, VV^* = I_G$.

3.4.8 凯莱(Cayley) 变换

设 H 是希尔伯特空间，A 是 H 上的对称算子，则算子

$$V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

是个等距算子，称 V 为 A 的凯莱变换.

反之，当 V 是等距算子，$1 \overline{\in} \sigma_p(V)$，则算子

$$A = i(V + I)(I - V)^{-1}$$

是对称算子，也称 A 为 V 的凯莱变换.

上述变换是一对互逆变换.

特别地，当 A 是自共轭算子时，上述 V 便是酉算子；当 V 是酉算子时，A 便是自共轭算子.

3.4.9 酉算子的谱分解

定理 14(酉算子的谱分解定理) 设 U 是希尔伯特空间 H 上的酉算子，则必惟一地存在单位圆周上的谱测度 $E(\delta)$，使得

$$U = \int_{|z|=1} z\mathrm{d}E_z = \int_{\delta(U)} z\mathrm{d}E_z.$$

与酉算子相应的谱测度具有类似 3.4.6 的(5) 所述的性质，只需把那里的 A 用 U 取代，直线上的波雷尔集用$[0,2\pi]$ 的波雷尔集取代即可.

2.4.10 正规算子的谱分解

设 N 是希尔伯特空间 H 上的线性算子，满足

$$NN^* = N^* N,$$

则称 N 为 H 上的**正规算子**.

定理 15(正规算子的谱分解定理) 设 N 是希尔伯特空间 H 上的正规算子，则惟一地存在平面谱测度 E，使得

$$N = \int_C Z\mathrm{d}E_z = \int_{\sigma(N)} Z\mathrm{d}E_z,$$

其中 C 表示复平面.

与正规算子相应的谱测度也具有类似 3.4.6 的(5) 所述的性质，只需把那里的 A 用 N 取代，把直线上的波雷尔集用平面波雷尔集取代即可.

4　巴拿赫代数

4.1　巴拿赫代数的基本概念

4.1.1　巴拿赫代数的定义及例子

(1) 巴拿赫代数　如果实或复赋范线性空间 R 同时又是实数域或复数域上的代数，而且关于积成立着

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|, \quad \forall x, y \in R,$$

则称 R 为赋范代数；如果赋范代数 R 还是巴拿赫空间，则称之为**巴拿赫代数**.

(2) 单位元和逆元　如果 R 是巴拿赫代数，$e \in R$，对一切 $x \in R$，均有 $xe = ex = x$，则称 e 为 R 的单位元.

如果 R 是有单位元的巴拿赫代数，$x \in R$. 假如存在 $y \in R$，使得 $xy = yx = e$，则称 x 可逆，其逆元为 y，记作 $x^{-1} = y$.

(3) 设 R 是实数域或复数域上的巴拿赫代数，$\widetilde{R} = K \times R$. 在 $\widetilde{A}$ 上按通常的方法定义加法与数乘，且规定乘法和范数分别为

$$(\lambda; x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy),$$
$$\| (\lambda, x) \| = | \lambda | + \| x \|,$$

则 $\widetilde{R}$ 是以(1,0)为单位元的巴拿赫代数，而 R 则等距同构于 $\widetilde{R}$ 的子代数 $\{(0, x) \mid x \in R\}$. 因此，$\widetilde{R}$ 可以看作在 R 中添加单位元后所得的代数.

例 1　设 Ω 是紧豪斯道夫(Hausdorff)空间，Ω 上连续函数全体为 $C(\Omega)$，$C(\Omega)$ 按通常的线性运算和乘法以及范数

$$\| x \| = \max_{t \in \Omega} | x(t) |, \quad x \in C(\Omega)$$

成为有单位元的交换巴拿赫代数.

例 2　设 X 是巴拿赫空间，X 上线性有界算子全体 $B(X)$ 是有单位元的巴拿赫代数，当 $\dim X > 1$ 时，$B(x)$ 是非交换的.

例 3　$(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数全体按通常的线性运算和范数 $\| x \| = \int_{-\infty}^{\infty} | x(t) | \mathrm{d}t$ 是巴拿赫空间. 如又规定其上乘法为卷积

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t - s) \mathrm{d}s,$$

则 $L(-\infty, \infty)$ 是交换巴拿赫代数，但是这个代数没有单位元.

例 4　设 W 为绝对收敛的三角级数全体，即

$$W = \left\{ x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \,\middle|\, \sum_{-\infty}^{\infty} | a_n | < +\infty \right\},$$

在 W 中按通常方法规定加法和数乘，当 $x,y \in W$，

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$$

时，规定

$$(xy)(t) = \sum_{+\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

其中

$$C_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

又规定

$$\| x \| = \sum_{-\infty}^{\infty} | a_n |,$$

则 W 是有单位元的交换巴拿赫代数，称之为维纳(Wiener)代数.

4.1.2　元素的正则集和谱

(1) 正则集和谱　设 R 是有单位元 e 的复巴拿赫代数，$x_0 \in R$，λ 是复数. 如果 $\lambda e - x_0$ 在 R 中可逆，就称 λ 是 x_0 的**正则点**，不是正则点的数称为 x_0 的谱点. x_0 的正则点全体称为 x_0 的**正则集**，记为 $\rho(x_0)$；x_0 的谱点全体称为 x_0 的谱，记为 $\sigma(x_0)$，$\sigma(x_0)$ 是非空闭集.

(2) **谱半径**　记

$$r(x) = \sup\{ | \lambda | \mid \lambda \in \sigma(x) \},$$

称 $r(x)$ 为 x 的**谱半径**，谱半径公式为

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

4.2　交换巴拿赫代数

4.2.1　线性可乘泛函

设 R 是数域 K 上的代数，$R \to K$ 的代数同态称为 R 上的**线性可乘泛函**.

定理 1　设 R 是巴拿赫代数，R 上非零可乘线性泛函全体 $\mathscr{M} \subset \{ f \mid f \in R^*, \| f \| \leqslant 1 \}$，而且 $\mathscr{M}$ 按 $\sigma(R^*, R)$ 是紧集.

当 R 是有单位元的巴拿赫代数，$f \in \mathscr{M}$ 时，对 $x \in R$，必有 $f(x) \in \sigma(x)$.

设 H 是复希尔伯特空间，$\dim H > 1$，则 $B(H)$ 上不存在非零的可乘线性泛函.

例 5　设 W 是例 4 中的维纳代数，则 W 上的非零可乘线性泛函全体

$$\mathscr{M} = \{ f_t \mid t \in [0, 2\pi) \},$$

其中 $f_t(x) = x(t)$，$\forall x \in W$.

4.2.2　盖尔范德(Gelfand)表示

设 R 是数域 K 上的巴拿赫代数，$x \in R$，$\hat{x}: \mathscr{M} \to K$ 规定为

$$\hat{x}(f) = f(x),$$

则称 $\hat{x}$ 为 x 的盖尔范德变换，并称 $\Gamma: R \to C(\mathscr{M})$：

$$x \mapsto \hat{x}$$

为 R 的盖尔范德表示.

定理 2　设 R 是具有单位元的巴拿赫代数，则 R 的盖尔范德表示 Γ 是 $R \to C(\mathscr{M})$ 的代数同态，$\|\Gamma\| = 1$，而且

$$\Gamma e = e,$$

$$\|\Gamma x\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

定理 3　设 R 是有单位元的复交换巴拿赫代数，则

1° $M \neq \varnothing$；

2° 盖尔范德表示 $\Gamma: R \to C(\mathscr{M})$ 是代数同态；

3° 对 $x \in R$，$\{x \to \hat{x}(f) \mid f \in \mathscr{M}\} = \sigma(x)$；

4° 对 $x \in R$，$\|\Gamma x\| = \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$；

5° Γ 是等距同构的充要条件是

$$\|x^2\| = \|x\|^2, \forall x \in R.$$

定理 4　复巴拿赫代数 R 中，如果每个非零元均有逆，则 R 必同构于复数域.

4.2.3　极大理想空间

设 R 是交换巴拿赫代数，非零可乘线性泛函全体为 $\mathscr{M}$. 对每个 $f \in \mathscr{M}$，f 的零空间 $\{x \mid f(x) = 0\}$ 便是 R 的一个极大理想，而且一切非零可乘线性泛函的零空间全体即 R 的极大理想空间. 由此可建立起非零可乘线性泛函与极大理想间的一一对应，由 R^* 上的弱拓扑导出极大理想空间上的拓扑. 按此拓扑，极大理想空间是一个紧豪斯道夫空间.

定理 5　有单位元的复交换巴拿赫代数模任一极大理想的商代数同构于复数域.

4.2.4　半单的巴拿赫代数

代数 R 中一切极大理想的交称为 R 的根基；根基为 $\{0\}$ 的代数称为半单的代数.

定理 6　有单位元的交换巴拿赫代数 R 是半单的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \text{ 时 } a = 0.$$

这时，R 的盖尔范德表示 Γ 是 R 到 $C(\mathscr{M})$ 内的一个同构映射.

4.3　对称巴拿赫代数

4.3.1　对称巴拿赫代数的概念

(1) 对称巴拿赫代数　设 R 是有单位元的巴拿赫代数，R 上有一个对合：$x \mapsto x^*$ 满足

1° $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$；

2° $(xy)^* = y^* x^*$；

3° $(x^*)^* = x$；

4° $\|x\| = \|x^*\|$，

则称 R 是**对称巴拿赫代数**.

(2) 设 R 是对称巴拿赫代数，$x \in R$，如果 $x = x^*$，则称 x 为自共轭元，单位元必是自共轭的.

若 $x \in R$，x^{-1} 存在，则 $(x^*)^{-1}$ 也存在，而且 $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

(3) 对称理想，如果 $x \in I$ 时 $x^* \in I$，则对称巴拿赫代数 R 中的理想 I 称为对称的.

定理 7　对称巴拿赫代数的根基是对称理想.

4.3.2　正泛函

设 f 是对称巴拿赫代数 R 上的线性泛函，且对所有自共轭元 x，$f(x)$ 取实值，则称 f 为实值泛函；如果对一切 $x \in R$，$f(x^* x) \geqslant 0$，则称 f 为**正泛函**.

设 f 是 R 上的正泛函，如果有 R 上正泛函 g 和 $\lambda > 0$，使 $\lambda f - g$ 也是 R 上正泛函时，g 必为 f 与非负数之积，则称 f 是**不可分解正泛函**.

定理 8　对称巴拿赫代数中每个正泛函 f 均是有界的，且

$$\|f\| = f(e).$$

定理 9　设 B 是对称巴拿赫代数 R 的根基，$x \in B$，则对 R 上任何正泛函 f，均有

$$f(x^* x) = 0.$$

4.3.3　代数的表示

设 R 是对称巴拿赫代数，如果有复希尔伯特空间 H，保持对合的代数同态 $\varphi: R \to B(H)$，且 $\varphi(e) = I$，则称 φ 是 R 在 H 上的表示. 如果又有 $\xi \in H$，使 $\{\varphi(x)\xi \mid x \in R\}$ 在 H 中稠密，则称 φ 是**循环表示**，ξ 是 φ 的循环向量. 如果 H_0 是 H 的闭子空间，对一切 $x \in R$，$\varphi(x) H_0 \subset H_0$，就称 H_0 是 φ 的不变子空间. 只有 H 及 $\{0\}$ 为不变子空间的表示称为**既约表示**，也称为不可约表示.

定理 10　设 R 是对称巴拿赫代数，f 是 R 上的正泛函，则必有希尔伯特空间 H 及 R 在 H 上的循环表示 φ，使得

$$f(x) = (\varphi(x)\xi, \xi), \quad \forall x \in R.$$

其中 ξ 是表示 φ 的循环向量.

定理 11 设 R 是对称巴拿赫代数,f 是 R 上的正泛函,φ 是 R 的以 ξ 为循环向量的循环表示,且

$$f(x) = (\varphi(x)\xi, \xi), \quad \forall x \in R,$$

则 f 是不可分解正泛函的充要条件是 φ 为 R 的既约表示.

4.4 C^* 代 数

4.4.1 基本概念和性质

设 $\mathscr{A}$ 是巴拿赫代数,$*$ 为 R 中的对合,即 $x \mapsto x^*$ 满足 $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$,$(xy)^* = y^* x^*$,$(x^*)^* = x$,如果

$$\| x^* x \| = \| x \|^2, \quad \forall x \in \mathscr{A}.$$

则称 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数.

如果 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数,$x \in \mathscr{A}$,当 $x = x^*$ 时称 x 为自共轭元;当 $x^* x = xx^*$ 时,称 x 为正规元,当 $\mathscr{A}$ 有单位元且 $x^* x = xx^* = e$ 时,称 x 为酉元.

设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数,$x \in \mathscr{A}$,则 $\| x^* \| = \| x \|$.如果 $\mathscr{A}$ 有单位元 e,则 $\| e \| = 1$.

定理 12 设 x 是 C^* 代数中的正规元,则

$$\lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} = \| x \|.$$

定理 13 设 $\mathscr{A}$ 是有单位元的 C^* 代数,$x \in \mathscr{A}$,$x^* = x$,则 $\sigma(x) \subset \mathbf{R}^1$.

定理 14 若 J 是 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 的一个闭双侧理想,则 J 必是对称的,且 $\mathscr{A}/J$ 仍为 C^* 代数.

4.4.2 C^* 代数的表示

定理 15(盖尔范德 - 纳依玛克(Gelfand-Naimark)定理) 每个 C^* 代数必 $*$ 同构于某希尔伯特空间上有界线性算子集合中对 $*$ 封闭的一个闭子代数.

定理 16 设 $\mathscr{A}$ 是交换 C^* 代数,则它的盖尔范德表示 $\Gamma:\mathscr{A} \to C(\mathscr{M})$ 是一个 $*$ 等距到上的同构,即 Γ 是到上的,且

$$\Gamma(x^*)(M) = \overline{\Gamma(x)(M)}, \quad \forall M \in \mathscr{M}, x \in \mathscr{A}.$$

$$\| \Gamma(x) \| = \| x \|, \quad \forall x \in \mathscr{A}.$$

4.4.3 两个稠密性定理

设 H 是希尔伯特空间,$M \subset B(H)$,规定 M 的换位 M' 为

$$M' = \{x \in B(H) \mid xy = yx, \forall y \in M\}.$$

M 的二次换位是指 $M'' = (M')'$.

定理 17 (二次换位定理) 设 M 是 $B(H)$ 中包含单位元的 C^* 子代数,则下列断言等价:

1° $M = M''$；

2° M 按弱算子拓扑闭；

3° M 按强算子拓扑闭.

定理 18(卡普兰斯凯)(Kaplansky) 稠密性定理)　设 $\mathscr{A}$ 是 $B(H)$ 中的 C^* 子代数，其按强算子拓扑的闭包为 $\mathscr{M}$，$\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的单位球，$\mathscr{M}_1$ 是 $\mathscr{M}$ 的单位球，则 $\mathscr{A}_1$ 在 $\mathscr{M}_1$ 中按强算子拓扑是稠密的.

4.4.4 紧算子理想

记希尔伯特空间 H 上紧算子全体组成的 C^* 子代数为 $C(H)$.

定理 19　设 $\mathscr{A}$ 是 $C(H)$ 的 C^* 子代数，如 $\mathscr{A}$ 是不可约的，即 $\mathscr{A}$ 没有非平凡的不变子空间，则必有 $\mathscr{A} = C(H)$.

推论 1　$C(H)$ 中不包含非平凡的理想.

推论 2　设 $\mathscr{A}$ 是 H 上包含一个非零紧算子的不可约 C^* 子代数，则 $\mathscr{A}$ 必包含 $C(H)$.

4.5 冯·诺伊曼代数

4.5.1 冯·诺伊曼代数的概念

(1) $B(H)$ 中弱闭对称且含单位元的代数称为**冯·诺伊曼(von Neumann)代数**.

由二次换位定理可知，对称的算子代数 $\mathscr{A}$ 为冯·诺伊曼代数的充要条件是 $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$.

(2) 部分　设 $\mathscr{A}$ 是希尔伯特空间 H 上的冯·诺伊曼代数，投影算子 $P \in \mathscr{A}$，则

$$P\mathscr{A}P = \{PAP \mid P \in \mathscr{A}\}$$

是 PH 上的冯·诺伊曼代数，称 $P\mathscr{A}P$ 为 $\mathscr{A}$ 在 PH 上的部分.

(3) **中心**　设 $\mathscr{A}$ 是冯·诺伊曼代数，称冯·诺伊曼代数 $Z = \mathscr{A} \cap \mathscr{A}'$ 为 $\mathscr{A}$ 的中心.

当投影算子 $P \in Z$ 时，$P\mathscr{A}P = P\mathscr{A}$.

(4) **因子**　如果冯·诺伊曼代数 $\mathscr{A}$ 的中心只含单位算子的常数倍，则称 $\mathscr{A}$ 是一个因子.

4.5.2 迹

设 $\mathscr{A}$ 为冯·诺伊曼代数，$\mathscr{A}^+$ 为 $\mathscr{A}$ 中正自共轭算子全体. t_r 是定义在 $\mathscr{A}^+$ 上取值非负或 $+\infty$ 的泛函，满足

1° $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$；

2° $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A), \forall \lambda \geqslant 0$；

3° $\mathrm{tr}(UAU^*) = \mathrm{tr}(A), \forall$ 酉元 $U \in \mathscr{A}$，

则称 tr 为 $\mathscr{A}^+$ 上的迹.

如果迹 tr 只取有限值,就称它为有限迹.

如果对使 $\mathrm{tr}(A) = \infty$ 的任一 $A \in \mathscr{A}^+$,必有 $B \in \mathscr{A}^+$,使得 $A \geq B \neq 0$,而且 $\mathrm{tr}(B) < \infty$,则称 tr 为半有限迹.

如果 $\{A_a\}$ 为 $\mathscr{A}^+$的单调增加定向族,且 A 为 $\{A_a\}$ 的上确界时,总有 $\mathrm{tr}(A) = \sup\mathrm{tr}(A_a)$,则称 tr 为正规迹.

4.5.3 冯·诺伊曼代数的分类

以下设 $\mathscr{A}$ 为冯·诺伊曼代数.

(1) 交换投影算子　设投影算子 $P \in \mathscr{A}$,当 $P\mathscr{A}P$ 是交换算子集合时,称 P 为交换投影算子.

(2) 纯无限、半有限和有限冯·诺伊曼代数　如果 $\mathscr{A}$ 没有半有限正规迹,称 $\mathscr{A}$ 为纯无限冯·诺伊曼代数.如果对任一非零的 $A \in \mathscr{A}^+$,存在半有限正规迹 tr,使得 $0 < \mathrm{tr}(A) < +\infty$,则称 $\mathscr{A}$ 为半有限冯·诺伊曼代数.如果对任一非零的 $A \in \mathscr{A}^+$,存在有限正规迹 tr,使得 $\mathrm{tr}(A) \neq 0$,则称 $\mathscr{A}$ 为有限冯·诺伊曼代数.

(3) Ⅰ 型,Ⅱ 型和 Ⅲ 型冯·诺伊曼代数　如 $\mathscr{A}$ 含有一个交换投影算子 P,且对属于 $\mathscr{A}$ 的中心的投影算子 Q,当 $P \leq Q$ 时必有 $Q = I$,则称 $\mathscr{A}$ 为 Ⅰ 型冯·诺伊曼代数.

Ⅰ 型冯·诺伊曼代数必是有限或半有限的.

当 $\mathscr{A}$ 是有限或半有限,且不含任一交换投影算子时,称 $\mathscr{A}$ 为 Ⅱ 型冯·诺伊曼代数

纯无限冯·诺伊曼代数又称为 Ⅲ 型冯·诺伊曼代数.

4.5.4 冯·诺伊曼代数的分解

定理 20　在冯·诺伊曼代数 $\mathscr{A}$ 的中心 Z 中,必存在相交正交的投影算子 P_{I},P_{II},P_{III},使得

$$P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}} = I,$$

而且 $P_{\mathrm{I}}\mathscr{A}$,$P_{\mathrm{II}}\mathscr{A}$,$P_{\mathrm{III}}\mathscr{A}$分别是 $P_{\mathrm{I}}H$,$P_{\mathrm{II}}H$、$P_{\mathrm{III}}H$ 上的 Ⅰ 型、Ⅱ 型、Ⅲ 型冯·诺伊曼代数.而且,这样的分解是唯一的.

5 算子半群

5.1 强连续算子半群

5.1.1 单参数算子半群和算子群

(1) 单参数算子半群和算子群　设 $\{T_t\}$ 是巴拿赫空间 X 上一族线性有界算子,如果对一切 $0 \leq t,s < +\infty$(或 $0 < t,s < +\infty$),均有

$$T_{t+s} = T_t T_s,$$

则称$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$(或$\{T_t \mid t > 0\}$)为单参数算子半群.如果上式对一切$-\infty < t, s < +\infty$成立,则称$\{T_t \mid -\infty < t < +\infty\}$为**单参数算子群**.

例1 在$C[0, +\infty)$上规定

$$(T_t x)(s) = x(t+s), \quad t \geqslant 0,$$

则$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是一个算子半群.

例2 在$L(-\infty, \infty)$上规定

$$(T_t x)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{t}} x(\sigma) d\sigma, \quad t > 0,$$

则$u(s,t) = (T_t x)(s)$是热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial t}$$

适合初始条件$u(s,0) = x(s)$的解,而$\{T_t \mid t > 0\}$是一个算子半群.

(2) 强连续算子半群 设X是巴拿赫空间,$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是$X$上的算子半群,且满足

$$T_0 = I,$$

$$s - \lim_{t \to t_0} T_t = T_{t_0},$$

即对每个$T_0 \geqslant 0$和$x \in X$,有$\lim_{t \to t_0} \| T_t x - T_{t_0} x \| = 0$,则称$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$为**强连续算子半群,简称为$C_0$类算子半群**.

例1和例2中的算子半群都是强连续的.

关于强连续算子半群的主要问题是:是否存在算子A,使得$T_t = e^{tA}$?这个表达式的确切意义如何?算子A存在的充要条件又是什么?

5.1.2 无穷小生成元

设$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是巴拿赫空间$X$上的算子半群,$\mathscr{D}$为满足如下条件的元素$x \in X$全体:对$x$,存在$y \in X$,使得

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t}(T_t - I)x - y \right\| = 0.$$

规定$A: \mathscr{D} \to X$为$Ax = y$,其中y由上式确定.称A为算子半群$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$的**无穷小生成元**.

定理1 设$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是$C_0$类算子半群,则它的无穷小生成元A是一个稠定线性闭算子,对每个$x \in \mathscr{D}(A)$,成立着

$$\frac{dT_t x}{dt} = AT_t x = T_t A x.$$

5.1.3 C_0类算子半群无穷小生成元的特征

定理2 设A是巴拿赫空间X上的稠定闭算子,则A成为C_0类算子半群无穷小生成元的充要条件是:

1° 存在 $\omega_0 > 0$，使得 $(\omega_0, \infty) \subset \rho(A)$；

2° 存在 $M > 0$，使得当 $\lambda > \omega > \omega_0$ 时

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant M/(\lambda - \omega)^n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

5.1.4 抽象柯西问题

设 X 为巴拿赫空间，X 上线性算子 A 的定义域为 $\mathscr{D}(A)$，值域为 $\mathscr{R}(A)$. $y_0 \in X$. 设有取值于 X 上的向量值函数 $y(t)$ 满足

1° $y(t) \in \mathscr{D}(A)(t > 0)$，而且 y 在任何 $[\alpha,\beta] \subset (0, +\infty)$ 上全连续（相仿于实函数论中的全连续定义）；

2° $y(t)$ 强可导；

3° $\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$；

4° $\lim\limits_{t\to 0}\|y(t) - y_0\| = 0$，

则称 $y(t)$ 是方程 $\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$ 适合柯西条件 $y(0) = y_0$ 的解. 这个问题称为抽象柯西问题.

定理 3 设 A 是 C_0 类算子半群 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 的无穷小生成元，则方程

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$$

的抽象柯西问题对每个 $y_0 \in \mathscr{D}(A)$ 有唯一的解 $T_t y_0$.

5.1.5 C_0 类压缩半群

(1) C_0 类压缩半群的概念　设 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是 C_0 类算子半群，且对每个 $t \geqslant 0$，

$$\|T_t\| \leqslant 1,$$

就称 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是一个 C_0 类压缩半群.

(2) 设 $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 是一个 C_0 类压缩半群，则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T_t dt$$

在右半平面 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 上收敛，记此积分为 R_λ，则 R_λ 是有界线性算子，且满足

$$\|R_\lambda\| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}\lambda)t}dt = \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}.$$

定理 4 设 A 是稠定线性闭算子，则 A 为某 C_0 类压缩半群无穷小生成元的充要条件是：

1° $(0, +\infty) \subset \rho(A)$；

2° 对一切 $\lambda > 0$，$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

例 3 设 X 为在 $[0, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$ 的函数 x 全体，对 $x \in X$，令 $\|x\| = \sup|x(t)|$. 在 X 上规定平移算子半群为

$$(T_t x)(s) = x(t + s),$$

则$\{T_t \mid t \geqslant 0\}$是一个强连续压缩半群,其无穷小生成元

$$Ax(t) = \frac{d}{dt}x(t),$$

其中$\mathscr{D}(A) = \{x \mid x, x' \in X\}$.

5.1.6 希尔伯特空间上的压缩半群

设A是希尔伯特空间H上的稠定闭算子,如果对任何$x \in \mathscr{D}(A)$,

$$(Ax, x) + (x, Ax) \leqslant 0,$$

则称为A为**耗散算子**.

定理5 设A是希尔伯特空间H上的稠定闭算子,则A是某C_0类压缩半群无穷小生成元的充要条件是A为耗散算子,且

$$\mathscr{R}(I - A) = H.$$

5.2 单参数酉算子群

5.2.1 强连续单参数酉算子群

设H是一个希尔伯特空间,如果

1° 对每个$t \in (-\infty, +\infty)$,U_t是H上的酉算子;

2° $U_{t+s} = U_t U_s$;

3° 对每个$x \in H$,$t_0 \in (-\infty, \infty)$,$\lim\limits_{t \to t_0} \| U_t x - U_{t_0} x \| = 0$,

则称$\{U_t \mid t \in (-\infty, +\infty)\}$是一个强连续酉算子群.

5.2.2 斯通定理(Stone 定理)

定理6(斯通定理) 设B是希尔伯特空间H上的稠定闭算子,则B是H上某单参数强连续酉算子群的无穷小生成元的充要条件是存在H上自共轭算子A,使得$B = iA$.此时

$$U_t = e^{itA}.$$

设A的谱表示为$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$,则

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda.$$

斯通定理在量子力学、统计力学和群表示论中起着十分重要的作用.

5.3 遍历定理

5.3.1 可测变换

设$(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$是一个全$\sigma$-有限的测度空间,$\varphi$是$\Omega \to \Omega$的变换.如果对每个$B$

$\in \mathscr{B}$, $\varphi^{-1}B \in \mathscr{B}$,则称 φ 为**可测变换**. 如果 φ 是 Ω 上的双射,且 φ 和 φ^{-1} 均是可测的,则称 φ 是双可测的.

对可测变换 φ,如果 $\mu(\varphi^{-1}B) = \mu(B)$ 对每一个 $B \in \mathscr{B}$ 成立,则称 φ 是**保测变换**.

设 φ 是一个双可测变换,如果由 $\mu(B\Delta\varphi^{-1}B) = 0$ 必能导出 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(\Omega \setminus B) = 0$,则称 φ 是**遍历变换**,此时,称 μ 是在 φ 下的遍历测度.

5.3.2 个体遍历定理(伯克霍夫(Birkhoff)定理)

定理 7 设 φ 是保测变换,$\mu(\Omega) < +\infty$,对于 $f \in L(\Omega)$,记

$$A_nf(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}f(\varphi^k\omega),$$

则必存在有限函数 f^*,使得

$$f^*(\omega) = \lim_{n\to\infty} A_nf(\omega), \qquad \text{a.e.},$$

而且

$$f^*(\varphi\omega) = f^*(\omega), \qquad \text{a.e.},$$

$$\int_\Omega f^*\,d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

5.3.3 平均遍历定理(冯·诺伊曼定理)

定理 8 设 φ 是保测变换,

$$A_nf(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}f(\varphi^k\omega),$$

则对于任何 $f \in L^2(\Omega)$,存在有限函数 f^*,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |(A_nf)(\omega) - f^*(\omega)|^2 d\mu = 0,$$

而且

$$f^*(\varphi\omega) = f^*(\omega), \text{a.e.},$$

$$\int_\Omega f^*\,d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

特别地,当 $\mu(\Omega) = 1$,即 μ 为概率测度,且 φ 是遍历变换时,极限函数 f^* 几乎处处等于常数 $\int_\Omega f d\mu$,即时间平均几乎处处等于相平均. 它给出了统计力学中基本假设的数学论证.

以上的遍历定理可以推广到算子半群 $\{T_t \mid t \geq 0\}$ 的情况. 这时,代替上面的 A_n 的是在适当条件下的极限

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T_s\,ds.$$

6 非线性映射

6.1 映射的微分

6.1.1 映射的弱微分

(1) 弱可微和弱可导 设 X,Y 是实赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，映射 $f:\Omega\to Y$. 如果对 $x\in\Omega, u\in X$,

$$s-\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

存在，记为 $Df(x,u)$，则称 $Df(x,u)$ 是 f 在 x 处沿方向 u 的**弱微分**或**盖陶格斯(Gâteaux)意义下的微分**；如果对一切 $u\in X$，$Df(x,u)$ 存在，就称 f 在 x 处**弱可微**(或盖陶格斯意义下可微)；如果 f 在 x 处弱可微，且存在 $Df(x)\in B(X\to Y)$，使得

$$Df(x,u)=[Df(x)]u, u\in X,$$

则称 f 在 x 处**弱可导**(或盖陶格斯意义下可导)；称 $Df(x,u)$ 为有界线性弱微分；称 $Df(x)$ 为 f 在 x 处的**弱导数**(或盖陶格斯导数).

(2) 梯度和位势 设 X 为实赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集. 如果泛函 $\varphi:\Omega\to R$ 在 Ω 上处处具有有界线性弱微分，且 $D\varphi(x)=f(x)$，就称 $f:\Omega\to X^*$ 为 φ 的梯度，记为 $f(x)=\mathrm{grad}\varphi(x)$，并称 φ 为 f 的位势.

例 1 设 X 是实希尔伯特空间，X 上泛函 $\varphi(x)=\|x\|$. 由定义可知 $x\neq 0$ 时

$$D\varphi(x,u)=\frac{(x,u)}{\|x\|},$$

$$\mathrm{grad}\varphi(x)=D\varphi(x)=\frac{x}{\|x\|}.$$

6.1.2 强微分和强导数

设 X,Y 为实赋范线性空间，Ω 为 X 中的开集，映射 $f:\Omega\to Y$. 如果存在 $A\in B(X\to Y)$ 使得

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|f(x_0+u)-f(x_0)-Au\|}{\|u\|}=0,$$

就称 f 在 x_0 强可微或弗雷歇(Fréchet)意义下可称微，Au 为 f 在 x_0 处**强微分**(或弗雷歇微分) $df(x_0,u)$，称 A 为 f 在 λ_0 处**强导数**(或弗雷歇导数)，记作 $f'(x_0)$ 或 $df(x_0)$.

例 2 设 f 是 $C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$ 的微分算子

$$[f(x)](t)=x'(t)+[x(t)]^2,$$

则由定义可知 f 在 $C^{(1)}[0,1]$ 上每点都是强可微的，而且

$$[f'(x_0)]h(t)=h'(t)+2x_0(t)h(t).$$

定理 1 设 X,Y,Z 均为实赋范线性空间，$f,g:X\to Y$ 在 x 处强可微，$h:Y\to Z$

在 $y=f(x)$ 处强可微，则

1° 对任意常数 $\alpha,\beta,\alpha f+\beta g$ 在 x 处强可微，而且

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x);$$

2° $h\circ f:X\to Z$ 在 x 处强可微，且

$$(h\circ f)'(x)=h'(y)\circ f'(x).$$

可以通过递推定义出高阶弱微分和高阶强微分.

6.1.3 C^p 映射和 C^p 微分同胚

设 X,Y 为实赋范线性空间，p 为非负整数，开集 $\Omega\subset X$. 映射 $f:\Omega\to Y$ 称为 C^p 映射，对 $p=0$ 是指 f 在 Ω 上连续；对 $p>0$ 是指 f 在 Ω 上具有 p 阶连续的强导映射 $f^{(p)}(x)$.

如果 U,V 分别是 X,Y 中的开集，$f:U\to V$ 是双射，而且 f 和 f^{-1} 均为 C^p映射，则称 $f:U\to V$ 为 C^p微分同胚. 如果 U,V 分别是 X,Y 中的集合，$f:U\to V,x_0\in U$. 又设存在 x_0 的邻域 $U_0(\subset U)$ 和 $f(x_0)$ 的邻域 $V_0(\subset V)$，使得 $f:U_0\to V_0$ 为 C^p微分同胚，则称 $f:U\to V$ 在 x_0 局部 C^p微分同胚.

6.2 隐函数存在定理

6.2.1 隐函数的存在性

定理 2(隐函数存在定理) 设 X,Y,Z 均为实巴拿赫空间，Ω 是 $X\times Y$ 中的开集，$(x_0,y_0)\in\Omega,f:\Omega\to Z$ 是连续映射，且满足

1° $f(x,y)$ 对变元 x 强可微，$f'_x(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处连续；

2° $f'_x(x_0,y_0):X\to Z$ 具有有界逆；

3° $f(x_0,y_0)=0$,

则存在 $r>0,\delta>0$，使得 $\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$f(x,y)=0$$

在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$，它满足

$$x_0=g(y_0).$$

作为隐函数存在定理的特殊情况可以导出反函数存在定理.

6.2.2 隐函数的可微性

定理 3 设 X,Y,Z 均为实巴拿赫空间，Ω 为 $X\times Y$ 中的开集，$(x_0,y_0)\in\Omega,p\geqslant1,f:\Omega\to Z$ 为 C^p映射，$f(x_0,y_0)=0,f'_x(x_0,y_0):X\to Z$ 具有有界逆，则存在 $r>0,\delta>0$，使得 $\|y-y_0\|<\delta$ 时，方程

$$f(x,y)=0$$

在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的解 $x=g(y)$ 满足 $x_0=g(y_0)$，而且 $g(y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内具有 p 阶连续导映射.

6.3　拓扑度

6.3.1　布劳威尔(Brauwer)度

1. 连续映射的拓扑度

以下对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，取 $\|x\|=\max|x_i|$．用 Ω 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界开集，$C^1(\overline{\Omega})$ 表示 $C(\overline{\Omega})$ 的一个子空间，$f\in C^1(\overline{\Omega})$ 指 $f\in C(\overline{\Omega})$ 且存在 f 在某包含 $\overline{\Omega}$ 的开集上的延拓 $\tilde{f}$，$\tilde{f}$ 具有连续的强偏导数．对 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，取

$$\|f\|_1=\sup_{i,x}|f_i(x)|+\sup_{i,j,x}\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|,$$

其中 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$，又记

$$J_f(x)=\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right).$$

对 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，记 $Z_f=\{x\mid J_f(x)=0\}$．

设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega\cup Z_f)$，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J_f(x).$$

若 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，任取 $q\overline{\in}f(Z_f)$，使得 $\|p-q\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，其中，$\rho(p,f(\partial\Omega))$ 表示 P 与 $f(\partial\Omega)$ 的距离(下同)，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,q).$$

若 $f\in C(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$，使得 $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p),$$

称 $\deg(f,\Omega,p)$ 为 f 在 p 点关于 Ω 的**布劳威尔度**．

2. 布劳威尔度的基本性质

定理 4　设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，$\deg(f,\Omega,p)$ 具有下列性质：

1° 标准性　　若 $p\in\Omega$，则 $\deg(I,\Omega,p)=1$；

2° 可加性　　若 Ω_1、Ω_2 是含于 Ω 中的两个互不相交的开子集，$p\overline{\in}f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{2}\deg(f,\Omega_i,p);$$

3° 同伦不变性　　若 $h_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的一个同伦，$p_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 R^n 中一条连续曲线，$p_t\overline{\in}h_t(\partial\Omega)(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\deg(h_t,\Omega,p_t)$ 恒为常数；

4° 切除定理　　若闭集 $K\subset\overline{\Omega}$，且 $p\overline{\in}f(K)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\setminus K,p);$$

5° 区域分解定理　若 $\Omega=\cup\Omega_i$，其中 Ω_i 是有限个互不相交的开集，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_i\deg(f,\Omega_i,p);$$

6° 克罗内克(Kronecker)存在定理　若 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则存在 $q\in\Omega$，使得 $f(q)=p$；

7° 庞卡莱-波尔(Poincaré-Bohl)定理　若 $g\in C(\overline{\Omega})$，且对任意的 $x\in\Omega$，线段 $tf(x)+(1-t)g(x)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 不包含 p，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p);$$

8° 边界值定理　设 $g\in C(\overline{\Omega})$，且在 $\partial\Omega$ 上 $f=g$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p);$$

9° 对任意的 $q\in\mathbf{R}^n$，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-q,\Omega,p-q);$$

10° 乘积定理　若 D 是包含 $f(\overline{\Omega})$ 的有界开集，$\Delta=D\setminus f(\partial\Omega)$，$\Delta_i$ 是 Δ 的各连通分支($i=1,2,\cdots$)．如果 $g\in C(\overline{D})$，$p\overline{\in}g(f(\partial\Omega))\cup g(\partial D)$，则

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j),$$

其中 $\deg(f,\Omega,\Delta_j)=\deg(f,\Omega,q)$，$q\in\Delta_j$．

3．解的指标

设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$x_0$ 是 $\{x\mid f(x)=p\}$ 的孤立点．设 U 是 x_0 的开邻域，且不包含 $f(x)=p$ 的其他解．规定 $f(x)=p$ 的孤立解 x_0 的指标为

$$i(f,x_0,p)=\deg(f,V,p).$$

定理5　1° 设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，$f^{-1}(p)$ 为有限集，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{a\in f^{-1}(p)}i(f,a,p);$$

2° 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，$a\in f^{-1}(p)$，$J_f(a)\neq 0$，则 $i(f,a,p)=(-1)^v$，其中 v 是 $f'(a)$ 的负特征值按其代数重数计算的个数．

6.3.2　勒雷-绍德尔(Leray-Schauder)度

(1) 全连续映射　设 X,Y 是实赋范线性空间 $\Omega\subset X$，如果 $T:\Omega\to Y$ 是连续的，且对 Ω 中任何有界子集 A，$\overline{TA}$ 是 Y 中的紧集，则称 T 是全连续映射．

(2) 勒雷-绍德尔度的定义　设 X 是实赋范线性空间，Ω 是 X 的有界开子集，$f=I-T$，其中 $T:\overline{\Omega}\to X$ 为全连续映射，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$．对任何 $0<\varepsilon<P(p,f(\partial\Omega))$，设 $T_\varepsilon:\overline{\Omega}\to X$ 是值域为有限维的映射．

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon,x\in\overline{\Omega}.$$

记 $L_\varepsilon=\operatorname{span}\{T_\varepsilon\overline{\Omega},p\}$，$\Omega_\varepsilon=\Omega\cap L_\varepsilon$，$f=I-T_\varepsilon$．规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$$

称为 f 在 p 点关于 Ω 的**勒雷-绍德尔度**．

(3) 勒雷-绍德尔度的性质　设 X 为实赋范线性空间，$\Omega \subset X$，记 $K(\Omega)$ 为 $\Omega \to X$ 的全连续映射全体.

$$K_1(\Omega) = \{I - \mathrm{T} \mid \mathrm{T} \in K(\Omega)\}.$$

设 $\Omega \subset X$，映射 $h:[0,1] \to K(\Omega)$，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 Ω 的有界子集 A，必存在 $\delta = \delta(\varepsilon, A) > 0$，使得

$$\| h(t)(x) - h(s)(x) \| < \varepsilon (x \in A, |t - s| < \delta),$$

则称 h 是 Ω 上的**紧同伦**.

定理 6　设 X 为实线性空间，Ω 是 X 中的有界开子集，$f \in K_1(\Omega)$，$p \overline{\in} f(\partial\Omega)$，那么与定理 4 中(1°)，2°，4°，5°，6°，9°，10° 相应的结论均成立. 定理 4 的 7°，8° 中 $g \in C(\overline{\Omega})$ 改为 $g \in K_1(\overline{\Omega})$ 后相应的结论也成立. 定理 4 的 3° 同伦不变性则改为紧同伦不变性：设 h 是 Ω 上的紧同伦，$f_t = I - h_t$，$p_t:[0,1] \to X$ 连续，$p_t \overline{\in} f_t(\partial\Omega)$，则 $\deg(f_t, \Omega, p_t)$ 的取值与 t 无关.

6.4　不动点定理

不动点定理是讨论各类方程解的存在性和唯一性的重要工具.

6.4.1　压缩映射原理

设 X 是距离空间，映射 $\mathrm{T}: X \to X$. 如果存在数 $\alpha \in [0,1)$，对一切 x, y 成立着

$$\rho(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y) \leqslant \alpha\rho(x, y),$$

则称 T 是 X 上的一个**压缩映射**.

定理 7(压缩映射原理)　完备距离空间的压缩映射必有唯一的不动点.

隐函数存在定理、常微分方程解的存在性唯一性定理等重要命题都可利用压缩映射原理证明.

6.4.2　布劳威尔不动点定理

定理 8(布劳威尔不动点定理)　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭凸集，映射 $\mathrm{T}: \Omega \to \Omega$ 连续，则必有 $x_0 \in \Omega$，满足 $\mathrm{T}x_0 = x_0$.

6.4.3　绍德尔不动点定理

定理 9　设 X 是赋范线性空间，K 是 X 中的凸紧集，映射 $F: K \to K$ 连续，则必存在 $y \in K$，使得 $F(y) = y$.

设 X, Y 为线性空间，映射 $F: X \to Y$ 满足对任何 $x, y \in X$，$\alpha, \beta \geqslant 0$，$\alpha + \beta = 1$ 均有

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y),$$

则称 F 是一个**仿射映射**.

定理 10　设 X 是赋范线性空间，K 是 X 中的凸紧集，$\mathscr{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $K \to K$ 的连续仿射映射的交换族；则必有 $y \in K$，使得

$$F_\lambda(y) = y, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

6.4.4　集压缩映射的不动点

(1) 非紧性测度　设 X 是距离空间，Ω 是 X 中的有界集，记

$\alpha(\Omega) = \inf\{d \mid \Omega$ 可被有限个直径不超过 d 的集覆盖$\}$，称 $\alpha(\Omega)$ 为 Ω 的**非紧性测度**.

(2) 集压缩映射　设 X 是距离空间，$f: X \to X$ 是连续映射，如果对 X 中一切有界非紧子集 A 均有

$$\alpha(f(A)) \leqslant k\alpha(A),$$

其中 $k \in [0,1)$，则称 f 是**集压缩映射**.

定理 11　设 X 是巴拿赫空间，K 是 X 中的有界闭凸集，$f: K \to K$ 是集压缩映射，则 f 在 K 中必有不动点.

6.4.5　多值映射的不动点

(1) 多值映射　设有集合 X, Y，用 2^Y 表示 Y 的子集全体，称 $X \to 2^Y$ 的映射为多值映射.

(2) 闭映射　多值映射 $f: X \to 2^Y$ 称为在 $x \in X$ 处是闭的是指从 $x_n \to x$，$y_n \to y$，其中 $y_n \in f(x_n)$，可导致 $y \in f(x)$. 如果 f 在每一点均是闭的，则称 f 为闭映射.

(3) 不动点　设有多值映射 $f: X \to 2^X$. 如果存在 $x_0 \in X$，使得 $x_0 \in f(x_0)$，则称 x_0 是 f 的不动点.

定理 12　设 X 是巴拿赫空间，K 是 X 中的非空凸紧集，映射 $f: K \to 2^K$ 是闭映射，而且对每个 $x \in K$，$f(x)$ 均是集合 K 的非空凸子集，则映射 f 具有不动点.

参考文献

1　夏道行，吴卓人，严绍宗等. 实变函数论与泛函分析. 北京：高等教育出版社，1984.
2　夏道行，严绍宗，舒五昌等. 泛函分析第二教程. 北京：高等教育出版社，1987.
3　关肇直. 泛函分析讲义. 北京：高等教育出版社，1958.
4　关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分析入门. 上海：上海科学技术出版社，1979.
5　陈文塬. 非线性泛函分析. 兰州：甘肃人民出版社，1982.
6　郭大钧. 非线性泛函分析. 济南：山东科学技术出版社，1985.
7　Yosida K. Functional analysis. New York: Springer, 1964.
8　Dunford N, Schwartz J T. Linear operators, Ⅰ, Ⅱ. New York: Interscience-Johw Wiley, 1958, 1963.
9　Hille. E, Phillips R S. Functional analysis and semigroups. 2nd ed. New York: Amer Math Soc Colloq Publ. 1957.
10　Dixmier J, Von Neumann Algebras. New York, North-Holl and Pub. 1969.
11　Lloyd. N G. Degree theory. Camb: Camb Univ Pr, 1978.

·近代数学卷·

第 8 篇

傅里叶分析

编　者　苏维宜
审校者　徐利治

目　录

引　言

傅里叶分析是近代数学的重要学科分支，它对数学科学和自然科学的每一个领域都有很大影响．自从 1822 年法国数学家傅里叶的经典著作"热的分析理论"(The Analytie Theory of Heat)发表以来，近两个世纪中，人们逐步认识到傅里叶分析的重大意义．在本篇开始，简述傅里叶分析的重要作用是大有益处的．

傅里叶分析在物理学的研究中影响极为深刻．早在 1837 年，当麦克斯韦(Maxwell)用他的著名方程描述电磁波时，傅里叶分析马上就成了一种主要方法，用于研究电磁波及其各种谐波成分——X 射线、可见光、微波、无线电波等等；还有许多电学仪器和电子装置，包括近代发明的核磁共振谱分析仪和 X 射线晶体衍射谱分析仪，都是根据傅里叶分析原理制造出来的．可以毫不夸张地说，傅里叶分析为数学物理找到了极为有效的方法．在工程、计算机科学中，傅里叶分析的影响同样深刻．众所周知，把数据资料分解为周期性分量的思想对于自然科学和工程技术领域的重要作用，频谱分析已成为一种标准方法；而由傅里叶分析演绎出的时间序列分析，在地质学和石油勘探中也大大地发挥作用．20 世纪 50 年代以来，计算机科学的飞速发展，更使得傅里叶数值分析得以快速实现，从而成为数据分析的常规手段．将声音分解成谐波分量，就能使计算机产生并识别人们讲话的声音，如果对照片(例如对人像和由卫星上摄制的照片等)作类似处理，就可使计算机将"噪声"去掉，而使图像更加清晰逼真．显然，快速傅里叶变换(FFT)成为一种更为巧妙的方法，使得 n^2 次运算化为 $n\log n$ 次，大大减少了计算量和节约了计算时间，使运用傅里叶变换解决多方面的问题成为可能．

傅里叶分析-调和分析，不仅本身已成为数学科学中不可缺少的学科分支，而且微分方程、概率论、统计学、几何学、数论、群论、矩阵论、多复变函数等数十个数学学科分支都要用到傅里叶分析的思想和方法．傅里叶分析的理论与应用还促进了级数理论和群表示论的统一、函数空间理论(索波列夫(Sobolev)空间、Hardy 空间、广义函数空间等)的发展，为现代泛函分析、抽象调和分析等 20 世纪发展起来的重要学科分支奠定了基础．20 世纪 80 年代兴起的小波分析(Wavelets)更为傅里叶分析的发展和应用增添了新的活力，并产生强烈的影响．先进数学思想的威力必定会在科学领域的各个方向上广为传播，并成为科学家们的强有力的工具，傅里叶分析就是最典型的例证．

傅里叶分析的内容非常丰富，并非"手册"所能概括的．本篇仅介绍经典傅里叶分析、分布理论初步、沃尔什(Walsh)分析与局部域分析．

1　$\mathbf{R}^n$ 上的傅里叶分析

本《手册》"经典数学" 卷的无穷级数与瑕积分部分已经介绍了傅里叶级数，本

节从傅里叶变换开始介绍.然而,傅里叶级数与傅里叶变换有密切关系,下面将提到这一点.

下面从群的观点来介绍**傅里叶变换**.

把实数直线 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 看作加法"+"运算下的可交换群,在通常拓扑(以$\{(-\varepsilon,+\varepsilon):\varepsilon>0\}$为其邻域滤系基)下,$\mathbf{R}$成为一个局部紧拓扑群.这个群的特征群$\widehat{\mathbf{R}}$(即$\widehat{\mathbf{R}}$上的乘法函数$\chi:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$的全体,其中$\chi$满足$\chi(xy)=\chi(\chi)\chi\cdot(y)$,且$|\chi|=1$)为

$$\widehat{\mathbf{R}}=\{\chi_\xi(x)=e^{-ix\xi}:\xi\in\mathbf{R}\}.$$

1.1 $f\in L^1(\mathbf{R})$ 情形

1.1.1 $f\in L^1(\mathbf{R})$ 的 F 变换的定义

对于$f\in L^1(\mathbf{R})$,其傅里叶变换$f^\wedge$定义为

$$F^1f(\xi)\equiv f^\wedge(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx. \tag{1-1}$$

以下简称其为f F的变换.同时,定义傅里叶逆变换$f^\vee$为

$$[F^1]^{-1}f(x)\equiv f^\vee(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi.$$

注1 $f^\wedge$的定义中,会有常数因子的差别.例如,有些参考书或文献中将其定义为

$$f^\wedge(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

也有用因子$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$的.

注2 记号F^1f中的F^1表示$f\in L^1(\mathbf{R})$的F变换;下面还会用到F^2f和F^pf,则分别表示$f\in L^2(\mathbf{R})$的F变换和$f\in L^p(\mathbf{R})$的F变换.

1.1.2 F^1 的性质

(1) F变换是一个线性变换:

设$f,g\in L^1(\mathbf{R})$,有

$$F^1[\alpha f(\cdot)+\beta g(\cdot)](\xi)=\alpha F^1f(\xi)+\beta F^1g(\xi),\xi\in\mathbf{R},\alpha,\beta\in\mathbf{C};$$

(2) F变换的黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue)引理:

$$\lim_{|\xi|\to\infty}f^\wedge(\xi)=0,$$

从而,$f^\wedge(\xi)$属于集合$C_0=\{\Phi:\lim_{|\xi|\to\infty}\Phi(\xi)=0\}$.

(3) F变换确定一个由L^1到C_0的有界线性变换:

$$\|f^\wedge\|_\infty=\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|f^\wedge(\xi)|\leqslant\|f\|_1.$$

(4) F 变换的卷积定理：

设 $f,g\in L^1(\mathbf{R})$，则卷积

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$$

的 F 变换满足：

$$[f*g]^{\wedge}(\xi)=f^{\wedge}(\xi)\cdot g^{\wedge}(\xi).$$

(5) F 变换的巴塞伐尔公式(三种形式)：

1° 设 $f,g\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^{\wedge}(u)g(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g^{\wedge}(u)\mathrm{d}u;$$

2° 设 $f,g,g^{\wedge}\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\overline{g(u)}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}f^{\wedge}(u)\overline{g^{\wedge}(u)}\mathrm{d}u;$$

3° 设 $f,f^{\wedge}\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\|f\|_2=\|f^{\wedge}\|_2.$$

(6) F 变换的反演公式：

设 $f,f^{\wedge}\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^{\wedge}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u=f(x),$$

对几乎处处 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

(7) F 变换的阿贝尔反演公式：

设 $f\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{|u|/\rho}f^{\wedge}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u=f(x),$$

对几乎处处 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

(8) F 变换的唯一性：

设 $f\in L^1(\mathbf{R})$，且 $f^{\wedge}(\xi)\equiv 0$，则

$$f(x)=0,$$

对几乎处处 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

(9) 导数的 F 变换：

设 $f\in L^1(\mathbf{R})$，且设 $f^{(r-1)}$ 为局部绝对连续的，$f^{(r)}\in L^1(\mathbf{R})$，则

$$[f^{(r)}]^{\wedge}(\xi)=(\mathrm{i}\xi)^{(r)}f^{\wedge}(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}.$$

(10) F 变换的导数：

设 $f\in L^1(\mathbf{R})$，且设 $x^rf(x)\in L^1(\mathbf{R})$，则$(f^{\wedge})^{(r)}\in C_0(\mathbf{R})$，并成立

$$(f^{\wedge})^{(k)}(\xi)=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}u^kf(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi u}\mathrm{d}u,$$

$$k=0,1,\cdots,r,\xi\in\mathbf{R}.$$

1.2 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 情形

1.2.1 两个性质

为定义 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的 F 变换，利用以下两个性质：

1° 若 $f \in L^1 \cap L^2$，则 $f^\wedge \in L^2$，且 $\|f\|_2 = \|f^\wedge\|_2$.

2° 对于 $f \in L^2(\mathbf{R})$，作截断函数

$$f_\rho(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant \rho, \\ 0, & |x| > \rho, \end{cases} \quad \rho > 0,$$

则 $f_\rho \in L^1 \cap L^2$，且 $f_\rho^\wedge \in L^2$ 对每个 $\rho > 0$ 成立. 进而，还存在 $g \in L^2$，使得

$$\lim_{\rho \to \infty} \|f_\rho^\wedge\|_2 = \|g\|_2.$$

1.2.2 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的 F 变换的定义

现在可以定义 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的 F 变换了.

对于 $f \in L^2(\mathbf{R})$，其 F 变换 F^2 定义为

$$F^2 f(\xi) = \underset{\rho \to \infty}{\overset{(2)}{\text{l.i.m.}}} f_\rho^\wedge(\xi) = \underset{\rho \to \infty}{\overset{(2)}{\text{l.i.m.}}} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

记号 l.i.m. 是“limit in mean”的缩写，$\underset{\rho \to \infty}{\overset{(2)}{\text{l.i.m.}}}$ 表示在 L^2 范数 $\|\cdot\|_2$ 意义下的平均极限，故 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的 F 变换是由下式给出的唯一确定函数 $F^2 f(x) \in L^2(\mathbf{R})$：

$$\lim_{\rho \to \infty} \left\| F^2 f(\cdot) - \int_{-\rho}^{\rho} f(x) e^{-ix\cdot} dx \right\|_2 = 0.$$

$F^2 f$ 的下述性质非常重要：

F^2 是 L^2 到 L^2 的一对一保范有界线性变换，亦即对于 $f \in L^2$ 有

$$\|F^2 f\|_2 = \|f\|_2.$$

此性质不仅在理论上是傅里叶分析的基础，同时也反映了自然界的能量守恒定律. 关于 $F^2 f$ 的性质，在下一节中与 $L^p, 1 \leqslant p \leqslant 2$ 情形一起讨论.

1.3 $f \in L^p(\mathbf{R}), 1 \leqslant p \leqslant 2$ 情形

对于 $p = 1, p = 2$ 情形，已经分别在 1.1 与 1.2 中讨论了. 本节利用前两节的结果来解决 $1 < p < 2$ 情形.

1.3.1 $f \in L^p(\mathbf{R})$ 的 F 变换的定义

不难看出，$f \in L^p(\mathbf{R}), 1 < p < 2$，有下述分解：

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in L^1, f_2 \in L^2.$$

从而，$f \in L^p(\mathbf{R}), 1 < p < 2$ 的 F 变换 $F^p f$ 定义为

$$F^p f = F^1 f_1 + F^2 f_2.$$

注 3 也可以用定义 F^2f 的方式，以 L^p 意义下的平均极限

$$\underset{\rho\to\infty}{\overset{(p)}{\text{l.i.m.}}}\int_{-\rho}^{\rho} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

并利用著名的 Riesz-Thorin 凸性定理来定义 F^pf.

1.3.2 $F^p, 1 < p \leqslant 2$ 的性质

设 p' 是 p 的共轭数，$1/p + 1/p' = 1$.

(1) F 变换 $F^p, 1 < p \leqslant 2$，确定一个由 L^p 到 $L^{p'}, 2 \leqslant p' < \infty$ 的有界线性变换，并且满足范数压缩的 Titchmarsh 不等式：

$$\| f^\wedge \|_{p'} \leqslant \| f \|_p,$$

同时，对于 $f \in L^1 \cap L^p$，则

$$F^1f(\xi) = F^pf(\xi), \qquad \text{a.e.} \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

这里 a.e. $\xi \in \mathbf{R}$ 表示"对几乎处处 $\xi \in \mathbf{R}$ 成立".

(2) F 变换的卷积定理：

设 $f \in L^p(\mathbf{R})$，且 $g \in L^1(\mathbf{R})$，则卷积

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du;$$

的 F 变换满足：

$$F^p[f * g](\xi) = F^pf(\xi) \cdot F^1g(\xi), \qquad \text{a.e.} \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

(3) F 变换的巴塞伐尔公式(三种形式)：

1° 设 $f, g \in L^p(\mathbf{R}), 1 < p \leqslant 2$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g^\wedge(u)du;$$

2° 设 $f \in L^p(\mathbf{R})$，而 $g, g^\wedge \in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{g(u)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u)\overline{g^\wedge(\overline{u})}du;$$

特别地，设 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u)\overline{g(u)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\overline{g^\wedge(\overline{u})}du,$$

3° 设 $f \in L^2(\mathbf{R})$，则

$$\| f \|_2 = \| f^\wedge \|_2.$$

(4) F 变换的反演公式：

设 $f \in L^p(\mathbf{R})$，且 $f^\wedge \in L^1(\mathbf{R})$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u)e^{ixu}du = f(x), \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbf{R}.$$

(5) F 变换的 θ 因子可和反演公式：

设偶函数 $\theta \in L^1(\mathbf{R})$，满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^\wedge(\xi)d\xi = 1,$$

称其为 θ 因子. 则对 $f \in L^p(\mathbf{R})$,

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta\left(\frac{u}{\rho}\right)f^{\wedge}(u)e^{iux}du = f(x),\quad \text{a.e.}\quad x\in\mathbf{R}.$$

(6) F 变换的唯一性：

设 $f\in L^p(\mathbf{R})$，且 $f^{\wedge}(\xi)=0$, a.e.，则

$$f(x)=0,\qquad \text{a.e.}\quad x\in\mathbf{R} \text{ 成立}.$$

(7) 导数的 F 变换：

设 $f\in L^p(\mathbf{R})$，且设 $f^{(r-1)}$ 为局部绝对连续的，$f^{(r)}\in L^p(\mathbf{R})$，则

$$[f^{(r)}]^{\wedge}(\xi)=(i\xi)^{(r)}f^{\wedge}(\xi),\quad \text{a.e.}\quad \xi\in\mathbf{R}.$$

(8) F 变换的导数：

设 $f\in L^p(\mathbf{R})$，且设 $(ix)f(x)\in L^p(\mathbf{R})$，则 $(f^{\wedge})'\in L^p(\mathbf{R})$，并成立

$$(f^{\wedge})'(\xi)=[(-i\cdot)f(\cdot)]^{\wedge},\quad \text{a.e.}\quad \xi\in\mathbf{R}.$$

1.4 分布的傅里叶变换

前3节给出了 $f\in L^p(\mathbf{R})$，$1\leqslant p\leqslant 2$ 的傅里叶变换理论．自然的问题是 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$2<p<\infty$ 的情形如何？我们对更一般情形进行讨论，考虑"分布"的傅里叶变换．

1.4.1 分布空间及其基本性质

分布，又称广义函数，是法国数学家施瓦兹(L.Schwartz)在20世纪40年代末提出的．它源于经典的数学物理方法、傅里叶分析与物理学、量子力学．短短几十年，分布理论不仅在数学的各个分支，而且在理论物理中得到愈来愈广泛的应用．同时它自身也已成为现代数学的一个重要组成部分．

本节以介绍 $D^*(\Omega)$ 分布为主，对于 $S^*(\Omega)$ 分布与 $E^*(\Omega)$ 分布，读者可自己推演．

1. 空间 $D(\Omega)$ 及其拓扑结构

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开子集，$n\in\mathbf{N}$，$K\subset\Omega$ 为 Ω 中的紧子集．记

$$\operatorname{supp}(f)=\overline{\{x\in\Omega: f(x)\neq 0\}},$$

$$\mathbf{C}^m(K)=\{f\in\mathbf{C}^m(\Omega):\operatorname{supp}(f)\subset K\},$$

$$\mathbf{C}^{\infty}(K)=\{f\in\mathbf{C}^{\infty}(\Omega):\operatorname{supp}(f)\subset K\}=\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathbf{C}^m(K).$$

于是，在 Ω 上定义的具紧支集的函数类是 $\bigcup_K\mathbf{C}^m(K)$ 与 $\bigcup_K\mathbf{C}^{\infty}(K)$，分别记为 $\mathbf{C}_0^m(\Omega)$ 与 $\mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$．

(1) $\mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ 上引入**归纳极限拓扑**

在 Ω 中取渐张紧集列 K_j，使满足 $K_j\subset K_{j+1}$ 且 $\bigcup_j K_j=\Omega$．作

$$\mathbf{C}^{\infty}(K_j)\equiv E_j,\qquad j=1,2,\cdots,$$

易见 $E_j\subset E_{j+1}$，并且恒同映射(或称嵌入映射)

$$I_j: E_j\to E_{j+1}$$

是连续的;进而还有 $C_0^\infty(\Omega)=\bigcup_j E_j$.现在赋予 $C_0^\infty(\Omega)=\bigcup_j E_j$ 如下的拓扑:若 V 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的凸、均衡、吸收集(凸、均衡、吸收集等概念,请参考"拓扑学"部分),则当且仅当 $V\cap E_j$ 为 E_j 的零元的邻域时,V 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 的零元的邻域.

按照上述过程定义的 $C_0^\infty(\Omega)$ 的拓扑,使 $C_0^\infty(\Omega)$ 成为一个 T_2 型局部凸空间,记为 $D(\Omega)$ 称为 $C_0(\Omega)$ 的归纳极限拓扑.以后记号 $D(\Omega)$ 与 $C_0^\infty(\Omega)$ 将同时使用.

在 $D(\Omega)$ 的归纳极限拓扑之下,序列 $\{\varphi_k\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ 趋于 0 是指:

1° 存在一个紧集 $K\subset\Omega$,使对所有 $k\in\mathbf{N}$,有 $\mathrm{supp}(\varphi_k)\subset K$;

2° 在 K 上,对任一固定的指标 α,序列 $\{D^\alpha\varphi_k\}$ 关于 x 一致收敛于零.

注 1° 归纳极限拓扑与渐张紧集列的选取无关;

2° $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C^m(\Omega)$, $m\in\mathbf{Z}_+$ 中稠密;

3° 集 A 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 内为有界的,当且仅当存在紧子集 $K\subset\Omega$,使

① 对每个 $\varphi\in A$, $\mathrm{supp}(\varphi)\subset K$,

② 对每个 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$,存在常数 C_α,使对每个 $x\in K$ 与每个 $\varphi\in A$ 成立 $|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant C_\alpha$.

4° 嵌入映射 $I:C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$ 是连续的;$C_0^\infty(\Omega)$ 的每个有界子集都是 $C^\infty(\Omega)$ 的有界子集.

5° $C_0^\infty(\Omega)$ 在归纳极限拓扑之下(即 $D(\Omega)$)是完备空间.

6° $C_0^\infty(\Omega)$ 在半范数列(对紧集序列 K_j)

$$p_{m,j}(f)=\sup_{K_j}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha f|,\quad j=1,2,\cdots,\quad m=0,1,\cdots$$

之下成为一个拓扑空间,记为 $E(\Omega)$.

(2) 空间 $D(\mathbf{R}^n)$ 中的元的例

设 $a>0$,令

$$j_a(x)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{a^2}{(|x|^2-a^2)}\right\}, & x<a,\\ 0, & x\geqslant a.\end{cases}$$

利用 $j_a(x)$,并由 Friedrich 软化子方法,可以构造出 $D(\mathbf{R}^n)$ 中许多的元.事实上,对任一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续且具紧支集的函数 $f(x)$,定义

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(y)J_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{c_\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^n}f(y)j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$c_\varepsilon=\int_{\mathbf{R}^n}j_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y.$$

由于 $\mathrm{supp}(j_\varepsilon(x))$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集,且显见 $j_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,故卷积 $f_\varepsilon(x)$ 也是任意次连续可微的.若设 $\mathrm{supp}(f)=K$,则

$$\mathrm{supp}(f_\varepsilon)\subset K_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,K)\leqslant\varepsilon\}.$$

2. $D^*(\Omega)$ 分布空间

(1) $D^*(\Omega)$ 分布的定义

$D(\Omega)$ 上的连续线性泛函的全体所成的集，记为 $D^*(\Omega)$，赋予弱* 拓扑，成为局部凸空间，即 $D(\Omega)$ 的对偶空间，称为 $D^*(\Omega)$ 分布空间，其中的元称为 **$D^*(\Omega)$ 分布，或简称分布.**

通常把 $D^*(\Omega)$ 中的元记为 f，$D(\Omega)$ 中的元记为 φ，而把 f 对 φ 的作用记为

$$\langle f,\varphi\rangle.$$

于是 $D(\Omega)$ 上的连续线性泛函 $f\in D^*(\Omega)$ 是指 f 满足

1° $\langle f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\rangle=\alpha_1\langle f,\varphi_1\rangle+\alpha_2\langle f,\varphi_2\rangle$,

$\varphi_1,\varphi_2\in D(\Omega)$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{K}$.

2° 对于 $K\subset\Omega$ 为 Ω 的任一紧子集，存在 C 与 $k\geqslant 0$ 为依赖于 K 的常数，且 $k\in\mathbf{Z}^+$，使对一切 $\varphi\in\mathbf{C}^\infty(K)$ 成立：

$$\langle f,\varphi\rangle\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant K}\sup|D^\alpha\varphi|,\quad \varphi\in\mathbf{C}^\infty(K).$$

若在上述 2° 中，对 Ω 的任意紧子集 K 存在相同的 $k\geqslant 0$，而 C 可与 K 有关，则称 f 为阶 $\leqslant k$ 的 **$D^*(\Omega)$ 分布.**

(2) $D(\Omega)$ 上的线性泛函 f 连续的一个充要条件

$f\in D^*(\Omega)$ 当且仅当

$$\lim_{\varphi_j\to 0}\langle f,\varphi_j\rangle=0$$

对任满足 $\varphi_j\to 0$ 的序列 $\{\varphi_j\}\subset D(\Omega)$ 成立.

例1 若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$（在 Ω 的任一有界子集上都是 L 可积的），则 $f\in D^*(\Omega)$. 亦即 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\subset D^*(\Omega)$.

事实上，对任意 $\varphi\in D(\Omega)$，令

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

它是 0 阶分布. 进而，可以证明，$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\to D^*(\Omega)$ 为一一嵌入映射. 称 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中的元为正规分布. 由此例可知，分布是经典情形了函数概念的一种推广.

例2 δ 分布（狄拉克分布）

对任意 $\varphi\in D(\Omega)$，定义

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0),\quad \varphi\in D(\Omega).$$

它也是一个零阶 $D^*(\Omega)$ 分布，但它不是正规分布. 因为若 $\delta(x)$ 由某个 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 生成. 则取 $\varphi=j_\epsilon$，由定义

$$\langle\delta,j_\epsilon\rangle=j_\epsilon(0)=c^{-1}.$$

另一方面，因为 δ 由 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 生成，故

$$\langle\delta,j_\epsilon\rangle=\int f(x)j_\epsilon(x)\mathrm{d}x.$$

勒贝格收敛定理给出当 $\epsilon\to 0$ 时，$\langle\delta,j_\epsilon\rangle\to 0$，这与 $\langle\delta,j_\epsilon\rangle=j_\epsilon(0)$ 矛盾，于是 $\delta\,\bar{\in}\,L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 然而，有趣的是，$\delta$ 却是一个拉东测度. 例如取 $\mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{R}$，即 $n=1$，并取一个称为赫维赛德(Heaviside)函数 $H(x)$ 的局部可积函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

则

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \mathrm{d}H(x).$$

(3) $D^*(\Omega)$ 分布的运算

(A) 分布的相等与等于 0

若 $f \in D^*(\Omega)$，且对每个 $\varphi \in D(\Omega)$ 都有 $\langle f, \varphi \rangle = 0$，则称分布 $f = 0$.

若 $f, g \in D^*(\Omega)$，且 $f - g = 0$，则称两分布相等 $f = g$.

(B) 分布的线性运算

设 α_1, α_2 为常数，$f, g \in D^*(\Omega)$，则 $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ 定义为一个 $D^*(\Omega)$ 分布，它满足

$$\langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle g, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

(C) 分布的平移与反射

当 $\Omega = \mathbf{R}^n$ 时，任取 $a \in \mathbf{R}^n$.

平移：若 $f \in D^*(\mathbf{R}^n)$，则 f_a 定义为一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$ 分布，它满足

$$\langle f_a, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_{-a} \rangle, \qquad \varphi \in D^*(\mathbf{R}^n),$$

这里 $\varphi_{-a}(x) = \varphi(x + a)$ 为通常函数的平移. 称 f_a 为 f 的平移，也记为 $\tau_a f = f_a$.

反射：若 $f \in D^*(\mathbf{R}^n)$，则 $\tilde{f}$ 定义为一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$ 分布，它满足

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \qquad \varphi \in D(\mathbf{R}^n),$$

这里 $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ 为通常函数的反射. 称 $\tilde{f}$ 为 f 的反射.

若 $\tilde{f} = f$，则称 f 为偶分布；若 $\tilde{f} = -f$，则称 f 为奇分布.

(D) 分布与函数的乘积

若 $f \in D^*(\Omega)$，$a \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$，则 af 定义为一个 $D^*(\Omega)$ 分布，它满足

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle, \qquad \varphi \in D(\Omega).$$

这里 $(a\varphi)(x) = a(x)\varphi(x)$ 为通常函数的乘积. 不难证明：若 $f_j \in D^*(\Omega)$，$f_j \to 0$，则 $af_j \in D^*(\Omega)$ 且 $af_j \to 0$. 称满足此条件的函数所成的空间为乘子空间. 因此 $D^*(\Omega)$ 的乘子空间为 $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$，而 $a \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ 为 $D^*(\Omega)$ 的一个乘子.

例如，取 $a(x) = x$，且 $\delta \in D^*(\Omega)$，则 $x\delta \in D^*(\Omega)$ 是一个零分布，因为

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(x)\varphi(x) \mid_{x=0},$$

当取 $a(x) = x$ 时，恒有 $x\varphi(x) \mid_{x=0} = 0$. 有趣的是，这里出现了“零因子”.

(E) 分布的导数

若 $f \in D^*(\Omega)$，则 $\partial x_j f$ 定义为一个 $D^*(\Omega)$ 分布，它满足

$$\langle \partial x_j f, \varphi \rangle = \langle f, \partial x_j \varphi \rangle, \qquad \varphi \in D(\Omega),$$

这里 $\partial x_j \varphi(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)$ 为通常函数的导数. 称 $\partial x_j f$ 为**分布 f 的导数**. 一般地，对指标 α，定义

$$\langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha} \varphi \rangle, \qquad \varphi \in D(\Omega),$$

并且称 $D^{\alpha} f$ 为分布 f 的 α 阶导数.

关于分布的导数有：$D^*(\Omega)$ 分布为无穷次可导分布，并且结果与求导次序无关，例如，$\partial^2_{x_i x_j} f = \partial^2_{x_j x_i} f$，等等.

例如，有 $H' = \delta$. 事实上，有

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

注意到在上述那些分布的运算的定义中，对于 $\partial x_j f$，它被定义为满足等式

$$\langle \partial x_j f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial x_j \varphi \rangle$$

的一个分布，但满足此等式的 $\partial x_j f$ 是否确是一个分布，在理论上还需要证明：当 $\{\varphi_k\} \subset D(\Omega)$ 且 $\varphi_k \to 0$ 时，蕴含 $\langle \partial x_j f, \varphi_k \rangle \to 0$. 而实际上，$D(\Omega)$ 的弱 * 拓扑保证了这一点（参考"泛函分析"部分）.

(F) 分布的支集

若 $f \in D^*(\Omega)$，对于 Ω 的一开子集 V，如果等式

$$\langle f, \varphi \rangle = 0$$

对所有满足 $\varphi \in D(\Omega)$，$\mathrm{supp}(\varphi) \subset V$ 的都成立，则称 f 在 V 上为零.

由定义可证得：设 $\{V_i\}_{i \in I} \subset \Omega$ 为一族开子集，又设 $f \in D^*(\Omega)$ 在每个 V_i 上为0，则 f 在并集 $\bigcup_{i \in I} V_i$ 上为0. 因此能定义分布的支集如下.

对于 $f \in D^*(\Omega)$，设 $V \subset \Omega$ 是使 f 为0的最大开子集（亦即 $V = \bigcup_{i \in I} V_i$，而 $\{V_i\}_{i \in I}$ 是使 f 为0的所有开子集 $V_i \subset \Omega$ 的集族），则称 $\Omega \setminus V$ 为 f 的支集，记为 $\mathrm{supp}(f)$. 它是 Ω 中的相对闭子集.

例如，有 $\mathrm{supp}(\delta) = \{0\}$.

(G) 卷积

$\mathbf{R}^n$ 上两函数 f 与 g 的卷积定义为

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) g(x - y) \mathrm{d}y. \tag{1-2}$$

它具有很多重要性质.

1° 当式(1-2)中积分存在时，有

$$(f * g)(x) = (g * f)(x),$$
$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x).$$

2° 设 $g \in C^k$，$f \in C_0$，则 $f * g \in C^k$，且

$$D^{\alpha}(f * g) = f * D^{\alpha} g, \quad |\alpha| \leqslant k.$$

3° 若 $f \in L^1$，$g \in L^p$，$p \geqslant 1$，则 $h = f * g \in L^p$，且

$$\| h \|_p \leqslant \| f \|_1 \cdot \| g \|_p.$$

这个不等式称为豪斯多夫 - 尤格（Hausdorff-Young）不等式，它有如下推广：若 p, q, r 是实数，$1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$，还满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$，则当 $f \in L^p$，$g \in L^q$ 时，有 $f * g \in L^r$，并成立

$$\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

4° 关于$f*g$的支集,有

$\text{supp}(f*g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g) = \{x+y: x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g)\}$.

5° 利用弗里德里希(Friedrich)软化子,将函数正则化.即对任意 $\Phi \in C_0^\infty$,且满足 $0 \leqslant \Phi \leqslant 1, \int_{\mathbf{R}^n} \Phi \mathrm{d}x = 1$,令

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

则 $f \in L^p$ 蕴含 $f_\varepsilon = \Phi_\varepsilon * f \in C^\infty$,且当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时,有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

进而,若 $f \in C_0^k$,则 $f_\varepsilon \in C_0^\infty$,且有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup |D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f| = 0, \qquad |\alpha| \leqslant k.$$

现在把卷积的概念推广到分布上去.先定义 $f \in D^*(\Omega), \varphi \in D(\Omega)$ 的卷积,再定义 $f, g \in D^*(\Omega)$ 的定义.

设 $f \in D^*(\Omega), \varphi \in D(\Omega)$,定义

$$(f*\varphi)(x) = \langle f, \tilde{\varphi}_x \rangle$$

为 $f \in D^*(\Omega), \varphi \in D(\Omega)$ 的卷积,其中 $\tilde{\varphi}_x(y) = \tilde{\varphi}(y-x) = \varphi(x-y)$.

卷积有如下基本性质.

1° 设$f \in D^*(\mathbf{R}^n), \varphi \in D(\Omega)$,则 $f*g \in C^\infty(\Omega)$,且

$$\text{supp}(f*\varphi) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(\varphi).$$

2° 若$f \in D^*(\Omega)$, φ, $\psi \in D(\Omega)$,则

$$(f*\varphi)*\psi = f*(\varphi*\psi).$$

3° 设$f \in D^*(\mathbf{R}^n)$,则 $f*\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;且

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = f \quad \text{在 } D^*(\mathbf{R}^n) \text{ 中成立},$$

这里 $\Phi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \Phi \in C_0^\infty$ 且满足 $0 \leqslant \Phi \leqslant 1, \int_{\mathbf{R}^n} \Phi \mathrm{d}x = 1$,即弗里得里希软化子.

现在定义两个分布的卷积.设 $f, g \in D^*(\mathbf{R}^n)$,且至少有一个,例如 g,具紧支集.定义 $f*g$ 为满足下式的一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$ 分布

$$\langle f*g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi_{-x} \rangle \rangle, \varphi \in D(\mathbf{R}^n),$$

这里 $\varphi_x(y) = \varphi(y-x)$ 是 φ 的右平移.为说明上述定义有意义,指出

1) 作为 x 的函数,$\psi(x) = \langle g, \varphi_{-x} \rangle \in D(\mathbf{R}^n)$.

因为

$$\psi(x) = \langle g, \varphi_{-x} \rangle = \langle \tilde{g}, \tilde{\varphi}_{-x} \rangle = \tilde{g} * \varphi(x),$$

而 $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,并且 $\text{supp}(\psi) \subset \text{supp}(\tilde{g}) + \text{supp}(\varphi)$ 蕴含 $\text{supp}(\psi)$ 为紧集,故 $\psi \in D(\mathbf{R}^n)$.

2) 由$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f,\psi\rangle$定义的$f*g$为$D(\mathbf{R}^n)$上的连续线性泛函.

因为显然它是线性的,并且是$D(\mathbf{R}^n)$上的泛函.取$D(\mathbf{R}^n)$中的$\varphi_j\to 0$,可以证明$\psi_j(x)=\langle g,(\varphi_j)_{-x}\rangle\to 0$在$D(\mathbf{R}^n)$中成立,从而$<f*g,\varphi_j>\to 0$,故$f*g\in D^*(\mathbf{R}^n)$.

卷积有如下重要性质.

设$f,g,h\in D^*(\mathbf{R}^n)$,且其中至少有一个具紧支集,则

1° $f*(g*h)=(f*g)*h$; (结合律)

2° $f*g=g*f$; (交换律)

3° $(\alpha f+\beta g)*h=\alpha f*h+\beta g*h$; (分配律)

4° $f*\delta=\delta*f$; (单位元)

5° 对$f\in D^*(\mathbf{R}^n)$,有

$$\tau_h f=\delta_h*f,$$

这里τ_h为平移算子:对$\mathbf{R}^n$上的函数$f(x)$,定义

$$(\tau_h f)(x)=f(x-h),$$

分布的平移则定义为

$$\langle\tau_h f,\varphi\rangle=\langle f,\tau_{-h}\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(\mathbf{R}^n);$$

对$\delta_h\in D^*(\mathbf{R}^n)$,定义为$\langle\delta_h,\varphi\rangle=\varphi(h)$;

6° 卷积与平移的可换性:对任意$f,g\in D^*(\mathbf{R}^n)$,

$$f*\tau_h g=\tau_h f*g=\tau_h(f*g);$$

7° 设$f,g\in D^*(\mathbf{R}^n)$,且$\mathrm{supp}(g)$为紧集,则对任意指标α,有

$$D^\alpha(f*g)=D^\alpha f*g=f*D^\alpha g.$$

写出以下简单的步骤,说明性质(7°)的正确性.任取$\varphi\in D(\mathbf{R}^n)$,则

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha(f*g),\varphi\rangle&=(-1)^{|\alpha|}\langle f*g,D^\alpha\varphi\rangle=\\&\langle f,(-1)^{|\alpha|}\langle g,(D^\alpha\varphi)_{-x}\rangle\rangle=\\&\langle f,(-1)^{|\alpha|}\langle g,\tau_{-x}(D^\alpha\varphi)\rangle\rangle=\\&\langle f,(-1)^{|\alpha|}\langle g,D^\alpha(\tau_{-x}\varphi)\rangle\rangle=\\&\langle f,\langle D^\alpha g,\varphi_{-x}\rangle\rangle=\langle f*D^\alpha g,\varphi_{-x}\rangle.\end{aligned}$$

等式另一部分可类似地得到.

8° 当$f,g\in D^*(\mathbf{R}^n)$时,

$$\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g).$$

注5 分布卷积$f*g$的定义中,f与g必须有一个具紧支集的条件还可以减弱;此外还可以讨论分布的张量积,流形上的分布等等,但已属专门课题,有兴趣的读者可以参考有关文献.

1.4.2 施瓦兹空间及其上的F变换

1.施瓦兹空间及其上的傅里叶变换

施瓦兹空间,又称急降函数空间,定义为

$$S=\{\varphi\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n):\sup_{\mathbf{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|<+\infty,\alpha,\beta\in\mathbf{P}^n\},\tag{1-65}$$

这里

$\mathbf{C}^m(\Omega)=\{f:f$ 为 Ω 上具有直到 m 阶在内的连续偏导数的函数$\}$,

$$m\in\mathbf{Z}_+=\{0,1,\cdots\}=\{0\}\cup\mathbf{N}.$$

$$\mathbf{C}^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty}\mathbf{C}^m(\Omega).$$

在 S 上引入半范数族$\{p_{\alpha,\beta}:\alpha,\beta\in\mathbf{P}^n\}$,其中

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{\mathbf{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi|,\quad \alpha,\beta\in\mathbf{P}^n,$$

这样,S 成为一个**弗雷歇空间**(定义见"泛函分析"部分).

我们也赋予 $C^\infty(\Omega)$ 半范数$\{P_{mj}(f):f\in\mathbf{C}^\infty(\Omega)\}$ 如下

$$P_{mj}(f)\sup\sum_{\alpha\leqslant m}|D^\alpha f|,j\in /\!/ V;m\in P,$$

则 $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ 成为弗雷歇空间,并把它化为 $E(\Omega)$.

为了方便起见,约定微分算子 D 中已带有因子$\frac{1}{i}$:

$$D_x=(D_{x_1},D_{x_2},\cdots,D_{x_n})=(\frac{1}{i}\partial x_1,\frac{1}{i}\partial x_2,\cdots,\frac{1}{i}\partial x_n).$$

$\varphi\in S$ 的傅里叶变式$\varphi^\wedge$ 定义为

$$\varphi^\wedge(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx,\quad \xi\in\mathbf{R}^n,$$

其中$\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i$,记 $F:\varphi\to\varphi^\wedge$,称映射 F 为S上的傅里叶变换,傅里叶变换也记为 $\varphi^\wedge=F\varphi$.显然,当$f\in L^p(\mathbf{R})\cap S,1\leqslant p\leqslant 2$时,与前3节定义的傅里叶变换是一致的.

2.施瓦兹空间上傅里叶变换的重要性质

(1) 若 $\varphi\in S$,则 $\varphi^\wedge\in S$,且

$(D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi)=\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n,$

$(x^\alpha\varphi)^\wedge(\xi)=(-D_\xi)^\alpha\varphi^\wedge(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n.$

(2) 若 $\varphi\in S$,则

$$D_\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi)=[(-x)^\alpha\varphi(x)]^\wedge(\xi),$$

$$\xi^\alpha\varphi^\wedge(\xi)=(D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi),$$

而且,若在 S 中,$\varphi_j\to 0$,则必有 $\varphi_j^\wedge\to 0$(在 S 中),因此傅里叶变换 $F:\varphi\to\varphi^\wedge$ 是 S 到自身的连续线性映射.

(3) 傅里叶变换 F 的逆变换公式

对于 $\varphi\in S$,傅里叶变换反演公式为

$$F^{-1}:\varphi^\wedge\to\varphi,$$

其中
$$\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi^\wedge(\xi)d\xi.$$

并且 $F:S\to S$ 为拓扑同构.进而,

$$F^{-1}(\varphi^\wedge)=(2\pi)^{-n}F(\varphi^{\sim\wedge}).$$

故 F^{-1} 是 F 的逆变换，一对一，且双方连续. 又据反射运算：$\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(-x)$ 是 S 到 S 上的同构. 从而得到 $F: S \to S$ 为拓扑同构.

(4) 设 $\varphi \in S$，则

1° $F(\tilde{\varphi}) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)$,

$\tilde{F}(\varphi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)$;

2° $F(\tau_h \varphi)(\xi) = e^{-i\langle h, \xi\rangle} F(\varphi)(\xi)$,

$\tau_h(F(\varphi)(\xi)) = F[e^{i\langle x, h\rangle}\varphi(x)](\xi)$;

3° $F(\varphi(cx))^\wedge(\xi) = |c|^{-n} F(\varphi)(c^{-1}\xi), \quad c \neq 0$,

$F(\varphi)(C\xi) = C^{-n} F(\varphi(C^{-1}x))(\xi), \quad C \neq 0$,

4° 设 $f, g \in S$，则 $f * g \in S$，且

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g),$$

$$F(f \cdot g) = (2\pi)^{-n} F(f) * F(g).$$

5° ((帕塞瓦尔 Parseval) 等式)　若 $f, g \in S$，则

$$\int f^\wedge(x) g(x) dx = \int f(\xi) g^\wedge(\xi) d\xi$$

或

$$\int f(x)\overline{g(x)} dx = (2\pi)^{-n} \int f^\wedge(\xi)\overline{g^\wedge(\xi)} d\xi.$$

1.4.3 分布的傅里叶变换

本节介绍物理学与工程技术中常用的 F 变换的定义及其重要性质. 取 $\Omega = \mathbf{R}^n$.

1. 三种分布空间

用 1.4.1 节同样的思路来定义 $S^*(\Omega)$ 分布与 $E^*(\Omega)$ 分布，也就是空间 $S(\Omega)$ 与 $E(\Omega)$ 上的连续线性泛函.

对于 $D(\mathbf{R}^n)$、$S(\mathbf{R}^n)$(施瓦兹空间) 和 $E(\mathbf{R}^n)$，以及它们的分布空间 $D^*(\mathbf{R}^n)$、$S^*(\mathbf{R}^n)$(施瓦兹分布空间) 和 $E^*(\mathbf{R}^n)$，有如下关系：

(1) $D(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n) \subset E(\mathbf{R}^n)$,

并且 $D(\mathbf{R}^n)$ 在 $S(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，$S(\mathbf{R}^n)$ 在 $E(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. (1-3)

(2) $E^*(\mathbf{R}^n) \subset S^*(\mathbf{R}^n) \subset D^*(\mathbf{R}^n)$.

(3) $E^*(\mathbf{R}^n) = \{f \in D^*(\mathbf{R}^n); \mathrm{supp}(f)$ 是紧集$\}$. (1-4)

$S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布，又称缓增分布. 由 $S(\mathbf{R}^n)$ 拓扑结构知，当且仅当存在非负整数 k, m 与常数 $c = c_{k,m}$，使对每个 $\varphi \in S$ 有

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant m} \sup_{\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \qquad (1\text{-}5)$$

时，$f \in S^*$.

由公式(1-3)、(1-4) 与(1-5) 知，$S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布足够大. 再举一些例子.

例 3　$L^p(\mathbf{R}^n) \subset S^*$.

任取 $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$,对任意 $\varphi \in S$,有

$$|\langle g,\varphi\rangle| = \left|\int \varphi(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|g\|_p \|\varphi\|_q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.但因 $S \subset L^r(\mathbf{R}^n)$ 对任意 $r, 1 \leqslant r \leqslant \infty$ 成立,故对 p 的共轭数q,有

$$\|\varphi\|_q = \left(\int |\varphi(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\sup_{\mathbf{R}^n}(1+|x|^2)^{(n+1)/(2q)}|\varphi(x)|\cdot\left(\int(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant$$

$$c\sup_{\mathbf{R}^n}(1+|x|^2)^{(n+1)/(2q)}|\varphi(x)|,$$

故知存在常数 $k,m \in \mathrm{P}$ 及正常数 $c_{k,m}$,使$\langle g,\varphi\rangle$ 满足(1-5)式.

例 4 $O_M^n(\mathbf{R}^n) \subset S^*$,这里

$O_M^n(\mathbf{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$:对 $\alpha \in \mathbf{P}^n$,存在 $C(\alpha), N(\alpha)$,使

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant C(\alpha)(1+|x|^2)^{N(\alpha)}\}.$$

同样只须按例 1 方式估计$\langle g,\varphi\rangle$,由 $g \in O_M^n(\mathbf{R}^n)$ 与 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ 的条件便得 $O_M^n(\mathbf{R}^n) \subset S^*(\mathbf{R}^n)$.空间 $O_M^n(\mathbf{R}^n)$ 称为缓增 C^∞ 函数空间.

空间 $O_M^n(\mathbf{R}^n)$ 的拓扑结构:由半范数族

$$p_{f,\alpha}(\varphi) = \sup_{\mathbf{R}^n}|f(x)D^\alpha\varphi(x)|,$$

其中$f \in S(\mathbf{R}^n), \varphi \in O_M^n, \alpha \in \mathbf{P}^n$.它只是一个完备局部凸拓扑空间,但却不具有可数基.当且仅当对每个 $f \in S(\mathbf{R}^n)$ 与每个 $\alpha \in \mathbf{P}^n$,序列$f(x)D^\alpha\varphi_j(x) \to 0$关于 $x \in \mathbf{R}^n$ 是一致的;或等价地,对每个 $f \in S(\mathbf{R}^n)$,序列 $f\varphi_j \to 0$ 在 $S(\mathbf{R}^n)$ 中成立时,序列 $\varphi_j \to 0$(在 $O_M^n(\mathbf{R}^n)$ 中).

例 5 一切在 ∞ 处具有多项式增长性的连续函数

$$f(x) = O(1)|x|^N, \qquad |x| \to +\infty,$$

都定义一个 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布,当然它也是一个 $D^*(\mathbf{R}^n)$ 分布.

继续本节开始的关于空间的关系,有

(4) $S(\mathbf{R}^n) \subset O_{M(\mathbf{R}^n)}^n \subset S^*(\mathbf{R}^n)$,并且 $S(\mathbf{R}^n)$ 在 $O_M^n(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

(5) $S^*(\mathbf{R}^n)$(傅里叶分布的傅里叶变换)

若 $f \in S^*(\mathbf{R}^n)$,则对任意 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$,$\langle f,\varphi^\wedge\rangle$ 确定 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 上一个连续线性泛函,记作 $f^\wedge \in S^*(\mathbf{R}^n)$,即

$$\langle f^\wedge,\varphi\rangle = \langle f,\varphi^\wedge\rangle, \quad \varphi \in S(\mathbf{R}^n).$$

称 $f^\wedge$ 为 f 的傅里叶变换.若记 $F: f \to f^\wedge$,则有

$F: f \to f^\wedge$ 是 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 到自身的拓扑同构.其逆映射有意义,表示为 F^{-1},也是 $S(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性泛函,满足

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle F^{-1}f,\varphi^\wedge\rangle, \quad \varphi \in S(\mathbf{R}^n).$$

(6) $S^*(\mathbf{R}^n)$(施瓦兹空间)分布的傅里叶变换的性质

以下等式都在分布 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 意义下成立.

1° 设 $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$,则 $(D^\alpha f) = \xi^\alpha f^\wedge$;

2° 反射与平移公式:

$$F(\tilde{f}) = (2\pi)^n F^{-1}(f);\qquad \tilde{F}(f) = (2\pi)^n F^{-1}(f);\tag{1-6}$$
$$\tau_h f^\wedge = [e^{i\langle x,h\rangle} f]^\wedge.$$

3° 帕塞瓦尔等式: (1-7)

$$(f,g) = (2\pi)^{-n}(f^\wedge, g^\wedge),\quad f\in S^*(\mathbf{R}^n), g\in S^*(\mathbf{R}^n),$$

其中 $(f,g) = \langle f,\overline{g}\rangle$,称为埃尔米特配合.因此(1-7)式就是

$$\langle f,\overline{g}\rangle = (2\pi)^{-n}\langle f^\wedge, \overline{g^\wedge}\rangle.$$

(7) $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布的卷积:

$S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布的卷积与 $D^*(\mathbf{R}^n)$ 分布的卷积有类似之处,也有不同之点,所以从定义开始.

定义 1　设 $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$, $g\in S^*(\mathbf{R}^n)$,定义 f 与 g 的卷积为

$$f*g(x) = \langle f, \tilde{g}_x\rangle,$$

其中 $\tilde{g}_x(y) = \tilde{g}(y-x) = g(x-y)$,亦即 $\tilde{g}_x = \tau_x\tilde{g}$.

定义 2　设 $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$, $g\in E^*(\mathbf{R}^n)$,定义 f 与 g 的卷积为一个 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 分布,它满足

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f,\langle g,\varphi_{-x}\rangle,\qquad \varphi\in S(\mathbf{R}^n).$$

卷积的性质

1° 设 $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$, $g\in S^*(\mathbf{R}^n)$,则

$f*g\in O_m^n$,并且有

$$(f*g)^\wedge = f^\wedge\cdot g^\wedge;$$

2° 若 $g\in E^*(\mathbf{R}^n)$,则 $g^\wedge(\xi) = \langle g, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle$,且 $g\in O_M^n(\mathbf{R}^n)$;

3° 若 $f\in S^*(\mathbf{R}^n)$, $g\in E^*(\mathbf{R}^n)$,则 $f*g\in S^*(\mathbf{R}^n)$,且成立

$$(f*g)^\wedge = f^\wedge\cdot g^\wedge.$$

例 6　$\delta\in E^*(\mathbf{R}^n)$,由

$$\delta^\wedge(\xi) = \langle\delta, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle = e^{-i\langle x,\xi\rangle}\big|_{x=0} = 1,$$

有

$$(\delta^{(\alpha)})^\wedge(\xi) = (\delta^{(\alpha)}, e^{-i\langle x,\xi\rangle}) = \langle\delta,(e^{-i\langle x,\xi\rangle})^{(\alpha)}\rangle$$
$$= (e^{-i\langle x,\xi\rangle})^{(\alpha)}\rangle\big|_{x=0} = \xi^\alpha.$$

从而

$$(\delta^\alpha)^\wedge(3) = \xi^{(\alpha)}.$$

例 7　$1\in S^*(\mathbf{R}^n)$,故对 $\varphi\in S^*(\mathbf{R}^n)$,有

$$\langle 1^\wedge,\varphi\rangle = \langle 1,\varphi^\wedge\rangle = \int\varphi^\wedge(\xi)d\xi$$
$$= (2\pi)^n(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle 0,\xi\rangle}\varphi^\wedge(\xi)d\xi$$

$$= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n \langle \delta, \varphi \rangle.$$

从而

$$1^\wedge = (2\pi)^n \delta.$$

由于 δ 不是一个函数，而 1 却是经典意义下性质很好的函数，因此可以感到用傅里叶变换处理问题常会带来很多优越性，这种处理问题的思想在近代数学中是屡见不鲜的.

例 8 $x^\alpha \in S^*(\mathbf{R}^n)$，利用公式得

$$(x^\alpha)^\wedge = (-D)^\alpha 1^\wedge = (2\pi)^n \mathrm{i}^\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

以上讨论只是给出分布的傅里叶变换的最基本的性质，还可以研究 $S(\mathbf{R}^n)$ 与 $S^*(\mathbf{R}^n)$ 中元的张量积及其傅里叶变换、流形上分布及其傅里叶变换等等.

1.4.4 维纳 - 帕列定理

函数在无穷远处的衰减性质与其傅里叶变换光滑性质有一定的联系，这一点是从经典的维纳 - 帕列（Wiener-Paley）定理知道的. 而后为了更深入地讨论函数或分布的性质，就推广了经典的 W-P 定理，得到维纳 - 帕列 - 施瓦兹（Wiener-Paley-Schwartz）定理.

称在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上解析的函数 $f(z)$ 为**超越整函数**.

1. 经典 W-P 定理

设 $f(z)$ 为 C 平面上的指数型超越整函数，即：存在正常数 A 与 C，使 $|f(z)| \leqslant c\mathrm{e}^{A|z|}$，则当且仅当存在 $\varphi(x) \in L^2(-A, A)$，使

$$f(z) = c\int_{(-A,A)} \varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xz}\mathrm{d}x$$

时，$f(z)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的限制 $f(x)$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 函数.

2. 傅里叶 - 拉普拉斯变换

设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数（实值或复值）. 如果积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \xi, x\rangle} f(x)\mathrm{d}x, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n$$

存在，则称

$$f^\wedge(\zeta) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \varepsilon, x\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

为 f 的**傅里叶 - 拉普拉斯变换**，记 $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$，$\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$.

不难看出，f 的傅里叶 - 拉普拉斯变换就是函数 $\mathrm{e}^{\langle x, \eta\rangle} f(x)$ 的傅里叶变换.

3. 维纳 - 帕列 - 施瓦兹定理

若 $f(\xi)$ 是 $g \in E^*(\mathbf{R}^n)$ 的傅里叶 - 拉普拉斯变换，即

$$f(\zeta) = \langle g, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \zeta, x\rangle}\rangle, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n,$$

则 f 是满足下述条件的整函数：存在常数 $c > 0$，$A > 0$ 及 $N \in \mathbf{P}$，使

$$|f(\zeta)| \leqslant c(1 + |\zeta|)^N \mathrm{e}^{A|\mathrm{Im}\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n. \tag{1-8}$$

反之，若 $f(\zeta)$ 是满足条件(1-9)的整函数，则 $f(\zeta)$ 为某个 $E^*(\mathbf{R}^n)$ 分布 g 的傅里叶 - 拉普拉斯变换.

2　沃尔什分析与局部域分析

2.1　沃尔什分析

傅里叶-沃尔什分析,简称沃尔什分析,是20世纪70年代起兴起的一个热门课题,在编码、通信等领域中有广泛应用.在理论上,它又作为局部紧拓扑群和局部域分析一个具体例子,在调和分析和逼近论的研究中起着重要作用.本节以介绍沃尔什分析的基本理论为主.

2.1.1　沃尔什函数系

给定一整数 $p \geqslant 2$,考虑集合

$$G = \{x = (x_{-s}x_{-s+1}\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots\}: x_j \in \{0,1,\cdots,p-1\}, j \in \mathbf{Z}\}.$$

1. G 的代数结构

在 G 上定义"加法"运算,记为 $\oplus$:

$$x \oplus y = (x_j \oplus y_j), \qquad x_j \oplus y_j = x_j + y_j(\bmod p). \tag{2-1}$$

在此运算下,G 成为一个阿贝尔群,而且

$$G_0 = \{x \in G: x = (x_0, x_1, \cdots), x_j \in \{0,1,\cdots,p-1\}, j \in \mathbf{P}\}$$

是 G 的子群.

2. G 的拓扑结构

取 G 的"加法 $\oplus$" 单位元 $\mathbf{0} = (0,0,\cdots)$ 的邻域滤系基 $\mathscr{B} = \{U_k: k \in \mathbf{Z}\}$,其中的 k-邻域定义为

$$U_k = \{(0\cdots0, x_{k+1}x_{k+2}\cdots\}: x_j \in \{0,1,\cdots,p-1\}, j = k+1, k+2, \cdots\}.$$

在此结构下,G 成为一个 T_2 型局部紧空间.

3. G 是一个局部紧群

在上述代数结构与拓扑结构之下,映射

$$\lambda: G \times G \to G, \quad \lambda(x,y) = x + y$$

是连续的,因此使 G 构成一个局部紧拓扑群,并且它是全不连通的、零维的.

4. G 的特征群 G^*

G 到复平面上的映射 $\chi: G \to \mathbf{C}$ 满足

1° $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \qquad x, y \in G;$

2° $|\chi(x)| = 1, \forall x \in G,$

称为 G 的一个特征,记为 G^*. G^* 在运算"·"之下构成一个群,运算"·"定义为

$$(\chi \cdot \Psi)(x) = \chi(x) \cdot \Psi(x), \qquad \chi \cdot \Psi \in G^*, \forall x \in G.$$

赋予此群以弱* 拓扑,则 G^* 也构成一个局部紧拓扑群.可以证明

$$G^* = \{\chi_y(x): y \in G\}$$

中的元可写为

$$\chi_y(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x \odot y}, \quad x, y \in G,$$

其中 $x \cdot y = \sum_j x_j y_{1-j}$. 通常将其记为

$$\chi_y(x) = w_y(x) = w(x, y) = e^{\frac{2\pi i}{p} x \odot y}.$$

若取 $y = k$,就得到 G_0 的特征群 G_0^*:

$$G_0^* = \{w_k(x): k \in \mathbf{P}\}, \mathbf{P} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

以上 G^* 与 G_0^* 就是沃尔什函数系,它们分别是局部紧群 G 与紧子群 G_0 的特征群.

在一定的对应关系之下,G 与$[0,\infty)$是一一对应的(只须约定$[0,\infty)$中的 p-进有理点用有尽表示),G_0 则与$[0,1)$相对应.因此下面就在$[0,1)$上介绍沃尔什-傅里叶级数(简称沃尔什级数),在$[0,\infty)$上介绍沃尔什-傅里叶变换(简称沃尔什变换).

2.1.2　沃尔什级数

1.　沃尔什函数系$\{w_k(x): k \in \mathbf{P}\}$的性质

沃尔什函数系与三角函数系有非常类似的性质.

1° 乘法公式

$$w_k(x \oplus y) = w_k(x) w_k(y), \quad x, y \in [0, 1), \quad k \in \mathbf{P}.$$

2° 标准直交性

$$\int_0^1 w_k(x) w_j(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

3° 完备性

$\{w_k(x): k \in \mathbf{P}\}$ 是$[0,1)$上的完备标准直交系,也就是说,$[0,1)$上的任一个 L-可积函数 $f \in L[0,1)$,若与所有的 $w_k(x)$ 直交,即 $\int_0^1 f(x) w_k(x) \mathrm{d}x = 0$,则 $f(x) = 0$ 在$[0,1)$上几乎处处成立.

2. 按沃尔什函数展开

以 1 为周期的函数 $f(x)$,且 $f \in L[0,1]$,在形式上可展开成级数

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x), \tag{2-2}$$

其中

$$c_k = \int_0^1 f(x) \overline{w_k(x)} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbf{P}.$$

下面介绍两个收敛性定理:

定理 1　设 $S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(x)$,则

1° 设 $f(x)$ 以 1 为周期,且 $f \in L_{[0,1)}$,有

$$\lim_{n \to \infty} S_{2^n} f(x) = f(x), \quad \text{a.e.}\ x \in [0, 1);$$

2° 若$f(x)$在$[0,1)$上连续，则(2-2)式在$[0,1)$上一致成立；

3° 若$f(x)$在点$x\in[0,1)$连续，则(2-2)式在x点成立.

定理2　设$f(x)$是以1为周期的有界变差函数，则

1° 若x_0是$f(x)$的连续点或p-进有理点，那么

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x_0)=f(x_0);$$

2° 若x_0既非$f(x)$的连续点，又非p-进有理点，那么$S_k(x_0)$发散.

例9　设c为常数，对$p=2$，求

$$f(x)=\begin{cases}c, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{4};\\ -c, & \dfrac{1}{4}\leqslant x<\dfrac{3}{4};\\ c, & \dfrac{3}{4}\leqslant x<1\end{cases}$$

的沃尔什展开。

解　写出$f(x)$关于$\{w_k(x):k\in\mathbf{P}\}$的形式展式

$$f(x)\sim c_0w_0(x)+c_1w_1(x)+c_2w_2(x)+\cdots.$$

用比较系数法求得

$$f(x)=cw_3(x).$$

例10　设$f(x)=\sin\pi x,\quad x\in[0,1)$.求$f(x)$的沃尔什展式的前4项系数(取$p=2$).

解

$$a_0=\int_0^1\sin\pi xw_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi};$$

$$a_1=\int_0^1\sin\pi xw_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1\sin\pi x\mathrm{d}x=0;$$

$$a_2=\int_0^1\sin\pi xw_2(x)\mathrm{d}x=\left\{\int_0^{\frac{1}{4}}-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}+\int_{\frac{3}{4}}^1\right\}\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2}),$$

$$a_3=\int_0^1\sin\pi xw_3(x)\mathrm{d}x=\left\{\int_0^{\frac{1}{4}}-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}-\int_{\frac{3}{4}}^1\right\}\sin\pi x\mathrm{d}x=0;$$

于是

$$\sin\pi x=\frac{2}{\pi}w_0(x)+\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2})w_2(x)+\cdots$$

注6　以下是$p=2$时前16个沃尔什函数的图形.

2.1.3　沃尔什变换

如前所述，局部紧拓扑群G在一定的映射下与$[0,\infty)$是一一对应的，但与$[0,\infty)$作为一维欧氏空间$\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$的子集的拓扑结构是完全不同的，因为$\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$在通常拓扑下是一个连通的一维局部紧拓扑群，而$G\cong[0,\infty)$在2.1.1的拓扑下却是一个全不连通的零维局部紧拓扑群.两种拓扑有着不同的应用，不

可偏度.

本节记 $G = [0,\infty)$, $G^* = \{w_y(x): y \in G\}$.

1. 沃尔什函数系 $\{w_y(x): y \in G\}$ 的性质

1° 对称性

$$w(x,y) = w(y,x),$$

2° 乘法公式

$$w(x \oplus t, y) = w(x,y)w(t,y),$$
$$w(x \ominus t, y) = w(x,y)\overline{w}(t,y).$$

3° 分解公式

$$w(x,y) = w([x],y)w(x,[y]).$$

4° 伸缩公式

$$w(x,p^k y) = w(p^k x, y).$$

2. 沃尔什变换

对于 $f \in L_G^1 = L_{[0,\infty)}^1$,其傅里叶 - 沃尔什变换(简称 W- 变换)定义为

$$f^{\wedge}(\xi) = \int_{[0,\infty)} f(x)\overline{w_\xi}(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in G = [0,\infty).$$

按照 $\mathbf{R}^n$ 上傅里叶变换定义的方式,对于 W 变换同样进行:用 l.i.m. 的方式定义 L_G^2 上的 W 变换,而后定义 $L_G^p, 1 \leqslant p \leqslant 2$ 的 W 变换. 然后再在类似于施瓦兹函数类的称为"检验函数类"$\mathscr{S}$上定义 W 变换,最后在 $\mathscr{S}'$ 分布上定义 W 变换.

由于对 $\mathbf{R}^n$ 上的 F 变换讨论得很详尽,这里就不再重复全部过程. 有兴趣的读者可参考所列文献.

2.1.4 逻辑导数

从 $p = 2$ 时沃尔什函数 $w_k(x)$ 的图形知它们是逐段常数的函数. 显然,经典导数对这类函数已失去意义,因为在其取常数部分,变化率为 0,而在间断点上,导数不存在. 然而,沃尔什函数如果作为某些运动质点的轨迹,则显然仍存在变化率问题. 人们努力寻找一种新的导数,使其能表示这类逐段常数的函数的变化率. 这就是**逻辑导数**.

1. p 进逻辑导数

设 $f(x): G \to \mathbf{C}$ 为 G 上的复值函数. 给定 p 个复数

$$A_0(p) = (p-1)/2, \quad A_j(p) = \omega^j/(1-\omega^j), \quad j = 1,2,\cdots,p-1,$$

若对一点 $x \in G = [0,\infty)$,和式

$$\sum_{k=-N}^{N} p^k \{A_0 f(x) + A_1 f(x \oplus p^{-k-1}) + \cdots + A_{p-1} f(x \oplus (p-1)p^{-k-1})\},$$

当 $N \to \infty$ 时的极限存在,则称此极限值为 $f(x)$ 在点 x 的逻辑导数,记为 $f^{(1)}(x)$.

还可以定义强逻辑导数. 例如考虑 L_G^2 意义下的强导数:若存在 $g \in L_G^2$,满足

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=-N}^{N} p^k \Big(\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus jp^{-k-1}) \Big) - g(x) \right\|_{L_G^2} = 0,$$

则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的 L_G^2 强逻辑导数,记为 $D^{(1)}f(x) = g(x)$.

2. p 进逻辑导数的特征性质

1° G 的特征 $w_y(x) \in G^*$ 存在任意阶的 p 进逻辑导数 $w_y^{(k)}(x)$，并满足

$$w_y^{(k)}(x) = y^k w_y(x), \quad k \in N.$$

2° 若函数 $f: G \to \mathbf{C}$ 存在 L_G^2 强导数 $D^{(s)}f$，s 是一个正整数，满足 $f, D^{(s)}f \in L_G^2$，则 $D^{(s)}f$ 与 f 的 F 变换满足

$$[D^{(s)}f]^{\wedge}(\xi) = \xi^s f^{\wedge}(\xi), \qquad \xi \in G.$$

3° p 进逻辑导数的逆运算"p 进逻辑积分"$I_{(s)}f$(详细定义请参看文献[10])，在一定条件下满足

$$I_{(s)}(D^{(s)}f)(x) = f(x) \qquad \text{a.e.},$$
$$D^{(s)}(I\langle s\rangle f)(x) = f(x), \qquad \text{a.e.}$$

p 进逻辑导数还有许多性质，不一一列举了.

3. p 进逻辑导数的意义

在 2 中列出的 p 进逻辑导数的性质是其特征性质，因为它们刻画了导数的特征. 为说明这一点，把 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 情形作一个对比.

$\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 在通常的加法运算与通常的欧氏距离拓扑之下成为一个局部紧拓扑群，它是连通的、一维的可交换群. $\mathbf{R}$ 的特征群 $\mathbf{R}^*$ 就是

$$\mathbf{R}^* \cong \{e^{ixy}; y \in \mathbf{R}\}.$$

经典导数 $f'(x)$ 有如下性质

1° $(e^{ixy})' = iye^{ixy}$;

2° $(f^{(s)})^{\wedge}(\xi) = (i\xi)^s f^{\wedge}(\xi)$;

3° $\int df = f(+c); d\int f = f.$

由此可见，p 进逻辑导数如上定义是合理的.

沃尔什分析是一个新开拓的领域，无论在理论还是应用方面，都有许多有意义的问题等待解决.

2.1.5 沃尔什变换与 p 进逻辑导数的例

1. 沃尔什变换的例

例 11 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x \in [1,\infty), \end{cases}$ 试求 $f^{\wedge}(\xi)$.

解 $f^{\wedge}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\overline{w}(x,\xi)dx = \int_0^1 \overline{w}(x,\xi)dx =$

$$\int_0^1 \overline{w}([x],\xi)\overline{w}(x,[\xi])dx = \int_0^1 \overline{w}_{[\xi]}(x)dx.$$

利用 $w_k(x)$ 的直交性得

$$f^{\wedge}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [0,1), \\ 0, & \xi \in [1,\infty). \end{cases}$$

例 12 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 3/4, \\ 0, & 3/4 < x < \infty, \end{cases}$ 求 $f^{\wedge}(\xi)$(取 $p = 2$).

解　分段求 $f^{\wedge}(\xi)$. 由

$$f^{\wedge}(\xi)=\int_0^{3/4}\overline{w}(\xi,x)\mathrm{d}x=\int_0^{3/4}\overline{w}([\xi],x)\mathrm{d}x,$$

$$\text{当}\ 0\leqslant\xi<1\ \text{时},\quad f^{\wedge}(\xi)=\frac{3}{4};$$

$$\text{当}\ 1\leqslant\xi<2\ \text{时},\quad f^{\wedge}(\xi)=\frac{1}{4};$$

$$\text{当}\ 2\leqslant\xi<3\ \text{时},\quad f^{\wedge}(\xi)=\frac{1}{4};$$

$$\text{当}\ 3\leqslant\xi<4\ \text{时},\quad f^{\wedge}(\xi)=-\frac{1}{4};$$

$$\text{当}\ 4\leqslant\xi<\infty\ \text{时},\ f^{\wedge}(\xi)=0.$$

于是

$$f^{\wedge}(\xi)=\begin{cases}3/4, & 0\leqslant\xi<1,\\ 1/4, & 1\leqslant\xi<3,\\ -1/4, & 3\leqslant\xi<4,\\ 0, & 4\leqslant\xi<\infty.\end{cases}$$

例 13　用 $K_{[\alpha,\beta)}(x)$ 表示区间$[\alpha,\beta)$ 的特征函数,设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k K_{[k,k+1)}(x),\text{且}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

求 $f^{\wedge}(\xi)$.

解　$$f^{\wedge}(\xi)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\overline{w}_j(\xi), & 0\leqslant\xi<1;\\ 0, & 1\leqslant\xi<\infty.\end{cases}$$

例 14　求 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x\in[1,\infty)\end{cases}$的一阶逻辑导数.

解法一　对于 $x\in[0,1)$.

当 $k\geqslant0$ 时,$x\oplus jp^{-k-1}\in[0,1)$,$j=1,2,\cdots,p-1$,故 $f(x\oplus jp^{-k-1})=1$. 从而

$$\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})=\sum_{j=0}^{p-1}A_j=0;$$

当 $k<0$ 时,$x\oplus jp^{-k-1}\overline{\in}[0,1)$,$j=1,2,\cdots,p-1$,故 $f(x\oplus jp^{-k-1})=0$. 从而

$$\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})=A_0.$$

于是,当 $0\leqslant x<1$ 时,

$$f^{(1)}(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} p^k A_0 = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}.$$

对于 $x \in [jp^{-k-1}, (j+1)p^{k-1}), j = 1,2,\cdots,p-1$,则仅有 $x \oplus (p-j)p^{k-1} \in [0,1)$,其余各项为 0. 于是,联合所得结果,

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leqslant x < 1, \\ p^{-k}A_{p-j}, & jp^{k-1} \leqslant x \leqslant jp^{k-1}+1, \quad k = 1,2,\cdots \\ 0, & jp^{k-1}+1 \leqslant x < (j+1)p^{k-1}, \quad j = 1,2,\cdots,p-1. \end{cases}$$

解法二　利用沃尔什变换的性质,得

$$f^{(1)}(x) = \int_0^1 tw(x,t)\mathrm{d}t$$

与 t 在[0,1) 上的展式

$$t = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k}\Big(\sum_{j=1}^{p-1} A_j w(jp^{k-1}, x)\Big)$$

可得同样结果.

2.2　局部域分析

局部域分析是一个全新的交叉学科. 20 世纪 70 年代初、在半导体、集成电路、电子计算机的快速发展影响下,沃尔什函数及其应用也形成了高潮,不仅理论研究(特别是沃尔什逼近、沃尔什系各种算子的生成、沃尔什的快速算法等)不断深入,而且也在信息数字处理、通讯、电视、雷达与计算机科学等方面得到广泛的应用. 数学家们敏锐地观察、探索、建立了一个比沃尔什分析更深层的理论与应用学科:局部域分析. 局部域分析把沃尔什分析所研究的基本集合[0,∞)扩大到更一般的集合,在更一般的代数运算与拓扑结构之下构成一个局部紧的、全不连通的、零维的拓扑域 K,求出其特征群 K^*,然后建立局部域分析的一整套理论,包括局部域上的傅里叶变换的理论、逼近算子的生成、逻辑导数与逻辑积分、空间理论以及这些理论研究的应用,特别是在非线性科学研究中的应用,预期会有美好前景.

2.2.1　基本概念

1. 局部域

给定集合 K,在其上定义两种代数运算:加法"+"与"乘法""·",使满足

1° K 在加法运算"+"之下成为一个阿贝尔群,其单位元记为 0;

2° $K - \{0\}$ 在乘法运算"·"之下成为一个阿贝尔群,其单位元记为 1;

同时,在 K 上给出一个拓扑 τ,使 K 成为局部紧拓扑空间,并且满足

3° 映射

$$(x,y) \to x + y,$$
$$(x,y) \to x \cdot y^{-1}$$

连续,则称 K 为一个局部紧拓扑域.

例 15　1° 欧氏空间 $\mathbf{R} = (-\infty,\infty)$ 在普通数的加法与乘法运算以及通常距离

之下成为一个局部紧拓扑域. 此域是一个连通的、一维的局部紧拓扑域.

2° $G=[0,\infty)$ 在 2.1.1 定义的代数结构与拓扑结构之下成为一个局部紧拓扑域. 此域是一个全不连通的 0 维的局部紧拓扑域.

称全不连通的、局部紧拓扑域为局部域.

2. p 级数域、p-adic 域

设 p 为素数, $p\geqslant 2$, $c\in\mathbf{N}$.

根据局部域理论, 局部域 K 只可能有以下情形:

1° K 是伽罗瓦域 $\mathrm{GF}(p^c)$ 上的 p 级数域($c=1$), 或是 p 级数域的有限次代数扩张($c>1$);

2° K 是伽罗瓦域 $\mathrm{GF}(p^c)$ 上的 p-adic 域($c=1$), 或是 p-adic 域的有限次代数扩张($c>1$).

这里 $\mathrm{GF}(p^c)$ 是伽罗瓦域, 不能更多的介绍, 只是理解为: 当 $c=1$ 时, $\mathrm{GF}(p)$ 与 $\{0,1,\cdots,p-1\}$ 同构, 而后者在 $\mathrm{mod}(p)$ 的加、乘运算下成为一个域.

对于 p 级数域与 p-adic 域, 有如下具体结构.

记 $\beta\in K$ 为 K 的一个生成元. p 级数域是 $\mathrm{GF}(p)$ 上的形式幂级数, 亦即其元 x 可表示为

$$x=\sum_{l=k}^{\infty}c_l\beta^l,\quad c_l\in\mathrm{GF}(p),\quad k\in\mathbf{Z}.\tag{2-3}$$

其运算 $x+y$ 与 xy 都是按位进行模 p 运算(不进位).

p-adic 域是 $\mathrm{GF}(p)$ 上的形式幂级数, 其元 x 也可以表示为(2-3), 上是其运算 $x+y$ 与 xy 都是按位进行模 p 运算(自左向右进位).

3. 非阿基米德赋值

局部域 K 可以赋予非阿基米德范数 $|\cdot|$, 使其成为一个赋值域.

若对 $x,y\in K$ 满足

1° $|x|=0\Leftrightarrow x=0$;

2° $|xy|=|x||y|$;

3° $|x+y|\leqslant\max(|x|,|y|)$,

则称映射 $x\to|x|$ 为 K 上的非阿基米德赋值.

K 的非阿基米德范数 $|x|$ 的值域是数集

$$\{q^k:k\in\mathbf{Z}\}\cup\{0\},\quad q=p^c, p\text{ 为素数}, c\in\mathbf{N}.$$

K 的生成元 β 满足 $|\beta|=q^{-1}$.

K 的子集

$$\mathscr{B}^k=\{x\in K:|x|\leqslant q^{-k}\},\qquad k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathscr{D}=\{x\in K:|x|\leqslant 1\}=\mathscr{B}^0,$$
$$\mathscr{D}^*=\{x\in K:|x|=1\}$$

分别称为 K 的分数理想、整数理想与 $K-\{0\}$ 的单位群.

这里 $\{\mathscr{B}^k:k\in\mathbf{Z}\}$ 形成 K 的一族递减(渐缩)的既开又闭的紧子集列, 满足

1° $\mathscr{B}^{k+1}\subset\mathscr{B}^k$,　　$k\in\mathbf{Z}$,

2° $\bigcap_k\mathscr{B}^k=\{0\}$,　　$\bigcup_k\mathscr{B}^k=K$.

4. 特征,特征群

局部域 K 的加群 K^+ 的特征 χ 是 K 到复数域 $\mathbf{C}$ 的子群 $T=\{e^{2\pi ix}:x\in[0,1)\}$ 上的连续函数,满足

$$\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y),\qquad |\chi(x)|=1,\qquad x,y\in K$$

(注意,这里的特征与前面介绍特征的定义一致).

K^+ 的特征群记为 $(K^+)^*$,或简记为 K^*. 据对偶理论知 K^* 也是一个局部紧群,且与 K 同构.

在 K^* 上,定义 $\mathscr{B}^k$ 的"零化子":

$$\Gamma_k=\{\lambda\in K^*:\lambda(x)=1,\forall x\in\mathscr{B}^k\},\qquad k\in\mathbf{Z}.$$

于是,$\{\Gamma_k:k\in Z\}$ 满足

1° $\Gamma_{k+1}\supset\Gamma_k,\quad k\in Z$;

2° $\bigcap\limits_k\Gamma_k=\{1\},\quad \bigcup\limits_k\Gamma_k=\Gamma$.

而 $\{\Gamma_k\}$ 也是 K^* 中既开又闭的子集族.

5. 局部域上的分布空间

局部域 K 的检验函数空间 $\mathscr{S}(K(t))$ 上的连续线性泛函的全体,记为 $\mathscr{S}^*(K)$. 在一定的拓扑之下,$\mathscr{S}^*(k)$ 成为一个拓扑空间. $\mathscr{S}^*(K)$ 的元称为 $\mathscr{S}^*(K)$ 分布,简称分布.

$\mathscr{S}'(k)$ 分布 f 对 $\varphi\in\mathscr{S}(K)$ 的作用记为 $\langle f,\varphi\rangle$.

2.2.2 局部域上的傅里叶变换

有了前面的准备,可以类似于 $\mathbf{R}^n$ 的情形来讨论局部域上的 F 变换. 简述如下.

由于 $K^*\cong K$,可以记

$$K^*=\{\psi_\xi(x):\xi\in K\}.$$

于是,按 $\mathbf{R}^n$ 上研究的思路,有

1° $f\in L^1(K)$,则 f 的傅里叶变换定义为

$$f^\wedge(\xi)=\int_K f(x)\overline{\psi_\xi}(x)\mathrm{d}x,\qquad \xi\in K;$$

2° $f\in L^2(K)$,则

$$f^\wedge(\xi)=\underset{k\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|x|\leqslant q^k} f(x)\overline{\psi_\xi}(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in K;$$

3° $f\in L^r(K),1\leqslant r<\infty$,则 $f=f_1+f_2,\quad f_1\in L^1(K),f_2\in L^2(K)$,

$$f^\wedge(\xi)=f_1^\wedge(\xi)+f_2^\wedge(\xi);$$

4° $f\in\mathscr{S}'(k)$,则 $f^\wedge\in\mathscr{S}(K)$ 满足

$$\langle f^\wedge,\varphi\rangle=\langle f,\varphi^\wedge\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathscr{S}(k).$$

F 变换的性质可以类似地推导.

2.2.3 局部域上的吉布斯(Gibbs)导数

经典导数当然不能对 $f:K\to\mathbf{C}$ 施行. 寻求新导数成为数学家和应用专家(包括

物理学家、化学家、天文学家、地质学家等，以及所有从事应用学科的专家和技术人员）的共同愿望和目标.

近年来这方面的理论与应用研究有不少成果，这里就不再详细介绍.有兴趣的读者可参考文献([4,5].

参考文献

1 Butzer P L, Nessel R J. Fourier 分析与逼近论(中译本).北京:高等教育出版社, 1985.

2 齐民友.偏微分算子理论.北京:科学出版社,1986.

3 苏维宜,近代分析引论,天元研究生数学丛书.北京:北京大学出版社,2000.

4 苏维宜.局部紧 Vilenkin 群上的拟微分算子与导数,中国科学,A 辑,4(1992),351 ~ 359.

5 Weiyi Su. Gibbs-Butzer derivatives and their applications. Numer Funct Anal and Optimiz; 1995, 16(5&6): 805 ~ 824.

6 Taibleson M H. Fourier analysis on local fields. Princeton: Princeton University Press, 1975.

7 郑维行,苏维宜,任福贤.沃尔什函数理论及应用.上海:上海科技出版社,1980.

·近代数学卷·

第9篇

广义函数

编　者　程麟趾
审校者　陈庆益

目　录

引　言

广义函数理论主要研究基本函数空间上的连续线性泛函，在某种意义下广义函数可看作通常函数概念的拓广.

作为广义函数的萌芽的 δ 函数经历了被人们嘲笑到普遍认同的全过程.1926年物理学家狄拉克(Dirac P.A.M.)从集中于点 $x=0$ 的单位物理量的分布密度出发，猜想存在某种函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ \infty, & x=0,\end{cases} \tag{0-1}$$

可以施行传统的积分运算，且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1, \tag{0-2}$$

由此不难推知对任一连续函数 $\phi(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\phi(0). \tag{0-3}$$

狄拉克将具有运算性质(0-3)的 δ 函数应用于量子理论的表述中取得巨大成功.然而，从经典数学的观点来看，满足(0-1)和(0-2)的函数 $\delta(x)$ 不可能存在，因为满足(0-1)的 $\delta(x)$ 几乎处处为0，从而勒贝格积分为0，此与(0-2)矛盾.这样，量子物理学给数学界提出了一个挑战性问题.

1936年索伯列夫(Соболев С.Л.)在研究双曲型方程柯西问题的解的唯一性时提出了广义解概念，揭示了用泛函拓展可积函数的可能性.1950年～1951年间施瓦兹(Schwartz L.)出版的专著《分布理论》将广义函数定义成基本函数空间上的连续线性泛函，由此建立了严密而系统的理论，并获得一系列有深远意义的成果，不久就为世人所公认，施瓦兹因此荣获菲尔兹奖(1950年).

广义函数在自然科学与工程技术中有着广泛的应用.特别地，它在积分变换、偏微分方程和量子理论、无线电技术、声学和振动学中占有重要的地位.

1　广义函数的概念及运算

1.1　基本函数

1.1.1　函数的支集

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的范数 $|x|=(x_1^2+x_2^2$

$+\cdots+x_n^2)^{1/2}$. $\mathbf{C}$ 是复数域.

定义 1 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 内某个开子集 Ω 上的复值函数. 称集合 $\{x\in\Omega: f(x)\neq 0\}$ 在 Ω 内的闭包为 f 的**支集**, 记作 $\operatorname{supp} f$.

在 Ω 内有紧支集($\mathbf{R}^n$ 中的紧集就是有界闭集)的函数称为**紧支函数**.

例 1 **赫维赛德(Heaviside)函数**

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x>0\end{cases}$$ 的支集是 $\operatorname{supp}H=[0,\infty)$.

例 2 函数 $\alpha(x)=\begin{cases}k\exp(|x|^2-1)^{-1}, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

其中 k 由 $\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(x)\mathrm{d}x=1$ 确定. $\alpha(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的紧支函数. $\operatorname{supp}\alpha(x)=\{x\in\mathbf{R}^n: |x|\leqslant 1\}$.

1.1.2 正则化网

定义 2 $\mathbf{R}^n$ 上依赖于参数 $\epsilon>0$ 的 C^∞ 函数族 ρ_ϵ, 如果满足

1° $\rho_\epsilon(x)=\rho_\epsilon(-x)$; 2° $\rho_\epsilon\geqslant 0$; 3° $\operatorname{supp}\rho_\epsilon\subset\{x\in\mathbf{R}^n: |x|\leqslant\epsilon\}$; 4° $\int_{\mathbf{R}^n}\rho_\epsilon\mathrm{d}x=1$, 则 ρ_ϵ 称为**正则化网**. 特别的, 可取 $\epsilon=1/m$, $\rho_{1/m}$ 称为**正则化序列**.

例 3 设 $\rho_\epsilon(x)=(\epsilon)^{-n}\alpha(x/\epsilon)$, 其中 $\alpha(x)$ 见例 2. 则 $\rho_\epsilon(x)$ 是一个正则化网.

定义 3 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界可测函数. 关系式 $f_\epsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(y)\rho_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y$ 所确定的运算 $f\mapsto f_\epsilon$ 称作 f 的**正则化**. $\rho_\epsilon(x-y)$ 称为**正则化核**.

定理 1 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数, 则

1° f 的正则化 $f_\epsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;

2° 若 f 有紧支集 K, 则 $\operatorname{supp}f_\epsilon\subset K_\epsilon=\bigcup\limits_{x\in K}B_\epsilon(x)$, 其中 $B_\epsilon(x)$ 是以 x 为中心, ϵ 为半径的开球;

3° 若 f 是连续函数, 则 $f_\epsilon\to f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集上是一致的;

4° 若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, 则在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 内 $f_\epsilon\to f$.

定理 2 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 内的闭集, $\epsilon>0$, 则必存在 C^∞ 函数 φ 满足

1° $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbf{R}^n$;

2° $\varphi(x)=1$, $x\in K$;

3° $\varphi(x)=0$, $x\,\overline{\in}\,K_\epsilon$(即集 K 的 ϵ 闭邻域).

如果 K 为有界闭集, 则显然 φ 有紧支集.

1.1.3 截断网

定义 4 $\mathbf{R}^n$ 上依赖于参数 $\epsilon>0$ 的函数族 τ_ϵ, 如果它满足 $\tau_\epsilon(x)=\begin{cases}1, x\,\overline{\in}\,K;\\ 0, x\in\Omega\end{cases}$ 且 $\tau_\epsilon(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, 其中 K 是 Ω 的紧子集, 则 τ_ϵ 称为**截断网**.

例 4 设 $K_{2\varepsilon_0} \subsetneqq \Omega, \varepsilon_0 > 0$. 作 K_{ε_0} 的特征函数

$$f_{\varepsilon 0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{\varepsilon 0}; \\ 0, & x \bar{\in} K_{\varepsilon 0}. \end{cases}$$

取 $\varepsilon < \varepsilon_0$, 则

$$\tau_\varepsilon(x) = \int f_{\varepsilon 0}(y)\rho_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

是截断网,其中 ρ_ε 是正则化网.

定义 5 $\mathbf{R}^n$ 上函数序列 τ_k, 如果满足 $\tau_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且

$$\tau_k(x) = \begin{cases} 1, \mid x \mid \leqslant k; \\ 0, \mid x \mid \geqslant k+1, \end{cases}$$

则称为**截断序列**.

例 5 取 $f_k(x) = \begin{cases} 1, \mid x \mid \leqslant k + 1/2; \\ 0, \mid x \mid > k + 1/2 \end{cases}$ 和 $\varepsilon < 1/2$. 则 $\tau_k(x) = \int f_k(y)\rho_\varepsilon(x - y)\mathrm{d}y$ 是截断序列,其中 ρ_ε 是正则化网.

1.1.4 基本函数空间

定义 6 定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 Ω 上的复值函数 $\varphi = \varphi(x)$ 的集合 Φ 如果满足

1° 若 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, a_1, a_2 \in \mathbf{C}$, 则 $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \in \Phi$;

2° $\varphi(x)$ 是 m 次 $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ 连续可微的;

3° 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的邻域中 φ 受一定约束;

4° 通过某种方式赋 Φ 以一定的拓扑结构,

则称 Φ 为**基本函数空间**,其中元素 φ 称为**基本函数**.

1. 空间 $C^m(\Omega)$ 和 $C_0^m(\Omega)$, $0 \leqslant m \leqslant \infty$

满足上述条件 1° 和 2° 的线性空间记作 $C^m(\Omega)$. 若 $C^m(\Omega)$ 中所有函数都有紧支集,则此空间记作 $C_0^m(\Omega)$. 如果 $C_0^m(\Omega)$ 中所有函数的支集均含于某一固定的紧集 K 中,则此空间记作 $C_{0k}^m(0 \leqslant m \leqslant \infty)$.

2. 空间 $\mathscr{D}_K$ 和 $\mathscr{D}_K^m$, $0 \leqslant m \leqslant \infty$

引入简化记号:设 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$. 则令

$$\mid k \mid = k_1 + \cdots + k_n, x^k = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},$$

$$k! = k_1!\cdots k_n!, \partial^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} = \partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n},$$

其中 $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, 2, \cdots, n$. $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是非负整数.

定义 7 如果对任意非负整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 有 $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{x\in K} \mid \partial^k\varphi_i(x) \mid = 0$. 则称 $C_{0K}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于 0. 线性空间 $C_{0K}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{D}_K$.

如将极限式改为 $\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{|k|\leqslant m}\sup\limits_{x\in K} \mid \partial^k\varphi_i(x) \mid = 0$, 即得 $C_{0k}^m(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 趋于 0 的定义. 线性空间 $C_{0K}^m(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{D}_K^m$, $0 \leqslant m < \infty$.

3.空间 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}^m, 0 \leqslant m < \infty$

定义 8 如果

1° 所有 $\mathrm{supp}\varphi_i$ 包含在 $\mathbf{R}^n$ 的同一紧集 K 中；

2° 对任意非负整数 $k_1, \cdots, k_n$ 有 $\lim\limits_{i \to \infty} \sup\limits_{x \in K} |\partial^k \varphi_i(x)| = 0$. 则称 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于0,线性空间 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$,简记作 $\mathscr{D}$.

如将条件2°改为 $\lim\limits_{i \to \infty} \sup\limits_{|k| \leqslant m} \sup\limits_{x \in K} |\partial^k \varphi_i(x)| = 0$,即得 $C_0^m(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于0的定义.线性空间 $C_0^m(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{D}^m(\mathbf{R}^n)$,简记作 $\mathscr{D}^m$.

4.空间 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{E}^m, 0 \leqslant m < \infty$

定义 9 如果对任意紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$,有 $\lim\limits_{i \to \infty} \sup\limits_{x \in K} |\partial^k \varphi_i(x)| = 0$,则称 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于0. 线性空间 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 或 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$.

如将极限等式改为 $\lim\limits_{i \to \infty} \sup\limits_{|k| \leqslant m} \sup\limits_{x \in K} |\partial^k \varphi_i(x)| = 0$,即得 $C^m(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于0的定义.线性空间 $C^m(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{E}^m(\mathbf{R}^n)$.

5.空间 S 和 $\mathscr{S}$

定义 10 满足定义6中条件1°的函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 称为**急降函数**,如果对任意 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ 和 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 有 $\lim\limits_{|x| \to \infty} |x^p \partial^k \varphi| = 0$. 所有急降函数组成的空间记作 $S(\mathbf{R}^n)$.

定义 11 如果对任意 p 和 k 有 $\lim\limits_{i \to \infty} \sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} |x^p \partial^k \varphi_i| = 0$,则称 $S(\mathbf{R}^n)$ 中序列 $\{\varphi_i\}$ 收敛于0.线性空间 $S(\mathbf{R}^n)$ 赋以此收敛性定义后记作 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

例 6 在例2中的函数 $\alpha(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

例 7 函数 $\exp(-|x|^2/2) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$,但不属于 $\mathscr{D}$.

例 8 函数 $r^2 = |x|^2 \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$,但不属于 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{S}$.

1.1.5 各种基本函数空间的关系

定理 3 作为线性空间,下面的包含关系成立:

$$\mathscr{D}_K^0 \supset \mathscr{D}_K^1 \supset \cdots \supset \mathscr{D}_K^m \supset \mathscr{D}_K^{m+1} \supset \cdots \supset \mathscr{D}_K$$

$$\hat{\mathscr{D}}^0 \supset \hat{\mathscr{D}}^1 \supset \cdots \supset \hat{\mathscr{D}}^m \supset \hat{\mathscr{D}}^{m+1} \supset \cdots \supset \hat{\mathscr{D}}$$

$$\hat{\mathscr{E}}^0 \supset \hat{\mathscr{E}}^1 \supset \cdots \supset \hat{\mathscr{E}}^m \supset \hat{\mathscr{E}}^{m+1} \supset \cdots \supset \mathscr{S}$$

1.包含关系的连续性

定义 12 设 X 和 Y 是两个有极限运算的复线性空间, $f: X \to Y$ 是线性变换,即对任意 $a, b \in \mathbf{C}, \varphi, \psi \in X$ 有 $f(a\varphi + b\psi) = af(\varphi) + bf(\psi)$. 如果对任意 $\varphi_k \in X$, $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = O(X)$,就有 $\lim\limits_{k \to \infty} f(\varphi_k) = O(Y)$,则称变换 f 是连续的.

定理 4 定理3中的包含关系是连续的.

2.稠密性

定义 13 设 Y 是有极限运算的复线性空间. 如果对任意 $\varphi \in Y$,存在 X 中序列

$\{\varphi_k\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k = \varphi(Y)$,则 Y 的子集 X 称为在 Y 中稠密.

定理 5(稠密性)　在定理 3 的包含链中,对任意两个有包含关系的空间而言,较小的集合在较大的空间中稠密. 例如,C_0^∞ 在 $\mathscr{D}^m(0 \leqslant m < \infty)$ 中稠密,C_0^∞ 在 $\mathscr{E}^m$ 中稠密,C_0^∞ 在 $\mathscr{S}$ 中稠密.

3. 完备性

定义 14　如果有极限运算的复线性空间 X 中的收敛序列 $\{\varphi_i(x)\}$ 的极限函数 $\varphi(x)$ 仍属于 X,则 X 称为完备空间.

定理 6(完备性)　空间 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{S}$ 是完备空间.

基本函数空间中应用最广的是 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{S}$ 空间.

1.2　广义函数的定义

1.2.1　$\mathscr{D}$-广函和 $\mathscr{S}$-广函、空间 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{S}'$

用 Φ 表示 1.1.4 中引进的任一基本函数空间.

定义 15　如果对任意在 Φ 中收敛于 0 的序列 $\{\varphi_k\}$,有 $\lim\limits_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0$,则空间 Φ 上的一个复值线性泛函,即 Φ 到复数域 $\mathbf{C}$ 的一个线性变换 T 称为是连续的. 此时,$T(\varphi)$ 记作 $\langle T, \varphi\rangle$.

定义 16　称空间 Φ 上的复值连续线性泛函为 **Φ-广义函数**(或 Φ-分布),简称 **Φ-广函**. 记 Φ-广义函数的全体为 Φ'.

Φ-广函 T 等于零,定义为

$$\langle T, \varphi\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi(\Omega).$$

显然,Φ' 是复数域上的线性空间.

定理 7　设 Φ_1 和 Φ_2 是两个基本函数空间,$\Phi_1 \subset \Phi_2$,且 Φ_1 在 Φ_2 中稠密,则 $\Phi'_2 \subset \Phi'_1$,即 Φ'_2 是 Φ'_1 的线性子空间.

特别地,$\mathscr{D}$-广函称为**施瓦兹广函**,简称广函,所有 $\mathscr{D}$-广函构成的空间记作 $\mathscr{D}'$. $\mathscr{S}$-广函称为**缓增广函**,所有 $\mathscr{S}$-广函构成的空间记作 $\mathscr{S}'$, $\mathscr{E}$-广函称为**紧支广函**,所有 $\mathscr{E}$-广函构成的空间记作 $\mathscr{E}'$.

$$\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'.$$

1.2.2　$\mathscr{D}$-广函举例

例 9　定义于 $\mathbf{R}^n$ 上的每一个局部勒贝格可积函数 $f(x)$,即在 $\mathbf{R}^n$ 上的任一有界域上绝对可积函数,通过下面的积分式确定一个广函

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}, \tag{1-1}$$

称为函数型广函,其中 $\overline{f(x)}$ 为 f 的复共轭函数.

显然泛函 $\langle f, \varphi\rangle$ 是线性的. 为核验连续性,只须注意对 $\mathscr{D}$ 中收敛于 0 的序列 $\{\varphi_k\}$,积分域是同一紧集 K,且被积函数列一致收敛于 0,随之积分序列也趋于 0.

例 10 对 $\mathbf{R}^n$ 上每一个局部勒贝格可积函数 $f(x)$，通过下面的积分式

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)} \partial^k \varphi(x) \mathrm{d}x, \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

也确定一个广函 f.

例 11 狄拉克分布(测度)或脉冲符号 $\delta(x-a)$ 是由

$$\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \varphi(a), \forall \varphi \in \mathscr{D} \tag{1-2}$$

所确定的连续线性泛函.它是物理学中传统所使用的表达式(0-3)的严密形式.

1.2.3 正则广函和奇异广函

形如(1-1)式的广函称为正则广函,其余的广函称为奇异广函的.狄拉克测度 $\delta(x)$ 是奇异的.这一点可用反证法证明,设对某一局部可积函数 $f(x)$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

取 $\varphi(x) = \theta_a(x)$(当 $|x| < a$ 时,等于 $\exp \dfrac{a^2}{|x|^2 - a^2}$;当 $|x| \geqslant a$ 时等于零),则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) \theta_a(x) \mathrm{d}x = \langle \delta(x), \theta_a(x) \rangle = \theta_a(0) = \mathrm{e}^{-1};$$

当 $a \to 0$ 时,左方积分区域的体积趋于0,被积函数有界,故右端积分趋于0.此与积分式等于常数 e^{-1} 矛盾.

1.2.4 $\mathscr{S}'$ 广函举例

狄拉克分布是缓增广义函数.

例 12 每个函数 $f \in L^p(\mathbf{R}^n), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$,由

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$$

确定一个缓增广函.事实上,由赫尔德(Hölder)不等式

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant \|f\|_p \cdot \|\varphi\|_q (p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

并注意到一个序列 $\{\varphi_k\}$ 当 $\varphi_k \to 0(\mathscr{S})$ 有 $\varphi_k \to 0(L^q)$,就可推知每个 $f \in L^p$ 定义 $\mathscr{S}$ 上的一个连续线性泛函.进一步,L^p 可看作 $\mathscr{S}'$ 的一个线性子空间.

例 13 每个常系数多项式 $P(x), x \in \mathbf{R}^n$,确定 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的一个缓增广函.

定义 17 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,且当 $|x| \to \infty$ 时仅具幂增率 $|x|^k$,即存在正常数 C 使 $|f(x)| \leqslant C|x|^k$,则称此连续函数在无限远处是缓增的.

例 14 每个在无限远处缓增的连续函数 $f(x)$ 通过 $\int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)} \varphi(x) \mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)} \partial^k \varphi(x) \mathrm{d}x, \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$,分别确定一个缓增广函.

1.2.5 连续函数作为广义函数

定理 8 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,满足 $\int_{\mathbf{R}^n} \overline{f(x)} \varphi(x) \mathrm{d}x = 0, \forall \varphi \in \mathscr{D}$,则

$f(x) \equiv 0$.

由此可知,产生同一个正则分布的连续函数是恒等的.恒等映射 $I: C^0 \to \mathscr{D}'$ 是单射.连续函数空间 C^0 可以作为线性子空间嵌入施瓦兹分布空间 $\mathscr{D}'$.在这个意义下广义函数可看作连续函数概念的拓广.

1.3　广义函数的变元变换

1.3.1　线性变换

定理 9　设 $f(y)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部 L 可积函数,$T: y \to x$ 是可逆线性变换,

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

命 $Tf(x) = f(T^{-1}x)$,则

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(T^{-1}x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \left| \det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} \right| \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\varphi(Ty)\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{D}x/\mathrm{D}y$ 是变换 T 的雅可比矩阵,$\det \mathrm{D}x/\mathrm{D}y \neq 0$.

定义 18　设 f 是任意广义函数,T 是可逆线性变换:$x = Ty$.则定义

$$\langle Tf, \varphi \rangle \equiv \langle f(T^{-1}x), \varphi(x) \rangle = \left| \det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} \right| \langle f(y), \varphi(Ty) \rangle.$$

例 15　设 T 是幺模变换(例如坐标系的旋转),即 $\left| \det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} \right| = 1$.则

$$\langle Tf, \varphi \rangle \equiv \langle f(T^{-1}x), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \varphi(Ty) \rangle.$$

例 16　广函 f 沿向量 h 的平移.设 $Tx = x + h$,则

$$T^{-1}x = x - h = y, \det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} = 1,$$

故

$$\langle f(x - h), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \varphi(y + h) \rangle.$$

特别地,

$$\langle \delta(x - h), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(y), \varphi(y + h) \rangle = \varphi(h).$$

例 17　广函 f 关于坐标原点的反射,设 $Tx = -x$,则 $T^{-1}x = -x = y$,$\det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} = (-1)^n$,故

$$\langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \varphi(-y) \rangle.$$

例 18　广函 f 的相似变换　设 $Tx = \alpha x, \alpha > 0$,则

$$T^{-1}x = \frac{x}{\alpha} = y, \quad \det \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y} = \alpha^n,$$

故

$$\langle f(x/\alpha), \varphi(x) \rangle = \alpha^n \langle f(y), \varphi(\alpha y) \rangle.$$

1.3.2　任意变换

定义 19　设 f 是任意广义函数,$x = x(y)$ 是无穷可微的可逆变换,$x, y \in \mathbf{R}^n$.则定义

$$\langle f(y(x)),\varphi(x)\rangle = \langle f(y),\left|\det\frac{Dx}{Dy}\right|\varphi(x(y))\rangle,$$

其中$\frac{Dx}{Dy}$是变换的雅可比矩阵，$\det\frac{Dx}{Dy}\neq 0$.

注意到$(\frac{Dx}{Dy})(\frac{Dy}{Dx}) = I$(单位阵)，前式也可表成

$$\langle f(y(x)),\varphi(x)\rangle = \langle f(y),\left|\det\frac{Dy}{Dx}\right|^{-1}\varphi(x(y))\rangle. \tag{1-3}$$

当$n = 1$时，$x,y\in\mathbf{R}$，$\det\frac{Dy}{Dx} = y'(x)$.

1.3.3 有关δ分布的变元变换

定理 10 设$y = g(x)$，$x\in\mathbf{R}$，具有m个单重零点$x_1,x_2,\cdots,x_m$，则

$$\delta[g(x)] = \sum_{i=1}^{m}\delta(x-x_i)/|g'(x_i)|. \tag{1-4}$$

证 先设$g(x)$只有一个单重零点，由(1-3)有

$$\begin{aligned}\langle\delta[g(x)],\varphi(x)\rangle &= \langle\delta(y),|g'(x)|^{-1}\varphi(x(y))\rangle\\ &= \varphi(x_1)|g'(x_1)|^{-1}\\ &= |g'(x_1)|^{-1}\langle\delta(x-x_1),\varphi(x)\rangle,\end{aligned}$$

由此
$$\delta[g(x)] = \delta(x-x_1)/|g'(x_1)|.$$

当$g(x)$具有m个单重零点$x_1,x_2,\cdots,x_m$时，在每个单重零点的邻域内，变换$y = g(x)$是可逆的，可以分别运用公式(1-3)，上式中的$\varphi(x_1)|g'(x_1)|^{-1}$显然应改为$\sum_{i=1}^{m}\varphi(x_i)|g'(x_i)|^{-1}$，公式(1-4)得证.

例 19 $\delta(ax+b) = \delta(x+b/a)/|a|\quad(a\neq 0)$.

例 20 $\delta[(x-a)(x-b)] = |b-a|^{-1}[\delta(x-a)+\delta(x-b)]$.

例 21 $\delta(x^2-b^2) = (2|b|)^{-1}[\delta(x-b)+\delta(x+b)]$.

例 22 $\delta(\mathrm{tg}x) = \delta(x)$，$\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

当$g(x)$具有无限多个零点时，只要它们都是孤立零点，仍可使用公式(1-4).

例 23 $\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\cos n\pi|^{-1}\delta(x-n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\pi)$.

定理 11 设$y = g(x)$，$x\in\mathbf{R}$，具有m个单重零点$x_1,x_2,\cdots,x_m$，则

$$\delta^{(k)}[g(x)] = \sum_{i=1}^{m}|g'(x_i)|^{-1}\left(\frac{1}{g'(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\delta(x-x_i).$$

1.3.4 广函关于变换的不变性

定义 20 若广函f经变换A不变：$Af = f$，即

$$\langle Af,\varphi\rangle = \langle f(x),\varphi(x)\rangle,\ \forall\varphi\in\mathscr{D},$$

则称f为关于A不变广函.

特别地，沿向量 $\boldsymbol{h}$ 平移不变的广函(即满足 $\langle f,\varphi(x+\boldsymbol{h})\rangle = \langle f,\varphi\rangle$) 称作以 $\boldsymbol{h}$ 为周期的**周期广函**. 对一切转动不变的广函称为**球形对称广函**. 对坐标原点的反射不变的广函(即满足 $\langle f,\varphi(-x)\rangle = \langle f,\varphi\rangle$) 称作中心对称广函，或称**偶分布**.

满足 $\langle f,\varphi(-\boldsymbol{x})\rangle = -\langle f,\varphi\rangle$ 的广函称为斜对称广函，或称**奇分布**.

例 24　对应于只和 $r = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ 有关的函数的一切正则泛函以及 δ 分布都是球形对称的.

例 25　$\delta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，是偶分布. 因为

$$\langle \delta(\boldsymbol{x}),\varphi(-\boldsymbol{x})\rangle = \varphi(0) = \langle \delta(\boldsymbol{x}),\varphi(x)\rangle.$$

1.4　广义函数的导数

1.4.1　广义导数的定义

定义 21　广函 f 的**广义导数(分布导数)**(简称导数) 如下确定

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\rangle = \langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle,\quad j = 1,2,\cdots,n,\quad \forall \varphi \in \mathscr{D},$$

$$\langle \partial^k f,\varphi\rangle \equiv \langle \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle f,\partial^k\varphi\rangle,\quad \forall \varphi \in \mathscr{D},$$

其中 $|\boldsymbol{k}| = k_1 + \cdots + k_n$. 当 $n = 1$ 时前两式变为

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle,\quad \forall \varphi \in \mathscr{D},$$
$$\langle f^{(k)},\varphi\rangle = (-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}\rangle,\quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

1.4.2　广义导数的性质

(1) 每个广函是无限可微的.

(2) $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$, $(cf)' = cf'$.

(3) 广义偏导数与求导的顺序无关.

(4) 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 连续，且对 x_j 有分段连续的偏导数 $\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_j}$，则广义导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 是对应于经典导数 $\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_j}$ 的正则泛函. 因为

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi\rangle = \langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\varphi\mathrm{d}x_j.$$

(5) 等式 $f'(x) = 0$ 成立的充要条件是 $f(x) = C$(常数).

1.4.3　赫维赛德函数的导数

赫维赛德函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

的广义导数为 $H'(x) = \delta(x)$. 事实上,

$$\langle H'(x), \varphi(x)\rangle = \langle H(x), -\varphi'(x)\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

利用关系式 $H(x) + H(-x) = 1$ 可推知 $H'(-x) = -\delta(x)$.

空间 $\mathbf{R}^n$ 内的赫维赛德函数

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1, & 若\ x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

的偏导数 $\dfrac{\partial^n H}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

1.4.4 δ 分布的导数

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = -\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n;$$

$$\langle \delta'(x - a), \varphi(x)\rangle = -\varphi'(a), x \in \mathbf{R}.$$

一般地,

$$\langle \partial^k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = (-1)^{|k|}\partial^k \varphi\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n;$$

$$\langle \delta^{(k)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}.$$

1.4.5 不连续经典函数的导数

如果 $f(x)$ 及其导数 $f^{(p)}(x)$ 局部可和,对应的广函用 $[f]$, $[f^{(p)}]$ 表示,广函 $[f]$ 的 p 阶导数用 $[f]^{(p)}$ 表示.

定理 12 设函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x), \cdots, f^{(m)}(x)$ 在 $x = 0$ 分别有跃度 $\sigma_i = f^{(i)}(+0) - f^{(i)}(-0)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, m$. 当 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 有直到 m 阶的连续导数. 则广函 $[f]$ 的各阶导数为

$$[f]' = [f'] + \sigma_0\delta,$$
$$[f]'' = [f''] + \sigma_0\delta' + \sigma_1\delta,$$
$$\cdots$$
$$[f]^{(m)} = [f^{(m)}] + \sigma_0\delta^{(m-1)} + \sigma_1\delta^{(m-2)} + \cdots + \sigma_{m-1}\delta.$$

定理 13 设 $\mathbf{R}^n$ 有区域 V,其边界为 S. 设函数 $f(\boldsymbol{x}) \in C^\infty$(在 V 内), $f = 0$(在 V 外). 在曲面 S 上有第一类间断,即沿 S 的切面方向 f 的各阶导数连续,设 S 的法线方向由内向外各阶导数都趋于定限. $f(\boldsymbol{x})$ 及其各阶偏导数确定的广函分别用 $[f]$, $[\partial^p f]$ 记之,则有

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_k}[f], \varphi\rangle = \langle [\frac{\partial f}{\partial x_k}], \varphi\rangle + \int_S f(x)\cos\theta_k \varphi(x)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 θ_k 为曲面 S 的内向法线与 Ox_k 轴的交角.

设向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$, 相应的广函记作 $[\boldsymbol{f}]$, 命 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}$, $\mathrm{div}[\boldsymbol{f}] = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_k}[f_k]$. 则有高斯(Gauss) 公式

$$\langle[\mathrm{div}\boldsymbol{f}],\varphi\rangle=-\int_S\varphi\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

定理 14　设函数 f 仍为定理 13 中的类型，则有格林（Green）公式

$$\langle\Delta[f],\varphi\rangle-\langle[\Delta f],\varphi\rangle=\int_S\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\int_S f\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.$$

这里 Δ 表示拉氏算子，$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示内向法线导数.

1.4.6　幂函数 r^λ 及其导数

1. 经典幂函数 r^λ

设 $r=|\boldsymbol{x}|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$，幂函数 r^λ（λ 为任意复数）在区域 $r\neq0$ 中处处可微，且有

$$\Delta r^\lambda=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2},$$
$$\Delta\ln r=(n-2)r^{-2},$$
$$\Delta(r^\lambda\ln r)=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2}\ln r+(2\lambda+n-2)r^{\lambda-2}.$$

这里 Δ 表示拉氏算子.

2. 广义幂函数 r^λ

设 $\varphi\in\mathscr{D}$，积分 $\int_{\mathbf{R}^n}r^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x$ 当 $\mathrm{Re}\lambda>-n$ 时收敛，由此确定的广函记作 $[r^\lambda]$，即

$$\langle[r^\lambda],\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}r^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \mathrm{Re}\lambda>-n.$$

积分 $\int_{\mathbf{R}^n}r^\lambda\ln r\varphi(x)\mathrm{d}x$ 当 $\mathrm{Re}\lambda>-n$ 时收敛，由此确定的广函记作 $[r^\lambda\ln r]$.

定理 15　设 $\mathrm{Re}\lambda-2>-n$，则

$$\Delta[r^\lambda]=[\Delta r^\lambda]=\lambda(\lambda+n-2)[r^{\lambda-2}],$$
$$\begin{aligned}\Delta[r^\lambda\ln r]&=[\Delta(r^\lambda\ln r)]\\&=\lambda(\lambda+n-2)[r^{\lambda-2}\ln r]+(2\lambda+n-2)[r^{\lambda-2}].\end{aligned}$$

定理 16

$$\Delta[r^{2-n}]=(2-n)2\pi^{n/2}\frac{\delta(r)}{\Gamma(n/2)},$$
$$\Delta[\ln r]=\begin{cases}(2-n)[r^{-2}] & (n>2);\\ 2\pi\delta(r) & (n=2).\end{cases}$$

1.4.7　广函的阶数

定义 22　一个广函 $f\in\mathscr{D}'$，如果 $f\in(\mathscr{D}^m)'$，就称它有阶 $\leqslant m$. 称 f 有阶 m 是指：使 $f\in(\mathscr{D}^m)'$ 成立的最小整数是 m.

等价地说，如果广函 f 能表成某个正则广函的 m 阶导数，但不能表成正则广函的低于 m 阶的导数，则称 f 是有限阶的，它的阶数等于 m.

例 26　每个局部可积函数定义一个 0 阶广函.

例 27 $\delta^{(n)}(x)$ 是$(n+1)$阶广函，$n=0,1,2,\cdots$.

1.5 广义函数序列的极限

1.5.1 弱收敛性

设有一个复参数 λ 变动在某个区域Λ 中，对应于每个 λ 的值有一个广函f_λ.

定义 23 如果

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\langle f_\lambda,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{D},$$

则称广函网 f_λ 当$\lambda\to\lambda_0$时**弱收敛**于广函 f.

特别地，取 $\lambda=n$(自然数)，$\lambda_0=\infty$，则称广函序列$\{f_n\}$ **弱收敛**于广函 f.

定义 24 设有广函级数 $h_1+h_2+\cdots+h_n+\cdots$，称 $S_n=h_1+h_2+\cdots+h_n$ 为级数的部分和. 如果部分和序列$\{S_n\}$ 弱收敛于广函 S，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n$ 收敛，其和为 S，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

收敛的广函序列的极限是唯一确定的.

极限运算是线性的. 即若广函列$\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\alpha f_n=\alpha\lim_{n\to\infty}f_n,\alpha\in C^\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n+g_n)=\lim_{n\to\infty}f_n+\lim_{n\to\infty}g_n.$$

对于缓增广函序列的极限有类似的定义，并有类似的性质.

定理 17 空间$\mathscr{S}'$ 作为线性空间连同它的收敛性可以嵌入到空间 $\mathscr{D}'$ 中去.

1.5.2 完备性

定理 18 施瓦兹广函空间 $\mathscr{D}'$ 是完备的.

定理 19 缓增广函空间 $\mathscr{S}'$ 是完备的.

1.5.3 局部可积的收敛序列

定理 20 设f_n 是局部可积函数，在每个紧集 K 上$f_n\to f$(在 L 中)，则$f_n\to f$(在$\mathscr{D}'$ 中).

证

$$\left|\int_{\mathbf{R}^m}(f_n-f)\varphi\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{x\in K}|\varphi|\int_K|f_n-f|\,\mathrm{d}x,\ \forall\ \varphi\in\mathscr{D}_K.$$

定理 21 局部可积函数空间作为线性子空间连同它的收敛性可以嵌入施瓦兹广函空间 $\mathscr{D}'$.

例 28 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$(在 $\mathscr{D}'$ 中).

证　$\int_{-A}^{A}\sin nx\varphi\mathrm{d}x=\int_{-A}^{A}(1/n)\cos nx\varphi' x\mathrm{d}x\to 0,\forall\varphi\in\mathscr{D}([-A,A])$.

1.5.4　δ 型网(序列)

定义 25　设函数 $f_\epsilon(x)\in C^0(\mathbf{R}^m)$[或 $L(\mathbf{R}^m)$]，$\epsilon>0$，且满足 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\langle f_\epsilon(x),\varphi(x)\rangle=\varphi(0)$，$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，则称 $f_\epsilon(x)$ 为 **δ 型网**. 取 $\epsilon=1/n$，则称 $f_{1/n}(x)$ 为 δ 型序列.

定理 22　每个正则化网(序列)(见 1.1.2) 是 δ 型网(序列).

1. 一维 δ 型网(序列)

1° $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\epsilon^2}$;

2° $\sin\frac{nx}{\pi x}$;

3° $(2\pi)^{-1}\int_{-n}^{n}\exp(\mathrm{i}xy)\mathrm{d}y$;

4° $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{(4\epsilon)}}}{2\sqrt{\pi\epsilon}}$;

5° $f_n(x)=\begin{cases}0, & |x|>\frac{1}{n};\\ \frac{n}{2}, & |x|\leqslant\frac{1}{n}.\end{cases}$

2. 多维 δ 型网(序列)

(i) 例 3 中的 $\rho_\epsilon(\boldsymbol{x})$;

(ii) $(2\pi)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$,

其中 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+\cdots+x_my_m$.

1.5.5　广函 ln(x ± i0)

例 29　设 $\ln z=\ln(x\pm\mathrm{i}y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\pm\mathrm{i}\arctan\frac{y}{x}$，$y>0$. 则 $\lim\limits_{y\to 0_+}\ln(x\pm\mathrm{i}y)=\ln|x|\pm\mathrm{i}\pi H(-x)$(在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中)，这里 $H(x)$ 是赫维赛德函数.

定义 26　广函 $\ln(x\pm\mathrm{i}0)$ 定义为

$$\ln(x\pm\mathrm{i}0)=\lim_{y\to 0_+}\ln(x\pm\mathrm{i}y)=\ln|x|\pm\mathrm{i}\pi H(-x).$$

1.5.6　作为连续运算的微分

定理 23　设广义函数序列 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{D}'$ 中收敛于广函 f，则它的导数序列 $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right\}$

在 $\mathscr{D}'$ 中收敛于导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

证 $\langle \frac{\partial f_n}{\partial x_j}, \varphi \rangle = \langle f_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle \to \langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathscr{D}$.

定理 24 设广函级数 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ 收敛于广函 g, 则逐项求导构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} h'_n$ 收敛于导数 g'.

例 30 由例 28 知 $\sin nx \to 0$(在 $\mathscr{D}'$ 中) 推知

$$n\cos nx \to 0, \ -n^2 \sin nx \to 0 (在\ \mathscr{D}'\ 中).$$

定理 25(傅里叶展开定理) 设 $f(x)$ 为局部可积的周期函数(周期为 2π), 则

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} (在\ \mathscr{D}'\ 中),$$

其中

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx .$$

证 逐项积分 $f(x)$ 的(经典)傅里叶展式得 $\sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$, 它一致收敛于绝对连续函数 $F(x)$, 且 $F'(x) = f(x)$(a.e.). 对等式

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{-1} c_n \frac{e_n}{in} e^{inx} + c_0 x + \sum_{1}^{\infty} \frac{e_n}{in} e^{inx}$$

逐项微分, 即得 $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$(在 $\mathscr{D}'$ 中).

1.6 广义函数的局部性质

1.6.1 广函的支集

定义 27 设 $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, U 为 $\mathbf{R}^n$ 内的开集. 如果对任意 $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ 有 $\langle T, \varphi \rangle = 0$, 则称广函 T 在开集 U 上为零.

定义 28 **广函 T 的支集** F 定义如下: $x \in F$ 的充要条件为 T 在点 x 的任意的开邻域 U 上不为零, 亦即必有 $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ 使 $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. T 的支集记作 supp T.

例 31 广函 $\delta(x-a)$ 在任意点 $b(\neq a)$ 的开邻域 N_b(不含 a 点)上为零, 在点 a 的任意开邻域上不为零. supp $T = \{a\}$.

1.6.2 单位分解

定义 29 设集 $A \subset \mathbf{R}^n$, 集组 $\{A_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \subset \mathbf{R}^n$, 如果满足: 1) 集 A_λ 都是开(闭)集; 2) 集 A 内每个紧集至少和一个, 至多和有限多个集 A_λ 相交, 则集组 $\{A_\lambda\}$ 称为集 A 的局部有限开(闭)覆盖.

定理 26(单位分解) 设 $\{\Omega_\lambda\}(\lambda \in \Lambda)$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 的局部有限开覆盖, 则存在函数组 $\{\alpha_\lambda\}$, $\alpha_\lambda \in \mathscr{D}(\Omega_\lambda)$, 使得

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda(x)=1\quad(x\in\mathbf{R}^n).$$

如果 Ω_λ 都是有界集，则函数 $\alpha_\lambda\in\mathscr{D}\quad(\Omega_\lambda)$.

定理 27(单位分解)　设 $\{\Omega_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 是闭集 K 的局部有限开覆盖. 则存在函数组 $\{\alpha_\lambda\}$, $\alpha_\lambda\in\mathscr{E}(\Omega_\lambda)$, 使得

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda(x)=1\quad(x\in K).$$

如果 Ω_λ 都是有界集，则函数 $\alpha_\lambda\in\mathscr{D}\ (\Omega_\lambda)$.

1.6.3　广函的局部性质

定理 28　设 $\{\Omega_\nu\}(\nu\in N)$ 为空间 $\mathbf{R}^n$ 内的开集组，$\Omega=\bigcup_{\nu\in N}\Omega_\nu$. 设广函 T 在 Ω_ν 上均为零，则 T 在 Ω 上亦为零.

定义 30　设广函 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$. 将 T 在其上为零的一切开子集 Ω_λ 的并集 $\bigcup_\lambda\Omega_\lambda$ 称为 T 在其上为零的最大开集.

定义 31　T 在其上为零的最大开集 $\bigcup_\lambda\Omega_\lambda$ 在 Ω 中的余集 $\Omega\setminus\bigcup_\lambda\Omega_\lambda$ 称为 T 的支集，记作 $\operatorname{supp}T$. 它是 Ω 的相对闭子集.

当集合 $S\supset\operatorname{supp}T$ 时，也称泛函 T 集中作用在集合 S 上. 取 $\Omega=\mathbf{R}^n$, 定义 31 和定义 28 一致.

定理 29　设 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$, $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 且 $\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}\varphi=\varnothing$(空集)，则 $\langle T,\varphi\rangle=0$.

例 32　设 T 为正则广义函数，则生成函数 $T(x)$ 的支集和广函 T 的支集相一致.

1.6.4　粘合原理

定理 30　设 T 为广函，F 为其支集，$\{\Omega_\lambda\}$ 为集 F 的一个局部有限开覆盖，则 T 可表成

$$T=\sum_{\lambda\in\Lambda}T_\lambda,$$

这里 T_λ 的支集 $F_\lambda\subset F\cap\Omega_\lambda$.

显然，广函 T_λ 可看成 Ω_λ- 广函，即 $T_\lambda\in\mathscr{D}'(\Omega_\lambda)$.

定义 32　设广函 f 和 g 之差 $f-g$ 在点 x_0 的开邻域上为零，则称 f 和 g 在该点的邻域相等.

定理 31　在每一点的邻域相等的广函是在全空间相等的.

由此可见，每个广函由它的局部的值唯一确定.

定理 32(粘合原理)　设开集组 $\{\Omega_\nu\}(\nu\in\mathbf{N})$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个局部有限开覆盖. T_ν 为 Ω_ν- 广函，满足下列条件：若 $\Omega_{\nu1}\cap\Omega_{\nu2}\neq\varnothing$, 则在集 $\Omega_{\nu1}\cap\Omega_{\nu2}$ 上 $T_{\nu1}=T_{\nu2}$, 于是存在一个唯一的全局的 $\mathbf{R}^n$- 广函 T, 使得在每个 Ω_ν 上 $T=T_\nu$.

1.6.5　广函的奇异支集

定义 33　广函 T 在其上等于一个无限可微函数的最大开集在 Ω 中的余集称

为 T 的**奇异支集**，记作 sing supp T.

显然，sing supp $T \subset$ supp T.

例 33　sing supp $\delta^{(n)}(x) = \{0\}, n = 0,1,2,\cdots$.

sing supp $H(x) = \{0\}$.

sing supp $x^2 = \varnothing$(空集).

1.7　广义函数的结构

1.7.1　$\mathscr{D}$- 广函

定理 33　任一广函 $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 可表为连续的紧支函数的导数的无限和

$$T = \sum_j \partial^{p_j} T_j(x),$$

这里 supp T_j 含于 supp T 的任意给定的开邻域之内，随 $j \to \infty$ 而无限远移.

定理 34　若广函 $f \in \mathscr{D}'$ 的各阶导数都平方可积或连续，则 f 为经典的无穷可微函数.

定理 35　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 内的有界开集. 如果 $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$，则存在连续函数 f 及导数符号 ∂^p，使得在 Ω 内有 $T = \partial^p f$，并可取连续函数 f 使其支集在 $\overline{\Omega}$ 的任意预定的开邻域之内. 故任一广函局部地为有限阶广函.

1.7.2　$\mathscr{S}$- 广函

定理 36　当且仅当 T 能够表示为一个有限和

$$T = \sum_j \partial^j f_j$$

时，广函 $T \in \mathscr{S}'$，其中 f_j 都是在无限远处缓增的连续函数.

1.7.3　$\mathscr{E}$- 广函

定理 37　设 $T \in \mathscr{D}'$，当且仅当 $T \in \mathscr{E}'$ 时，supp T 是紧集.

定理 38　设 $T \in \mathscr{E}'$，则 T 可表为有限多个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数的导数之和，并且可取这些连续函数使其支集都在 T 的支集的任意预定的开邻域之内. 故任一紧支广函是有限阶的.

1.7.4　集中在一点的广函

定理 39　每一个支集是原点的广函 $T \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 都可以唯一地表为狄拉克测度及其导数的有限线性组合：

$$T = \sum_{|p| \leqslant m} C_p \partial^p \delta$$

其中 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$|p| = p_1 + \cdots + p_n$，$m$ 是某个正整数或零.

1.7.5　零广义函数

定理 40　$T \in \mathscr{D}'$ 是零广义函数的充分必要条件是 supp $T = \varnothing$(空集).

1.8 发散积分定义的广义函数

1.8.1 发散积分的有限值

从发散积分中分离出无限部分从而提取有限值的思想是阿达马(J. Hadamard)在偏微分方程理论中首先提出的,它在发散积分确定广函以及广函的奇异乘积的研究中有重要作用,特别是应用于量子动力学的重整化理论获得显著成效.

设 $g(x)$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 在 $(a+\varepsilon, b)$ 内可积,但在 (a, b) 内不可积. 又设 $g(x)$ 可表成如下形式

$$g(x) = \sum_i \frac{A_i}{(x-a)^{\lambda_i}} + h(x), \tag{1-5}$$

其中 A_i 和 λ_i 是复数, $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 1$, $h(x)$ 在 (a, b) 内可积. 于是积分

$$\int_{a+\varepsilon}^b g(x)\mathrm{d}x = I(\varepsilon) + F(\varepsilon),$$

其中

$$I(\varepsilon) = \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i - 1}(\varepsilon^{-1})^{\lambda_i - 1},$$

$$F(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b h(x)\mathrm{d}x - \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i - 1}[(b-a)^{-1}]^{\lambda_i - 1}.$$

当 $\varepsilon \to 0_+$ 时, $|I(\varepsilon)| \to +\infty$, 而 $F(\varepsilon) \to F$(有限值). 阿达马称 F 为积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的有限部分,记作

$$F = F_p.\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x - \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i - 1}[(b-a)^{-1}]^{\lambda_i - 1}.$$

现在假设

$$g(x) = \sum_i \frac{A_i}{(x-a)^{\lambda_i}} + \frac{B}{x-a} + h(x), \tag{1-6}$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 1$. 这时积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的无限部分

$$I(\varepsilon) = \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i - 1}(\varepsilon^{-1})^{\lambda_i - 1} + B\ln\varepsilon^{-1}$$

和有限部分

$$\begin{aligned} F &= F_p.\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b h(x)\mathrm{d}x + B\ln(b-a) - \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i - 1}[(b-a)^{-1}]^{\lambda_i - 1}. \end{aligned}$$

后人称积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的有限部分 F 为**阿达马有限值**.

1.8.2 有幂式奇点的函数的正则化泛函

设 λ 是复数，规定函数

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0, & 当\ x \leqslant 0; \\ x^\lambda, & 当\ x > 0. \end{cases} \quad x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda, & 当\ x < 0; \\ 0, & 当\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. 问题的提出

设 $f(x)$ 除点 x_0 外处处局部可积，而在 x_0 点有不可积奇性，例如 $f(x) = x_+^{-1}$，$x \in \mathbf{R}$，这时积分

$$\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ , \forall\, \varphi \in \mathscr{D}$$

一般来说是发散的. 能否藉助于某种确定的程序（称为正则化程序），建立一个泛函 $f \in \mathscr{D}'$，使它与函数 $f(x)$ 相对应，并满足某些预定条件. 这样的广函 f 称为 $f(x)$ 的正则化泛函.

2. 施瓦兹的正则化程序

设函数 $g(x)$ 具有式(1-5)或式(1-6)形式，$\varphi(x) \in \mathscr{D}$. 则函数 $g(x)\varphi(x)$ 在 (a,b) 内具有类似于1.8.1中 g 的性质，人们有可能定义有限部分 $F_p.\int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$. 显然它是 $\varphi \in \mathscr{D}$ 的连续线性泛函，因而它定义一个广函，称为**伪函数**，并记作 $Pf.g$：

$$\langle Pf.g,\varphi\rangle = F_p.\int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ .$$

3. 伪函数 $Pf.x_+^{-3/2}$

任取 $\varphi \in \mathscr{D}$，利用 $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(tx)$，$0 < t < 1$，对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_\epsilon^\infty x^{-3/2}[\varphi(0) + x\varphi'(tx)]\mathrm{d}x \\ &= 2\varphi(0)/\sqrt{\epsilon} + \int_\epsilon^\infty x^{-3/2}[\varphi(x) - \varphi(0)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $\epsilon \to 0_+$ 时，$2\varphi(0)/\sqrt{\epsilon} \to \infty$. 删去此发散量，得

$$\begin{aligned}\langle Pf.x_+^{-3/2},\varphi\rangle &= F_p.\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty x^{-3/2}[\varphi(x) - \varphi(0)]\mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

4. 伪函数 $Pf.x_+^{-1}$

任取 $\varphi \in \mathscr{D}$，利用 $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(tx)$，$0 < t < 1$，则对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\epsilon^1 \frac{\varphi(0) + x\varphi'(tx)}{x}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \varphi(0)\{\ln 1 - \ln\epsilon\} + \int_\epsilon^1 x^{-1}\{\varphi(x) - \\ &\quad \varphi(0)\}\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\varphi(0)\ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty x^{-1}\{\varphi(x) - \varphi(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里 $H(x)$ 是赫维赛德函数. 当 $\varepsilon \to 0_+$ 时, $|-\varphi(0)\ln\varepsilon| \to \infty$, 删去此发散量, 得

$$\langle Pf.\, x_+^{-1}, \varphi\rangle = Fp.\int_0^\infty x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty x^{-1}\{\varphi(x) - \varphi(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x.$$

5. 伪函数 $Pf.\, x_-^{-1}$

利用关系式 $\langle x_-^{-1}, \varphi(x)\rangle = \langle x_+^{-1}, \varphi(-x)\rangle$, 有

$$\langle Pf.\, x_-^{-1}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-1}\{\varphi(-x) - \varphi(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x.$$

6. 伪函数 $Pf.\, x^{-1}$

注意关系式 $x^{-1} = x_+^{-1} - x_-^{-1}$, 推知

$$\langle pf.\, x^{-1}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-1}\{\varphi(x) - \varphi(-x)\}\mathrm{d}x.$$

等式右端显然等于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|>\varepsilon} x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x$, 即柯西主值.

7. 伪函数 $Pf.\, x_+^{-n}$ 和 $Pf.\, x_-^{-n}$ ($n = 1, 2, \cdots$)

$$\langle Pf.\, x_+^{-n}, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^{-n}\{\varphi(x) - \varphi(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x,$$

$$\langle Pf.\, x_-^{-n}, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^{-n}\{\varphi(-x) - \varphi(0) + x\varphi'(0) - \cdots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x.$$

1.9　分布导数和伪函数的关系

1.9.1　函数 $x_+^{-1/2}$ 的分布导数

$$\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_+^{-1/2}), \varphi(x)\rangle = -\langle x_+^{-1/2}, \varphi'(x)\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^{-1/2}\varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{x^{-1/2}\varphi(x)\Big|_\varepsilon^\infty - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{1/2}\varphi(\varepsilon) - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty x^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{-1/2}\varphi(0) + \int_\varepsilon^\infty\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varphi(0)\int_\varepsilon^\infty\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \int_0^\infty\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)[\varphi(x) - \varphi(0)]\mathrm{d}x$$

$$= \langle Pf.\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right), \varphi\rangle,$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_+^{-1/2}) = Pf.(x_+^{-1/2})'.$$

这里$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$表示分布导数,(　)′表示经典导数.

1.9.2　函数 $\ln x_+$ 的分布导数

设 $\ln x_+ = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \ln x, x > 0, \end{cases}$ 有

$$\begin{aligned}\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x_+, \varphi(x)\rangle &= -\langle \ln x_+, \varphi'\rangle = -\lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty \ln x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\epsilon\to0}\{\varphi(x)\ln x\,|_\epsilon^\infty - \int_\epsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x\} \\ &= \lim_{\epsilon\to0}\{\varphi(\epsilon)\ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x\} \\ &= \lim_{\epsilon\to0}\{\varphi(0)\ln\epsilon + \int_\epsilon^\infty x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x\}.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(0)\ln\epsilon = \varphi(0)\int_\epsilon^1 x^{-1}\mathrm{d}x = -\int_\epsilon^\infty x^{-1}\varphi(0)H(1-x)\mathrm{d}x$, 故

$$\begin{aligned}\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x_+, \varphi\rangle &= \lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty x^{-1}\{\varphi(x) - \varphi(0)H(1-x)\}\mathrm{d}x \\ &= \langle Pf.x_+^{-1}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

即$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\ln x_+ = Pf.x_+^{-1} = P(\ln x_+)'$.

1.9.3　$\ln x_-$ 和 $\ln|x|$ 的分布导数

(1) 函数 $\ln x_- = \begin{cases} \ln|x|, & x < 0; \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 的分布导数$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\ln x_- = Pf.(-x_-^{-1}) = Pf.(\ln x_-)'$.

(2) 函数 $\ln|x| = \ln x_+ + \ln x_-$ 的分布导数

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\ln|x| &= (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\{\ln x_+ + \ln x_-\} \\ &= Pf.\{x_+^{-1} - x_-^{-1}\} = Pf.x^{-1} \\ &= Pf.(\ln|x|)'.\end{aligned}$$

1.9.4　x_+^{-n} 和 x_-^{-n} 的分布导数

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)Pf.x_+^{-n} &= -nPf.x_+^{-n-1} + (-1)^n\delta^{(n)}(x)/n! \\ &= Pf.(x_+^{-n})' + (-1)^n\delta^{(n)}(x)/n!, \\ (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)Pf.x_-^{-n} &= nPf.x_-^{-n-1} - \delta^{(n)}(x)/n! \\ &= Pf.(x_-^{-n})' - \delta^{(n)}(x)/n!,\end{aligned}$$

其中 $n = 1,2,\cdots$

2 齐次广义函数

2.1 依赖于参数 λ 的广义函数

设有一个复参数 λ 在某个区域 Λ 中变动，对应于每一个 λ 的值有一个广函 $f_\lambda \in \mathscr{D}'$.

2.1.1 连续函数

定义 1 如果 λ 的函数 $\langle f_\lambda, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ 对任意 $\varphi \in \mathscr{D}$ 成立，则称广义函数 f 为广函网 f_λ 当 $\lambda \to \lambda_0$ 时的极限.

定义 2 如果对于任意的 $\lambda_0 \in \Lambda$，关系式 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda = f_{\lambda_0}$ 成立，$f_{\lambda_0} \in \mathscr{D}'$，则称 f_λ 为在区域 Λ 中对 λ 的连续函数.

定理 1 连续依赖于参数 λ 的广函 f_λ 对自变量 x 的导数仍是 λ 的连续函数.

定义 3 设广函 f_λ 在可求长曲线 Γ 上对 λ 是连续的. 在 Γ 上依次取分点 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 在区间 $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ 中任取一点 λ'_j，则极限 $\lim\limits_{\sigma \to 0} \sum\limits_{j=1}^{n} \langle f_{\lambda'_j}, \varphi\rangle \Delta\lambda_j$ 称为广函 f_λ 沿曲线 Γ 的积分，记作 $\int_\Gamma \langle f_\lambda, \varphi\rangle d\lambda$，这里，$\sigma = \max\limits_j |\Delta\lambda_j|$.

2.1.2 可微函数

定义 4 如果广函 $g = \lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \dfrac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ 存在，就称 g 为广函 f_λ 在 $\lambda = \lambda_0$ 对参数 λ 的导数.

定理 2 导数 $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 存在的充要条件是一切数值函数 $\langle f_\lambda, \varphi\rangle$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 都是对 λ 可微的.

定义 5 如果对于任意的 $\lambda \in \Lambda$，函数 f_λ 有对 λ 的导数，就称 f_λ 在区域 Λ 中对 λ 是可微的.

定理 3 如果函数 f_λ 在区域 Λ 中对 λ 可微，则 f_λ 对 x 的一切导数对 λ 也可微，并且

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x_j} f_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda.$$

2.1.3 解析函数

定义 6 如果 λ 是跑遍某一开区域 Λ 的复参数，则在区域 Λ 中可微的广函 f_λ 称为 λ 的**解析广义函数**.

定理4 广函 f_λ 在区域 Λ 中是 λ 的解析函数的充要条件是一切数值函数 $\langle f_\lambda, \varphi\rangle$ 是在区域 Λ 中的 λ 的解析函数.这时,在区域 Λ 中的每一点 λ 各阶导数 $\frac{\partial f}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}, \cdots$ 都存在而且在点 $\lambda_0 \in \Lambda$ 的邻域中,它可展开为泰勒级数

$$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial\lambda} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2\frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2} + \cdots$$

定理5 定义在区域 Λ 中的两个解析函数 f_λ 和 g_λ 如果在以 Λ 的内点为极限点的某一个 λ 集合上相等,则对一切 $\lambda \in \Lambda$ 这两个函数相等.

定理6 假定一切数值函数 $\langle f_\lambda, \varphi\rangle$ 都允许解析开拓到比较大的区域 Λ_1 中去,则对任意的 $\lambda_1 \in \Lambda_1$ 数值 $\langle f_{\lambda_1}, \varphi\rangle$ 也给出空间 $\mathscr{D}$ 上的线性连续泛函.

定理7 解析广义函数 f_λ 对 x 的导数仍是 λ 的解析广义函数.

定理8 如果解析泛函 f_λ 在区域 Λ 中关于运算 u 是不变的,即 $f_\lambda(ux) = f_\lambda(x)$,则它在 Λ_1 中的解析开拓关于此运算 u 也是不变的.

定理9 在孤立奇点 λ_0 的邻域解析的广函 f_λ 可以展开成罗朗级数

$$f_\lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_0)^n,$$

其中 $c_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是固定(与 λ 无关)的泛函

$$\langle c_n, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \langle g_\lambda, \varphi\rangle dx, \quad g_\lambda = f_\lambda/(\lambda - \lambda_0)^{n+1}.$$

2.2 盖尔范德的正则化程序

2.2.1 函数 $f_\lambda(x)$ 的正则化泛函

在1.8.2中叙述了通过 K 阿达马有限值建立有幂式奇点的函数 $f(x)$ 的正则化泛函的程序,现在讲述通过对复参数 λ 作解析延拓建立函数 $f_\lambda(x)$ 的正则化泛函的程序.两者所得结果是一致的,而后者更适合于作理论研究.

考察具有幂式奇点的函数,也就是当 x 趋于某一不可积的孤立奇点 x_0 时,增加得不快于 $|x - x_0|^{-1}$ 的某一幂的函数 $f(x)$.

定义7 函数 $f(x)$ 的正则化泛函是一个连续线性泛函 f,使对在奇点 x_0 的邻域为零的基本函数 $\varphi(x)$ 有 $\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$.

与此等价的有

定义8 函数 $f(x)$ 的正则化泛函是一个连续线性泛函 f,除了奇点 x_0 外它与 $f(x)$ 恒等(在开区域广函相等的意义下).

2.2.2 解析开拓建立正则化泛函

设给定函数 $f_\lambda(x)$,当 λ 跑遍复平面上某一区域 Λ 时,它是局部可积的;当 λ 在区域 Λ 之外时,$f_\lambda(x)$ 一般不一定是局部可积的.再假定对任意 $\varphi \in \mathscr{D}$,依赖于参数

λ 的数值函数$\langle f_\lambda,\varphi\rangle$在$\Lambda$中解析,并且可解析开拓到与$\varphi(x)$的取法无关的更大的区域$\Lambda_1$中去,且对于$\lambda_0\in\Lambda_1\setminus\Lambda$,这个解析开拓给出一个确定的广函,就可定义广函$f_{\lambda_0}$如下:

$$\int f_{\lambda_0}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \underset{\lambda\to\lambda_0}{解析开拓}\int f_\lambda(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

1. 广函 x_+^λ (λ- 复数)

当 $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ 时,有正则泛函

$$\langle x_+^\lambda,\varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \varphi\in\mathscr{S}.$$

当 $\mathrm{Re}\lambda > -n-1(\lambda\neq -1,-2,\cdots,-n)$ 时,定义

$$\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} + \int_0^1 x^\lambda\{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\}\mathrm{d}x.$$

在带状域 $-n > \mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$ 中上式变为

$$\langle x_+^\lambda,\varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\}\mathrm{d}x,$$

$$n = 1,2,\cdots$$

1.8.2 中伪函数 $Pf.x_+^{-3/2}$ 可看作它的特例.

2. 广函 x_-^λ (λ- 复数)

$$\langle x_-^\lambda,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^0 |x|^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle x_+^\lambda,\varphi(-x)\rangle$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda\{\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\cdots-\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\}\mathrm{d}x$$
$$-n > \mathrm{Re}\lambda > -n-1.$$

3. 广函 x_+^λ 和 x_-^λ 的偶组合

$$\langle |x|^\lambda,\varphi\rangle = \langle x_+^\lambda + x_-^\lambda,\varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2[\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{2m-2}(0)]\}\mathrm{d}x,$$

$$-2m+1 > \mathrm{Re}\lambda > -2m-1,\quad m = 1,2,\cdots.$$

特别地,$\langle x^{-2m},\varphi\rangle = \langle |x|^\lambda,\varphi\rangle|_{\lambda=-2m}$.

4. 广函 x_+^λ 和 x_-^λ 的奇组合

$$\langle |x|^\lambda\mathrm{sgn}x,\varphi\rangle = \langle x_+^\lambda - x_-^\lambda,\varphi\rangle$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2[x\varphi'(0)+$$

$$\frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)]\}dx,$$
$$-2m>\mathrm{Re}\lambda>-2m-2,\quad m=1,2,\cdots.$$

特别地，

$$\langle x^{-2m-1},\varphi\rangle=\langle|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x,\varphi\rangle|_{\lambda=-2m-1}.$$

其次，当 $-1>\mathrm{Re}\lambda>-2$ 时，有

$$\langle|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x,\varphi\rangle=\int_0^{\infty}x^{\lambda}\{\varphi(x)-\varphi(-x)\}dx,$$

而 $\lambda=-1$ 是广函 $|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x$ 的正则点，故

$$\langle x^{-1},\varphi\rangle=\underset{\lambda\to-1}{解析延拓}\int_0^{\infty}x^{\lambda}\{\varphi(x)-\varphi(-x)\}dx=\int_0^{\infty}x^{-1}\{\varphi(x)-\varphi(0)\}dx.$$

此与1.8.2中伪函数 $Pf.x^{-1}$ 相一致.

5. 广函 $(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 和 $(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}$

经典函数 $(x+\mathrm{i}y)^{\lambda}=e^{\lambda[\ln|x+\mathrm{i}y|+\mathrm{i}\arg(x+\mathrm{i}y)]}$，

$-\pi<\arg(x+\mathrm{i}y)<\pi$，在上半平面和下半平面分别是 $x+\mathrm{i}y=z$ 的单值解析函数，它们在实轴上分别为

$$(x\pm\mathrm{i}0)^{\lambda}=\lim_{y\to0_+}(x\pm\mathrm{i}y)^{\lambda}=\begin{cases}e^{\pm\mathrm{i}\lambda\pi}|x|^{\lambda}, & x<0;\\ x^{\lambda}, & x>0.\end{cases}$$

这两函数对任意复值 λ 有定义. 与此相应的有

定义9　广函 $(x\pm\mathrm{i}0)^{\lambda}$，$\lambda\neq-1,-2,\cdots$，定义作

$$(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}=x_+^{\lambda}+e^{\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^{\lambda},$$
$$(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}=x_+^{\lambda}+e^{-\mathrm{i}\lambda\pi}x_-^{\lambda}.$$

定理10　广函 $(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 和 $(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 是变元 λ 的整函数，且对 $n=1,2,\cdots$ 有

$$(x+\mathrm{i}0)^{n-1}=(x-\mathrm{i}0)^{n-1}=x^{n-1},$$
$$(x+\mathrm{i}0)^{-n}=x^{-n}-\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)/(n-1)!,$$
$$(x-\mathrm{i}0)^{-n}=x^{-n}+\mathrm{i}\pi(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)/(n-1)!.$$

2.2.3　函数的正则化泛函的导数

由解析延拓法不难导出以下公式：

$$(x_+^{\lambda})'=\lambda x_+^{\lambda-1},\lambda\neq0,-1,-2,\cdots$$
$$(x_-^{\lambda})'=-\lambda x_-^{\lambda-1},\lambda\neq0,-1,-2,\cdots$$
$$(|x|^{\lambda})'=\lambda|x|^{\lambda-1}\mathrm{sgn}x,\lambda\neq-1,-3,\cdots$$
$$(|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x)'=\lambda|x|^{\lambda-1},\lambda\neq-2,-4,\cdots$$
$$(x^n)'=nx^{n-1},n=1,2,\cdots$$
$$(x^{-n})'=-nx^{-n-1},n=1,2,\cdots$$
$$[(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}]'=\lambda(x+\mathrm{i}0)^{\lambda-1},\lambda\text{ 为任意复数.}$$
$$[(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}]'=\lambda(x-\mathrm{i}0)^{\lambda-1},\lambda\text{ 为任意复数.}$$
$$[\ln(x+\mathrm{i}0)]'=\frac{1}{x+\mathrm{i}0}=x^{-1}-\mathrm{i}\pi\delta(x),$$

$$[\ln(x-\mathrm{i}0)]'=\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=x^{-1}+\mathrm{i}\pi\delta(x).$$

2.2.4　广函 r^{λ}

设 $r=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$，$\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

(1) 当 $\mathrm{Re}\lambda>-n$ 时，泛函

$$\langle r^{\lambda},\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}r^{\lambda}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

定义一个正则广函，且是区域 $\mathrm{Re}\,\lambda>-n$ 中 λ 的解析函数.

(2) 当 $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant-n$ 时，由解析延拓得**正则化泛函**

$$\langle r^{\lambda},\varphi\rangle=\Omega_n\int_0^{\infty}r^{\lambda+n-1}S_{\varphi}(r)\mathrm{d}r,$$

其中 Ω_n 表示 n 维空间中单位球面的面积，$S_{\varphi}(r)$ 是函数 $\varphi(x)$ 在半径为 r 的球面上的平均值

$$S_{\varphi}(r)=\frac{1}{\Omega_n}\int_{\Omega}\varphi(x)\mathrm{d}\Omega,$$

$\mathrm{d}\Omega$ 是单位球面 Ω 的微分. 函数 $S_{\varphi}(r)$（当 $r\geqslant0$ 时有定义）$\in C^{\infty}$，有紧支集，还可表成

$$S_{\varphi}(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k\varphi(0)}{2^k k!\,n(n+2)\cdots(n+2k-2)}r^{2k}.$$

泛函 $\langle r^{\lambda},\varphi\rangle$ 在 $\lambda=-n-2k(k=0,1,\cdots)$ 处有单极点，留数为 $\Omega_n S_{\varphi}^{(2k)}(0)/(2k)!$.

2.2.5　有关正则化问题的一般性结论

设函数 $f(x)$ 除 $x=0$ 外处处局部可积，$\varphi(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

(1) 若对某个 $m>0$ 函数 $f(x)r^m$ 局部可积，则积分 $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 可以正则化.

(2) 若 f_0 是积分 $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 的正则化问题的特解，则一般解可由 f_0 加上任意个集中作用在点 $x=0$ 的泛函而得到.

(3) 若在某个以坐标原点为顶点的立体角中，函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant F(r)$，其中 $F(r)$ 当 $r\to0$ 时增加的速度比 $1/r$ 的任意次幂都要快，则积分 $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 不可能正则化.

2.3　齐次广义函数

2.3.1　齐次广函定义

定义 10　若广函 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对任意 $a>0$ 有

$$f(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n)=a^{\lambda}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

或

$$\left\langle f,\varphi\left(\frac{x_1}{a},\frac{x_2}{a},\cdots,\frac{x_n}{a}\right)\right\rangle=a^{\lambda+n}\langle f,\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rangle,$$

其中 λ 是任意复数,则称 $f(x)$ 为次数 λ 的齐次广义函数.

2.3.2 齐次广函举例

例 1 对 $x\neq 0$ 为连续的通常齐次函数 $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, 如果它的次数 λ 满足 $\mathrm{Re}\lambda>-n$,则对应的广函 $\langle f,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也是次数为 λ 的齐次函数.

例 2 狄拉克分布 $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(-n)$ 次齐次函数.

例 3 广函 r^{λ} 在区域 $\lambda\neq-n,-n-2,\cdots$ 中是 λ 次的齐次函数,这里 $r=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

例 4 设 $x\in\mathbf{R}$, $\lambda\in C$. $(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 和 $(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 对任意 λ 值是 λ 次齐次函数. x_+^{λ} 和 x_-^{λ} 对 $\lambda\neq-1,-2,\cdots$ 是 λ 次齐次函数. $|x|^{\lambda}$ 对 $\lambda\neq-1,-3,\cdots$ 是 λ 次齐次函数. $|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x$ 对 $\lambda\neq-2,-4,\cdots$ 是 λ 次齐次函数. 对任意正整数 m, x^{-m} 和 $\delta^{(m-1)}(x)$ 是 $(-m)$ 次齐次函数.

2.3.3 齐次广函性质

定理 11 设 $x\in\mathbf{R}^n$. 广函 $f(x)$ 是 λ 次齐次函数的充要条件是它满足欧拉方程

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\lambda f.$$

特别地,当 $n=1$ 时,有方程 $x\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\lambda f$.

定理 12 两个次数为 λ 的齐次广函之和也是次数为 λ 的齐次函数.

定理 13 次数为 λ 的齐次广函和次数为 μ 的无限可微齐次函数的乘积是次数为 $(\lambda+\mu)$ 的齐次广义函数.

定理 14 次数为 λ 的齐次广函对 x_i 的偏导数是次数为 $(\lambda-1)$ 的齐次广义函数.

定理 15 不同次数的齐次广函是线性无关的.

定理 16 设 f_λ 是次数为 λ 的齐次广函,且在区域 Λ 中是 λ 的解析函数. 又假定 f_λ 允许对 λ 解析开拓到更大的区域 $\Lambda_1\supset\Lambda$,则泛函 f_λ 在这较大的区域 Λ_1 中仍是次数为 λ 的齐次函数.

2.3.4 齐次广函的一般形式

定理 17 次数为 λ 的齐次广函的一般形式为

$$f(x)=\begin{cases}c_1x_+^{\lambda}+c_2x_-^{\lambda} & \text{当 }\lambda\neq-m\text{ 时;}\\ c_1x^{-m}+c_2\delta^{(m-1)}(x), & \text{当 }\lambda=-m\text{ 时,}\end{cases}$$

这里 m 是正整数, c_1 和 c_2 是任意复数, $x\in\mathbf{R}$.

2.4　物理学中常用的分布

近代物理学中，除去狄拉克分布 $\delta(x)$ 及其导数 $\delta^{(m)}(x)$ 外，还有海森伯格（Heisenberg, W）分布 $\delta_{\pm}$（或 $\delta^{\pm}$）.

定义 11　分布 $\delta_{\pm}$ 定义作

$$\langle \delta_{\pm}(x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \frac{\mp 1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x \pm \mathrm{i}\epsilon},$$

即

$$\delta_{\pm}(x) = \mp (x + \mathrm{i}0)^{-1}/(2\pi\mathrm{i}).$$

2.4.1　$\delta_{\pm}$ 和 δ 的关系式

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{2}\delta \mp \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{x},$$

$$\delta_{-} + \delta_{+} = \delta,$$

$$\delta_{-} - \delta_{+} = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\frac{1}{x}.$$

2.4.2　$\delta_{\pm}(x)$ 的导数

$$\delta_{\pm}^{(m)}(x) = \frac{\delta^{(m)}(x)}{2} \mp \frac{(-1)^m m!}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{x^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \cdots$$

3　广义函数的乘积、直积和卷积

3.1　广义函数的乘积

3.1.1　无穷可微函数和广函的乘积

1. 乘积的定义

定义 1　设 $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $g \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$. 则 f 和 g 的乘积 fg（或 gf）定义作

$$\langle gf, \varphi \rangle = \langle fg, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n).$$

如果 f 为 m 阶广函，只需要求 g 为 m 次连续可微. 设 c 是任意复数，cf 同上定义.

2. 乘积的性质

定理 1（莱布尼兹法则）　设 $f \in C^{\infty}$, $g \in \mathscr{D}'$, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j}g + f\frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

一般的有

$$\partial^k(fg) = \sum_{m+n=k} \frac{k!}{m!n!}(\partial^m f)(\partial^n g).$$

定理2(支集性质) 设 $f \in C^\infty, g \in \mathscr{D}'$,则

$$\text{supp}f(x)g(x) \subset \text{supp}f \cap \text{supp}g.$$

3. C^∞ 函数和 $\delta^{(n)}(x-c)$ 的乘积

定理3 设 $f(x) \in C^\infty(R)$,则对非负整数 n 有

$$f(x)\delta^{(n)}(x-c) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{(n-k)}(c)\delta^{(k)}(x-c).$$

特别地,当 $c = 0$ 时,对 $n = 0,1$ 有

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x);$$

$$f(x)\delta'(x) = -f'(0)\delta(x) + f(0)\delta'(x).$$

例1 对非负整数 m 和 n 有

$$x^n\delta^{(m)}(x) = \begin{cases} 0, & m < n; \\ (-1)^n n!\delta(x), & m = n; \\ \dfrac{(-1)^n m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x), & m > n. \end{cases}$$

4. 乘积 $f(x)H(x-c)$ 的 n 阶导数

定理4 设 $f \in C^\infty(R)$,则对非负整数 n 有

$$[f(x)H(x-c)]^{(n)} = f^{(n)}(x)H(x-c) + f^{(n-1)}(c)\delta(x-c) + f^{(n-2)}(c)\delta'(x-c) + \cdots + f(c)\delta^{(n-1)}(x-c).$$

3.1.2 乘积 $x^m \cdot pf.x^{-1}$

定理5 对正整数 m 有 $x^m pf.x^{-1} = x^{m-1}$.

证
$$\langle x^m pf.x^{-1}, \varphi(x)\rangle = \langle pf.x^{-1}, x^m\varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-1}\{x^m\varphi(x) - (-x)^m\varphi(-x)\}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle x^{m-1}, \varphi\rangle.$$

3.1.3 结合性乘法的不可能性

定理6 在空间 $\mathscr{D}'$ 上不存在具结合性的乘法运算.

事实上,若存在结合性乘法运算,则取 $\mathscr{D}'$ 中的元素 x, $Pf.x^{-1}$, $\delta(x)$ 应有

$$[Pf.x^{-1} \cdot x]\delta(x) = Pf.x^{-1}[x\delta(x)],$$

左边 $= 1 \cdot \delta(x) = \delta(x)$,右边 $= Pf.x^{-1}0 = 0$,互相矛盾.

3.1.4 乘积 $(x \pm \mathrm{i}0)^\alpha \cdot (x \pm \mathrm{i}0)^\beta$

定理7 对任意复数 α 和 β 有

$$(x \pm \mathrm{i}0)^\alpha \cdot (x \pm \mathrm{i}0)^\beta = (x \pm \mathrm{i}0)^{\alpha+\beta}.$$

3.2 广义函数乘积的简单应用

3.2.1 狄拉克方程的解

设 $g(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$,试求方程

$$(x-b)f(x-b) = g(x)$$

的广义解 f. 首先,当 $x \neq b$ 时 $f(x-b) = 0$,推知 Supp $f(x-b) = \{b\}$. 再由 1.7.4 中定理 39 和 3.1.1 中例 1 推得齐次方程

$$(x-b)f(x-b) = 0$$

的通解为 $c\delta(x-b)$, c 是任意常数. 由定理 5 可推出

$$(x-b)Pf.(x-b)^{-1}g(x) = g(x),$$

从而 $Pf.(x-b)^{-1}g(x)$ 是非齐次方程的一个广义特解. 这里假定了这个乘积的可结合性. 因此非齐次方程的通解为

$$f(x-b) = c\delta(x-b) + Pf(x-b)^{-1}g(x).$$

这个解首先由狄拉克导出,在迁移理论中很有用.

3.2.2 量子力学中有关广函乘积的公式

$$H(x)\delta(x) = \delta(x)H(x) = \delta(x)/2;$$

$$\delta(x)\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot\delta(x) = -\delta'(x)/2;$$

$$\frac{2\pi i}{n!}\delta_\pm^{(n)}(x)\cdot\frac{2\pi i}{m!}\delta_\pm^{(m)}(x) = \pm\frac{2\pi i}{(n+m+1)!}\delta_\pm^{(n+m+1)}(x),$$

$$(\delta_\pm(x))^2 = \frac{\delta'(x)}{4\pi i} - \frac{1}{4\pi^2x^2},$$

$$(\delta(x))^2 - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3.3 广义函数的直积

3.3.1 广函的直积的定义

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$,则空间 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 的笛卡尔乘积 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$ 的任何一点是 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$. 再设 $\mathscr{D}_m$, $\mathscr{D}_n$, $\mathscr{D}_{m+n}$ 分别表示 $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中具有紧支集的基本函数空间.

定理 8 设 $f(x) \in \mathscr{D}'_m$, $g(y) \in \mathscr{D}'_n$,则

$$\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \varphi(x,y) \in \mathscr{D}_{m+n}$$

确定空间 $\mathscr{D}_{m+n}$ 上的一个连续线性泛函.

定义 2 设 $f(x) \in \mathscr{D}'_m$, $g(y) \in \mathscr{D}'_n$. 泛函

$$\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \varphi(x,y) \in \mathscr{D}_{m+n}$$

确定的 $\mathscr{D}_{m+n}$ 中广函称为 f 和 g 的直积，记作 $f(x)\otimes g(y)$（简记作 $f(x)g(y)$）：

$$\langle f(x)\otimes g(y),\varphi(x,y)\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle,$$
$$\varphi(x,y)\in\mathscr{D}_{m+n}.$$

3.3.2　广函的直积的性质

性质 1　（可交换性）$f(x)\otimes g(y) = g(y)\otimes f(x)$.

性质 2　（连续性）设 $g\in\mathscr{D}'_n$，当 $l\to\infty$ 时，$f_l\to f$（在 $\mathscr{D}'_m$ 中），则有

$$f_l(x)\otimes g(y)\to f(x)\otimes g(y)\text{（在 }\mathscr{D}'_{m+n}\text{ 中）}.$$

性质 3　（可结合性）设 $f\in\mathscr{D}'_m, g\in\mathscr{D}'_n, h\in\mathscr{D}'_p$，则

$$f(x)\otimes[g(y)\otimes h(z)] = [f(x)\otimes g(y)]\otimes h(z).$$

性质 4　（支集性质）设记号 × 表笛卡尔积，则

$$\mathrm{supp}(f\otimes g) = (\mathrm{supp}f)\times(\mathrm{supp}g).$$

性质 5　微分法

$$\partial_x^p\partial_y^q[f(x)\otimes g(y)] = [\partial_x^p f(x)]\otimes[\partial_y^q g(y)].$$

性质 6　设 $\alpha(x)\in C^\infty$，则

$$\alpha(x)[f(x)\otimes g(y)] = [\alpha(x)f(x)]\otimes g(y).$$

性质 7　自变量的平移

$$[f\otimes g](x+h,y) = f(x+h)\otimes g(y).$$

3.3.3　广函的直积举例

例 2　设 $x\in\mathbf{R}^m, y\in\mathbf{R}^n, (x,y)\in\mathbf{R}^{m+n}$，则

$$\delta(x,y) = \delta(x)\otimes\delta(y) = \delta(x)\delta(y).$$

例 3　在直角坐标系中，

$$\delta(x_1,\cdots,x_n) = \delta(x_1)\otimes\delta(x_2)\otimes\cdots\otimes\delta(x_n)$$
$$= \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n).$$

例 4　在直角坐标系中，

$$H(x_1,\cdots,x_n) = H(x_1)\otimes H(x_2)\otimes\cdots\otimes H(x_n)$$
$$= H(x_1)H(x_2)\cdots H(x_n).$$

例 5

$$\frac{\partial^n H(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n} = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$$
$$= \delta(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

3.4　曲线坐标下的 δ 分布

3.4.1　一般变换式

定理 9　设曲线坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n) = y$ 和直角坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \boldsymbol{x}$ 联系于关系式

$$x_i = u_i(\boldsymbol{y}) = u_i(y_1,\cdots,y_n),\ i = 1,2,\cdots,n,$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$,变换的雅可比矩阵 $\mathrm{D}x/\mathrm{D}y$ 是非奇异的.又设点 P 在 x 系统和 y 系统中的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,则

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}) &= \delta(x_1-\alpha_1)\delta(x_2-\alpha_2)\cdots\delta(x_n-\alpha_n)\\ &= \delta(y_1-\beta_1)\delta(y_2-\beta_2)\cdots\delta(y_n-\beta_n)\Big/\left|\det\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y}\right|\\ &= \delta(y-\beta)\Big/\left|\det\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}y}\right|.\end{aligned}$$

证 对方程

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x_1-\alpha_1)\cdots\delta(x_n-\alpha_n)\varphi(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

作坐标变换 $x_i = u_i(y_1,\cdots,y_n) = u_i(\boldsymbol{y})$ 得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta(u_1(\boldsymbol{y})-\alpha_1)\cdots\delta(u_n(\boldsymbol{y})-\alpha_n)\varphi(u_1(\boldsymbol{y})\cdots,u_n(\boldsymbol{y}))\left|\det\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}\right|\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$
$$= \varphi(u_1(\boldsymbol{\beta}),\cdots,u_n(\boldsymbol{\beta})).$$

令 $$\varphi(u_1(\boldsymbol{y}),\cdots,u_n(\boldsymbol{y})) = \psi(y_1,\cdots,y_n).$$

则 $$\varphi(u_1(\boldsymbol{\beta}),\cdots,u_n(\boldsymbol{\beta})) = \psi(\beta_1,\cdots,\beta_n).$$

代入前式得

$$\int_{R^n}\delta(u_1(\boldsymbol{y})-\alpha_1)\cdots\delta(u_n(\boldsymbol{y})-\alpha_n)\psi(y_1,\cdots,y_n)\left|\det\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}\right|\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$
$$= \int_{R^n}\delta(y_1-\beta_1)\cdots\delta(y_n-\beta_n)\psi(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

3.4.2 极坐标系中的 δ 分布

设平面直角坐标系中点 $\boldsymbol{r} = (x,y)$ 通过关系式

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$$

变换至极坐标 $\boldsymbol{r} = (r,\varphi)$,定点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0,y_0) = (r_0,\varphi_0) \neq \mathbf{0}$,则

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\\ &= \delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)/r\quad (r>0, 0\leqslant\varphi<2\pi).\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{r}_0$ 取 $\mathbf{0}$(原点)时有

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y) = \delta(r)I(\varphi)/(2\pi r)\quad (r>0, 0\leqslant\varphi<2\pi)$$

这里 $I(\varphi)$ 为单位广函,即由常值函数 $I(\varphi)\equiv 1$ 生成的广函:

$$\langle I(\varphi),\psi(\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

证 $\boldsymbol{r}_0\neq\mathbf{0}$ 时由定理9推出.$\boldsymbol{r}_0 = \mathbf{0}$ 时可核验:

$$\langle\delta(x)\delta(y),\varphi(x,y)\rangle = \varphi(0,0),\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(R^2),$$
$$\begin{aligned}&\langle I(\varphi)\delta(r)/(2\pi r),\psi(x,y)\rangle\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}(2\pi r)^{-1}\delta(r)\psi(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\\ &= (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\psi(0,0)\mathrm{d}\psi = \psi(0,0),\quad \forall\psi\in\mathscr{D}(R^2).\end{aligned}$$

3.4.3　柱面坐标系中的 δ 分布

设空间直角坐标系中点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 变换至柱面坐标 $\boldsymbol{r}=(r,\varphi,z)$:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z,$$

对定点 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)=(r_0,\varphi_0,z_0)\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\&=\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)/r\\&\quad r>0,0\leqslant\varphi<2\pi.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{r}_0$ 取 $\boldsymbol{0}$(原点)时有

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\delta(r)\delta(z)I(\varphi)/(2\pi r)$$
$$r>0,0\leqslant\varphi<2\pi.$$

这里 $I(\varphi)$ 是单位广函.

3.4.4　球面坐标系中的 δ 分布

设空间直角坐标系中点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 变换至球面坐标 $\boldsymbol{r}=(\rho,\theta,\varphi)$:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta,$$

对定点 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)=(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\&=\delta(\rho-\rho_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)/(\rho^2\sin\theta)\\&\quad\rho>0,0<\theta<\pi,0\leqslant\varphi<2\pi.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{r}_0$ 取 $\boldsymbol{0}$(原点)时有

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\delta(\rho)I(\theta,\varphi)/(4\pi\rho^2).$$

这里 $I(\theta,\varphi)$ 为单位广函,即

$$\langle I(\theta,\varphi),\psi(\theta,\varphi)\rangle=\iint_{(\sigma)}\psi(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

σ 表单位球面.

3.5　广义函数的卷积

3.5.1　广函的卷积的定义

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是直线上两个绝对可积函数,则它们的卷积 $f(x)*g(x)=h(x)$(也是绝对可积的)所定义的泛函

$$\begin{aligned}\langle h(x),\varphi(x)\rangle&=\int\{f(x)*g(x)\}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\int\left\{\int f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\iint f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi+\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

可看成是直积 $f(x)g(y)$ 作用到函数 $\varphi(x+y)$ 的结果.

定义 3 设 $f(x)\in\mathscr{S}'_n$，$g(x)\in\mathscr{D}'_n$，则 f 和 g 的卷积 $f*g$ 定义作

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f\otimes g,\psi\rangle,$$

其中

$$\psi(x,y)=\varphi(x+y),\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

这里假定对任意 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 有意义.

充分条件 1 如果 f 和 g 的支集中有一个是有界的，则上述卷积 $f*g$ 存在.

充分条件 2 如果 f 和 g 的支集是同一方向有界的(例如，当 $x<a$ 时 $f=0$，而 $y<b$ 时 $g=0$)，则上述卷积 $f*g$ 存在.

3.5.2 广函的卷积的性质

(1) 可交换性 若 f 和 g 满足充分条件 1 或 2，则有 $f*g=g*f$.

(2) 可结合性 若 f,g,h 之中有两个的支集双方有界，或三个的支集同方向有界，则有 $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(3) 微分法 若 f 和 g 满足充分条件 1 或 2，则有

$$\partial^k(f*g)=(\partial^k f)*g=f*(\partial^k g)$$

设 D 是任意常系数微分算符，则有

$$D(f*g)=Df*g=f*Dg.$$

(4) 连续性 若下列假定之一成立：

1° 每个广函 f_ν 的支集限于同一有界集；

2° 广函 g 的支集有界；

3° 广函 f_ν 和 g 的支集同一方向有界，且其界限是一个与 ν 无关的常数.

则由 $f_\nu\to f$ 可推出 $f_\nu*g\to f*g$.

(5) 对参数 t 的微分法若依赖于参数 t 的广函 f_t 存在导数 $\frac{\partial}{\partial t}f_t$，则在(4)中假定 1°，2°，3° 之一成立时，有

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t*g)=\frac{\partial}{\partial t}f_t*g.$$

(6) 平移法 若 f 和 g 满足充分条件 1 或 2，τ_a 是平移算子，即 $\tau_a T=T(x-a)$，则有

$$\tau_a(f*g)=(\tau_a f)*g=f*(\tau_a g).$$

3.5.3 物理学中算符的卷积表示

$$\delta(x)*f(x)=f(x);$$

$$\delta(x-a)*f(x)=f(x-a)=\delta(x)*f(x-a);$$

$$\delta^{(m)}(x)*f(x)=f^{(m)}(x).$$

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意常系数微分算符，则有

$$D\delta*f=Df.$$

特别地，若 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的拉普拉斯算符

$$\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2,$$

则

$$\Delta\delta*f=\Delta f;$$

若 D 是 $\mathbf{R}^4$(空间 - 时间)中的达朗贝尔算符

$$\square = (1/v^2)\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2,$$

则

$$\square\delta * f = f.$$

3.5.4　广函的卷积的支集

定理 10　如果卷积 $f * g$ 存在,则有

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f \oplus \operatorname{supp} g}.$$

这里记号 $\oplus$ 表示点集的几何和,横线表示集合的闭包.

如果 supp f(或者 supp g)是紧集,则它们的几何和是闭集.如果它们两个都不是紧集,则它们的几何和可能不是闭的.

3.5.5　广函的卷积和直积的关系

定理 11　广函的直积的卷积等于它们的卷积的直积:

$$(A_x \times C_y) * (B_x \times D_y) = (A_x * B_x) \times (C_y * D_y),$$

其中 $A_x, B_x \in \mathscr{D}'_m$, $C_y, D_y \in \mathscr{D}'_n$,且 A_x 和 C_y 每个都有紧支集.

3.5.6　广函的正则化

定理 12　设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 或 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 或 $\varepsilon'(\mathbf{R}^n)$,则卷积

$$(S * \varphi)(x) = \langle S(y), \varphi(x - y)\rangle \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

定义 4　设 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $S \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,则 $S * \varphi$ 称为广函 S 的正则化.

定理 13　任意广函 T 是 C^∞ 函数网在 $\mathscr{D}'$ 中的极限.

定理 14　空间 $\mathscr{D}$ 在空间 $\mathscr{D}'$ 中稠密.

3.6　复数阶的微分和积分

3.6.1　可积函数的 n 重原函数

柯西公式　设 $g(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 上局部可积,则有

$$g_n(x) = \int_0^x\int_0^{\xi_{n-1}}\cdots\int_0^{\xi_2}\int_0^{\xi_1} g(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1}\mathrm{d}\xi.$$

如在 $x < 0$ 时,规定 $g(x) = 0$ 和 $x^{n-1} = 0$,则可写成

$$g_n(x) = g(x) * x_+^{n-1}/\Gamma(n).$$

3.6.2　广函的 λ 阶积分

定义 5　设广函 g 集中作用在 $x \geqslant 0$ 上,则广函的 λ 阶原函数定义为

$$g_\lambda(x) = g(x) * x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda).$$

其中 λ 是任意复数, $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

3.6.3 广函 $x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$

定理 15 广函 $\Phi_\lambda = x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ 是复变量 λ 的整函数,且有

$$\Phi_{-n} = \Phi_\lambda(x)\mid_{\lambda=-n} = \delta^{(n)}(x), \quad n = 0,1,\cdots,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_\lambda(x) = \Phi_{\lambda-1}(x).$$

3.6.4 广函的 λ 阶导数

定义 6 设广函 g 集中作用在 $x \geqslant 0$ 上,则**广函的 λ 阶导数** $g_{-\lambda}$ 定义为

$$g_{-\lambda}(x) = \frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}x^\lambda}g = g * \Phi_{-\lambda} = g(x) * x_+^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$$

这里 λ 是任意复数,$\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$.

3.6.5 广函 $\Phi_\lambda(x)$ 的性质

定理 16 对任意复数 λ 和 μ 有

$$x_+^{\lambda-1} * x_+^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}x_+^{\lambda+\mu-1}.$$

定理 17 设广函 $\Phi_\lambda = x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$,则有

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \Phi_{\lambda+\mu}.$$

特别地有 $\qquad \delta^{(\lambda)}(x) * \delta^{(\mu)}(x) = \delta^{(\lambda+\mu)}(x), \lambda,\mu = 0,1,\cdots.$

定理 18 对集中作用在半轴 $x \geqslant c$ 上的广函 g 成立

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu}.$$

由此推知同一阶微分和积分的互逆性

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_{-\lambda} = g * \Phi_0 = g, \lambda \text{ 为任意复数},$$

以及微分阶数的叠加性

$$\frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}x^\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}^\mu g}{\mathrm{d}x^\mu}\right) = \frac{\mathrm{d}^{\lambda+\mu}}{\mathrm{d}x^{\lambda+\mu}}g, \lambda,\mu \text{ 是任意复数}.$$

3.6.6 广函 $H_\lambda^\alpha = H(x)\mathrm{e}^{\alpha x}x^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$

定理 19 广函 $H_\lambda^\alpha = H(x)\mathrm{e}^{\alpha x}x^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ 是复变量 λ 和 α 的整函数,且有

$$H_\lambda^\alpha * H_\mu^\alpha = H_{\lambda+\mu}^\alpha.$$

这里 $H(x)$ 是赫维赛德函数.

当 $\alpha = 0$ 时,即得定理 17.

3.7 卷积方程和卷积代数

定义 7 支集在半直线 $x \geqslant a[x \leqslant a]$ 内的 $\mathbf{R}$ 上的广函空间用 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^+)$ $[\mathscr{D}'(\mathbf{R}^-)]$ 表示,简记作 $\mathscr{D}'^+[\mathscr{D}'^-]$,其中元素称为**右[左]侧广函**.

3.7.1　两类卷积方程

考察包含卷积的方程

$$A * X = B,$$

其中 A 和 B 是给定的广函，分别称为方程的“核”和“非齐次项”. 若 $B = 0$，则方程称为齐次的.

(1) $A \in \mathscr{E}'$，$X \in \mathscr{D}'$.

例 6　常系数偏微分方程

$$\sum_{|j| \leq m} a_j \partial^j X = \sum_{|j| \leq m} a_j \partial^j \delta * X = B,$$

这里核的支集是原点.

例 7　有限差分方程

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \delta(x - h_i) * X = B,$$

这里核的支集是 m 个点 $x = h_i$.

(2) $A \in \mathscr{D}'_+$，$X \in \mathscr{D}'_+$

设 $\operatorname{supp} K, \operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset \mathbf{R}^+$.

例 8　第一型伏尔特拉(Volterra, V)积分方程

$$f(x) + \int_0^x K(x - t) f(t) \mathrm{d}t = g(x),$$

即

$$(\delta + K) * f = g.$$

例 9　第二型伏尔特拉积分方程

$$\int_0^x K(x - t) f(t) \mathrm{d}t = g(x),$$

即

$$K * f = g.$$

例 10　设 $\mathrm{D} = \mathrm{d}^m/\mathrm{d}t^m + a_1 \mathrm{d}^{m-1}/\mathrm{d}t^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}t + a_m$，常微分方程 $\mathrm{D}f = \mathrm{D}\delta * f = g$，这里 $t > 0$.

3.7.2　卷积代数

定义 8　设有广函空间 $\mathscr{D}'$ 的向量子空间 $\mathscr{A}'$，使得两个或任意有限个属于 $\mathscr{A}'$ 的广函的卷积总有定义，且属于 $\mathscr{A}'$，这个卷积是可结合与可交换的，此外，$\delta \in \mathscr{A}'$，则称此空间 $\mathscr{A}'$ 为**卷积代数**.

例 11　$\mathscr{A}' = \mathscr{D}'(\Gamma)$ 是圆周上所有广函的卷积代数.

例 12　$\mathscr{A}' = \mathscr{E}'$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有紧支集的广函的卷积代数.

例 13　$\mathscr{A}' = \mathscr{D}'(\mathbf{R}^+) \equiv \mathscr{D}'_+$ 是支集包含在半直线 $x \geq 0 (n = 1)$ 的广函的卷积代数.

例 14　设 Γ^+ 是 $\mathbf{R}^4$(空间 - 时间)中顶点在原点的锥体

$$t \geq 0, t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0,\text{则 } \mathscr{A}' = \mathscr{D}'(\Gamma^+)$$

是支集包含在未来波锥 Γ^+ 内的广函的卷积代数.

3.7.3 卷积方程的解的特性

1. 齐次方程的解

设 $A \in \mathscr{E}'$ 或 $A \in \mathscr{A}'$(卷积代数).

定理 20 齐次卷积方程 $A * X = 0$ 的解形成空间 $\mathscr{D}'$(若 $A \in \mathscr{E}'$)的或 $\mathscr{A}'$(若 $A \in \mathscr{A}'$, $X \in \mathscr{A}'$)的线性子空间.

定理 21 齐次卷积方程 $A * X = 0$ 的任何解都是 C^∞ 函数形式的解的极限.

2. 广函 A 的逆元

定义 9 设 $A \in \mathscr{E}'$ 或 $A \in \mathscr{A}'$. 若有广函 $E \in \mathscr{D}'$(若 $A \in \mathscr{E}'$)或 $\in \mathscr{A}'$(若 $A \in \mathscr{A}'$)使等式 $A * E = \delta$ 成立,则称 A 是可逆的,A 的**逆元**是 E: $A^{-1} = E$, 即 $A * A^{-1} = \delta$.

逆元 A^{-1} 也称为**方程 $A * X = \delta$ 的基本解**.

在卷积代数 $\mathscr{A}'$ 中,逆元 A^{-1} 满足关系式

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = \delta.$$

方程 $A * X = \delta$ 的基本解 E 如果存在,一般也不是唯一的. 事实上,设 E_1 是齐次方程 $A * X = 0$ 的解,则 $E + E_1$ 仍是方程 $A * X = \delta$ 的基本解.

定理 22 若 A_1 和 A_2 在卷积代数 $\mathscr{A}'$ 中可逆,则卷积 $A_1 * A_2$ 也可逆,且它的逆元是

$$(A_1 * A_2)^{-1} = A_1^{-1} * A_2^{-1}.$$

3. 非齐次方程的解

在卷积代数 $\mathscr{A}'$ 中考察卷积方程

$$A * X = B, \tag{3-1}$$

其中 $A, B \in \mathscr{A}'$,未知广函 X 也在 $\mathscr{A}'$ 中寻求.

定理 23 设 A 给定. 为使方程(3-1)对任何非齐次项 B 至少有一解,必要与充分条件是,广函 A 在 $\mathscr{A}'$ 内有逆元 A^{-1},此时逆元是唯一的. 且方程(3-1)总存在唯一解 $X = A^{-1} * B$.

如果未知广函 X 不在卷积代数中寻求,则有

定理 24 若 $A \in \mathscr{E}'$,它的逆元 A^{-1} 在 $\mathscr{D}'$ 中存在,且 $B \in \mathscr{E}'$. 则 $X = A^{-1} * B$ 是方程 $A * X = B$ 的解,且方程 $A * X = B$ 至多有一解 $X \in \mathscr{E}'$.

3.8 应用 —— 常微分算符

3.8.1 逆元和齐次方程始值问题的关联

定理 25 设 D 是常系数($n = 1$,单变量)m 阶常微分算符

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_m, \tag{3-2}$$

则广函 $\mathrm{D}\delta$ 在卷积代数 $\mathscr{D}'_+$ 中可逆,且它的逆元

$$(\mathrm{D}\delta)^{-1} = HZ,$$

这里 H 是海维赛德函数，Z 是始值问题

$$\begin{cases} DZ = 0; \\ Z(0) = Z'(0) = \cdots = Z^{(m-2)}(0) = 0, Z^{(m-1)}(0) = 1 \end{cases} \tag{3-3}$$

的解.

证 由乘积导数公式(见 3.1.1 定理 4)

$$\begin{cases} (HZ)' = HZ' + \delta Z(0), \\ (HZ)'' = HZ'' + \delta Z'(0) + \delta' Z(0), \\ \quad \cdots \\ (HZ)^{(m-1)} = HZ^{(m-1)} + \delta Z^{(m-2)}(0) + \cdots + \delta^{(m-2)} Z(0), \\ (HZ)^{(m)} = HZ^{(m)} + \delta Z^{(m-1)}(0) + \cdots + \delta^{(m-1)} Z(0), \end{cases} \tag{3-4}$$

利用关于 Z 的初始条件，上面这些等式变为

$$(HZ)^{(k)} = HZ^{(k)}, \quad 当 k \leqslant m-1 时,$$
$$(HZ)^{(m)} = HZ^{(m)} + \delta.$$

由卷积微分法则，利用上述等式和 $DZ = 0$ 得

$$D\delta * (HZ) = D(HZ) = H(DZ) + \delta = \delta.$$

3.8.2 常用算符的基本解

例 15 设 λ 是任意复数，算符 $D = (d/dt - \lambda)$ 的基本解是

$$(D\delta)^{-1} = (\delta' - \lambda\delta)^{-1} = H(t)e^{\lambda t}.$$

例 16 设 ω 是任意实数，算符 $D = (d^2/dt^2 + \omega^2)$ 的基本解是

$$(D\delta)^{-1} = (\delta'' + \omega^2\delta)^{-1} = H(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

例 17 设 m 是正整数，则算符 $D = (d/dt - \lambda)^m$ 的基本解是

$$(D\delta)^{-1} = (\delta' - \lambda\delta)^{-m} = H(t)e^{\lambda t}t^{m-1}/(m-1)!.$$

3.8.3 算符的分解

例 18 设常微分算符(3-2)的特征多项式

$$P(Z) = Z^m + a_1 Z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}Z + a_m$$
$$= (Z - Z_1)(Z - Z_2)\cdots(Z - Z_m),$$

则可推知算符的分解式

$$D = (d/dt - Z_1)(d/dt - Z_2)\cdots(d/dt - Z_m),$$

从而

$$D\delta = (\delta' - Z_1\delta) * (\delta' - Z_2\delta) * \cdots * (\delta' - Z_m\delta).$$

由定理 22 推知逆元$(D\delta)^{-1}$存在，且

$$(D\delta)^{-1} = H(t)e^{Z_1 t} * H(t)e^{Z_2 t} * \cdots * H(t)e^{Z_m t}.$$

例 19 设常微分算符(3-2)的特征多项式

$$P(Z) = \prod_j (Z - Z_j)^{k_j},$$

推知算符 D 的分解式 $\mathrm{D}=\prod_j(\mathrm{d}/\mathrm{d}t-Z_j)^{k_j}$，从而

$$(\mathrm{D}\delta)^{-1}=(\prod_j(\mathrm{d}/\mathrm{d}t-Z_j)^{k_j}\delta)^{-1}.$$

如果先将 D^{-1} 展为简单分式

$$\frac{1}{\prod_j(p-Z_j)^{k_j}}=\sum_j\left\{\frac{c_{j,k_j}}{(p-Z_j)^{k_j}}+\cdots+\frac{c_{j,1}}{p-Z_j}\right\},$$

其中 $p=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 利用例 17 的结果，不难求出算符的逆元$(\mathrm{D}\delta)^{-1}$.

3.8.4 非齐次常微分方程的始值问题

定理 26 设 D 是给定的 m 阶常系数微分算符(3-2)．f 是给定的函数，则非齐次方程(在函数理论意义下)的始值问题

$$\begin{cases}\mathrm{D}Y=f;\\ Y^{(k)}(0)=Y_k(\text{常数}),k\leqslant m-1\end{cases}\tag{3-5}$$

的解为

$$Y(t)=\int_0^t Z(t-x)f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{m-1}e_kZ_{(t)}^{(k)},\tag{3-6}$$

其中 Z 是齐次方程始值问题(3-3)的解，

$$\begin{cases}e_0=Y_{m-1}+a_1Y_{m-2}+\cdots+a_{m-1}Y_0\\ e_1=Y_{m-2}+a_1Y_{m-3}+\cdots+a_{m-2}Y_0\\ \vdots\\ e_{m-1}=\qquad\qquad\qquad\qquad\quad Y_0\end{cases}\tag{3-7}$$

证 在乘积导数公式(3-4)中用 $Y(t)$ 替代 $Z(t)$，并使用(3-5)式中的初始条件，可推出

$$(\mathrm{D}\delta)*(HY)=\mathrm{D}(HY)=H(\mathrm{D}Y)+\sum_{k=0}^{m-1}e_k\delta^{(k)}=Hf+\sum_{k=0}^{m-1}e_k\delta^{(k)},$$

其中 H 是赫维赛德函数，e_k 如(3-7)式所示.

由此量逆元$(\mathrm{D}\delta)^{-1}=HZ$(见定理 25)，即得

$$HY=HZ*(Hf+\sum_{k=0}^{m-1}e_k\delta^{(k)}).$$

即当 $t\geqslant0$ 时，函数

$$Y(t)=\int_0^t Z(t-x)f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{m-1}e_kZ^{(k)}(t).$$

当 $t\leqslant0$ 时可在分布代数 $\mathscr{D}'$ 中研讨，推出相同的结果.

不难验证，(3-6)所示的函数 $Y(t)$ 确是问题(3-5)的解.

4　傅里叶变换

4.1　急降函数的傅里叶变换

4.1.1　傅里叶变换的定义

设 $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbf{R}^n$,记 $u \cdot x = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$.

定理1　积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}\varphi(x)dx = \widehat{\varphi}(u)$$

和

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iu\cdot x}\varphi(u)du = \check{\varphi}(x)$$

存在,且 $\widehat{\varphi}(u), \check{\varphi}(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

定理2　(再生性公式)

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iu\cdot x}du\int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}\varphi(x)dx = \varphi(x).$$

定义1　称

$$\widehat{\varphi}(u) = F[\varphi] = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iu\cdot x}\varphi(x)dx$$

为 $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的傅里叶变换式,称

$$\check{\varphi}(x) = F^{-1}(\varphi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-iu\cdot x}\varphi(u)du$$

为 $\varphi(u) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的傅里叶逆变换式①.

由此,定理2可完整叙述如下.

定理3　傅里叶变换和它的逆变换是映空间 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 的双射,且是连续线性映

---

①　傅里叶变换有多种定义方式,例如

$$\begin{cases}\widehat{\varphi_1}(u) = \int e^{-iu\cdot x}\varphi_1(x)dx,\ \widehat{\varphi_1}(u) = \overline{\widehat{\varphi}}(u),\\ \check{\varphi}_1(u) = (2\pi)^{-n}\int e^{iu\cdot x}\varphi_1(u)du,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\widehat{\varphi_2}(u) = \int e^{2\pi iu\cdot x}\varphi_2(x)dx,\ \widehat{\varphi_2}(u) = \widehat{\varphi}(2\pi u),\\ \check{\varphi}_2(u) = \int e^{-2\pi iu\cdot x}\varphi_2(u)d(u),\end{cases}$$

及其他类似情形,读者可注意其转换关系.

射：

$$(\hat{\varphi}(x))^{\vee} = \varphi(x),\ (\check{\varphi}(u))^{\wedge} = \varphi(u),\ \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

4.1.2　几个重要定理

定理 4　若 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，则有

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(u) g(u) \mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}^n} f(u) \hat{g}(u) \mathrm{d}u.$$

定理 5（帕塞瓦尔公式）　若 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，则有

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(u) \overline{\hat{g}(u)} \mathrm{d}u = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} f(u) \overline{g}(u) \mathrm{d}u .$$

定理 6（卷积定理）　若 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，则有

$$(f * g)^{\wedge} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

定理 7（频率卷积定理）　若 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，则有

$$(f \cdot g)^{\wedge} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}.$$

4.1.3　傅里叶变换的性质（一维情形）

1° 累次运算

$$(\varphi(x)^{\wedge})^{\wedge} = 2\pi\varphi(-x).$$

2° 导数的傅里叶变换式

$$[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^k \varphi]^{\wedge}(u) = (-\mathrm{i}u)^k \hat{\varphi}(u);$$

$$[P(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\varphi]^{\wedge}(u) = P(-\mathrm{i}u)\hat{\varphi}(u),$$

这里 $P(\lambda)$ 是任意的常系数多项式.

3° 傅里叶变换式的导数

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)^k \hat{\varphi}(u) = [(\mathrm{i}x)^k \varphi]^{\wedge}(u);$$

$$P(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)\hat{\varphi}(u) = [P(\mathrm{i}x)\varphi]^{\wedge}(u),$$

这里 $P(\lambda)$ 是任意的常系数多项式.

4° 位移性质

$$[\varphi(x-a)]^{\wedge}(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}au}\hat{\varphi}(u);$$

$$[\varphi]'(u+a) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\varphi(x)]^{\wedge}(u).$$

5° 尺度伸缩性质

$[\varphi(ax)]^{\wedge}(u) = \hat{\varphi}(u/a)/|a|$，$a$ 为实数.

特别地

$$[\varphi(-x)]^{\wedge}(u) = \hat{\varphi}(-u).$$

4.1.4　傅里叶变换的性质（n 维情形）

1° $(\varphi(\boldsymbol{x})\hat{\ })\hat{\ } = (2\pi)^n\varphi(-\boldsymbol{x})$；

2° $\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi\right]\hat{\ }(\boldsymbol{u}) = P(-\mathrm{i}u_1,\cdots,-\mathrm{i}u_n)\hat{\varphi}(\boldsymbol{u})$，

这里 $P(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是任意的常系数多项式.

3° $P\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u_n}\right)\hat{\varphi}(\boldsymbol{u}) = [P(\mathrm{i}x_1,\cdots,\mathrm{i}x_n)\varphi]\hat{\ }(\boldsymbol{u})$，

这里 $P(\lambda_1,\lambda_w,\cdots,\lambda_n)$ 是任意的常系数多项式.

4° $[\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})]\hat{\ }(\boldsymbol{u}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}\hat{\varphi}(\boldsymbol{u})$；

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}) = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\varphi]\hat{\ }(\boldsymbol{u}).$$

5° $[\varphi(A\boldsymbol{x})]\hat{\ }(\boldsymbol{u}) = |\det A|^{-1}\hat{\varphi}((A^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{u})$，

这里 A 是非奇异阵，A^{T} 是它的转置阵.

特别地，对于旋转变换 $\boldsymbol{A}$ 有

$$[\varphi(A\boldsymbol{x})]\hat{\ }(\boldsymbol{u}) = \hat{\varphi}(A\boldsymbol{u}).$$

4.2　缓增广义函数的傅里叶变换

4.2.1　缓增广义函数傅里叶变换的定义

定义 2　缓增广义函数 $t(x)$ 的傅里叶变换式 $\hat{t}$ 由等式

$$\langle\hat{t},\varphi\rangle = \langle t,\hat{\varphi}\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathscr{S}$$

确定；缓增广义函数 $t(x)$ 的傅里叶逆变换式 $\check{t}$ 由等式

$$\langle\check{t},\varphi\rangle = \langle t,\check{\varphi}\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathscr{S}$$

确定.

定理 8　缓增广义函数 $t(x)$ 的傅里叶变换 $t\mapsto\hat{t}$ 和傅里叶逆变换 $t\mapsto\check{t}$ 是映空间 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 的双射，且是连续线性映射：

$$(\hat{t})^{\vee} = t,(\check{t})\hat{\ } = t,\forall t\in\mathscr{S}'.$$

说明　在傅里叶变换的古典理论中，曾证明了当 $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 时变换式

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

存在，且 $\hat{\varphi}\in L^2(\mathbf{R}^n)$，而变换 $\varphi\mapsto\hat{\varphi}$ 是映空间 L^2 到 L^2 的双射，且是连续线性映射. 另一方面，$L^2(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 的一个子空间（见 1.2.4 例 12）. 于是 $\varphi\in L^2$ 在广函意义下的傅里叶变换也存在. 再注意到性质 $\langle\hat{t},\varphi\rangle = \langle t,\hat{\varphi}\rangle$ 不论 t 在经典意义或广函意义下均成立，可知此二概念相一致.

定理 9　设 $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\hat{f}$是 f 在缓增广函意义下的傅里叶变换式. 则有

1° $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)$；

2° $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2}$　（帕塞瓦尔公式）.

4.2.2　傅里叶变换的性质

关于函数 $\varphi \in \mathscr{S}$ 的傅里叶变换的性质（见 4.1.2 和 4.1.4）全部可转移到缓增广义函数（$t \in \mathscr{S}'$）上来，只需将符号 φ 改成 t 即可.

4.3　紧支广义函数的傅里叶变换

定理 10　紧支广函 T 的傅里叶变换式可表成

$$\hat{T}(x) = \langle T(y), e^{iy\cdot x}\rangle \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

$\hat{T}(x)$ 在无限远处还是缓增函数，即对每个多重指标 α 存在一个非负整数 p 和一个常数 $M_{p,\alpha}$，使

$$|(\partial^\alpha \hat{T})(x)| \leqslant M_{p,\alpha}(1 + |x|^2)^p, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

定理 11（帕利 - 威那(Paley-Winer)定理）　紧支广函的傅里叶变换式可以延拓成 n 维复空间 $C^n = C \times C \times \cdots \times C$ 上的一个解析函数.

定理 12　若广函 T 的傅里叶变换式 $\hat{T}(x)$ 是一个连续函数，且能延拓成 C^n 上的一个解析函数 $F(Z)$，使得

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln|F(Z)|}{|Z_1| + \cdots + |Z_n|} \leqslant c.$$

则广函 T 具有紧支集，且 supp T 包含在立方体 $|y_i| \leqslant c$ 中，$i = 1, 2, \cdots, n$.

4.4　有关卷积和直积的几个定理

定义 3　若 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$；$T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则 T 和 φ 的卷积 $T * \varphi$ 定义为

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x - y)\rangle.$$

定理 13　若 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，$T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则双线性映射

$$(\varphi, T) \to (T * \varphi)(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n),$$

且对每个变量连续.

定理 14　若 $\varphi \in \mathscr{S}$，$T \in \mathscr{S}'$，则

$$(\varphi * T)^\wedge = \hat{\varphi} \cdot \hat{T}.$$

定理 15（卷积定理）　若 $\varphi \in \mathscr{S}$，$T \in \mathscr{S}'$，则

$$(\varphi \cdot T)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{T}.$$

定理 16（频率卷积定理）　若 $f \in \mathscr{S}'$，$g \in \mathscr{E}'$，则

$$(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\cdot\hat{g}.$$

定理 17（卷积定理）　设 $f(x)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，$g(y)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^m)$，则直积 $f\otimes g$ 的傅里叶变换等于它们的傅里叶变换的直积：

$$(f\otimes g)^{\wedge}=\hat{f}\otimes\hat{g}.$$

4.5　应用——非周期函数的频谱

若非周期函数 $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄利克雷条件，且在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，则在 $f(t)$ 的连续点处可表示成积分形式：

$$f(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\ ,$$

其中

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

是 $f(t)$ 的傅里叶变换式.

在频谱分析中，$F(\omega)$ 又称为 $f(t)$ 的**频谱函数**，$|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱（简称频谱），它在量子理论、无线电技术、声学和振动学中应用甚广. 可是，一些常用的函数，如常数、赫维塞德函数以及三角函数等都不满足在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积的条件，它们的经典傅里叶变换式不再存在. 然而它们却可看成缓增广函，从而它们的傅里叶变换式就有严密的数学意义了.

4.5.1　狄拉克分布的频谱函数

(1) $[\delta(x)]^{\wedge}=1$

证　对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$\begin{aligned}\langle\hat{\delta},\varphi\rangle=\langle\delta,\hat{\varphi}\rangle&=\langle\delta(x),\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\mathrm{d}y\rangle\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y\\&=\langle 1,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

于是 $[\delta(x)]^{\wedge}=1$. 此式也可由定理9推出：

$$\hat{\delta}(u)=\langle\delta(x),\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\rangle=1.$$

(2) $[\delta(x-a)]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}$.

4.5.2　常值分布的频谱函数

$$[1]^{\wedge}=2\pi\delta(u).$$

事实上，

$$[1]=[\hat{\delta}(x)^{\wedge}]^{\wedge}=2\pi\delta(-x)=2\pi\delta(x).$$

4.5.3 赫维塞德函数的频谱函数

(1) $[H(x)]^\wedge(u) = \pi\delta(u) + \mathrm{i}Pf.u^{-1} = 2\pi\delta_+(u)$;

(2) $[H(-x)]^\wedge(u) = \pi\delta(u) - \mathrm{i}Pf.u^{-1} = 2\pi\delta_-(u)$.

证 因 $H'(x) = \delta(x)$,利用微分性质可得

$$-\mathrm{i}u\widehat{H}(u) = [H'(x)]^\wedge(u) = [\delta(x)]^\wedge(u) = 1,$$

它是以 $\widehat{H}$为未知函数的狄拉克方程(见 3.2.1),故

$$[H(x)]^\wedge(u) = c\,\delta(u) + \mathrm{i}Pf\cdot u^{-1},$$

其中 c 是一个常数.再由伸缩性质可得

$$[H(-x)]^\wedge(u) = c\,\delta(u) - \mathrm{i}Pf\cdot u^{-1},$$

将所得两式相加,就有

$$[H(x)]^\wedge(u) + [H(-x)]^\wedge(u) = 2c\,\delta(u),$$

为确定 c 的值,可对等式 $H(x) + H(-x) = 1$ 两端取傅里叶变换,得

$$[H(x)]^\wedge(u) + [H(-x)]^\wedge(u) = 2\pi\delta(u),$$

从而推知 $c = \pi$.

4.5.4 符号函数的频谱函数

利用关系式 $\mathrm{sgn}x = H(x) - H(-x)$ 不难推知

$$[\mathrm{sgn}x]^\wedge(u) = 2\mathrm{i}Pf\cdot u^{-1}.$$

4.5.5 海森伯格分布 $\delta_\pm$ 的频谱函数

(1) $[\delta_+(x)]^\wedge(u) = H(-u)$;

(2) $[\delta_-(x)]^\wedge(u) = H(u)$.

事实上,

$$[2\pi\delta_+(x)]^\wedge = [H(u)^\wedge]^\wedge = 2\pi H(-u),$$

即得第一式,同法可推出(2).

4.5.6 $Pf.x^{-1}$ 的频谱函数

$$[Pf\cdot x^{-1}]^\wedge(u) = \mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}\,u.$$

此可由

$$2\mathrm{i}[Pf\cdot x^{-1}]^\wedge = [(\mathrm{sgn}u)^\wedge(x)]^\wedge(u) = 2\pi\,\mathrm{sgn}(-u)$$

推得.

4.5.7 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}$ 的频谱函数

(1) $[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}]^\wedge(u) = 2\pi\delta(u+a)$.

事实上，

$[e^{iax}\cdot 1]^{\wedge}(u) = [1]^{\wedge}(u+a) = 2\pi\delta(u+a)$.

(2) $[e^{-iax}]^{\wedge}(u) = 2\pi\delta(u-a)$.

4.5.8　$\cos\omega x$ 和 $\sin\omega x$ 的频谱函数

利用欧拉公式易于推出

(1) $[\cos\omega x]^{\wedge}(u) = \pi[\delta(u+\omega)+\delta(u-\omega)]$;

(2) $[\sin\omega x]^{\wedge}(u) = -i\pi[\delta(u+\omega)-\delta(u-\omega)]$.

4.6　广义函数的傅里叶变换公式表

4.6.1　单变量函数

广义函数 $f(x)$	傅里叶变换式 $\hat{f}(u)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	$(-iu)^k$
$\delta_+(x)$	$H(-u)$
$\delta_-(x)$	$H(u)$
$H(x)$	$2\pi\delta_+(u) = \pi\delta(u) + iu^{-1}$
$H(-x)$	$2\pi\delta_-(u) = \pi\delta(u) - iu^{-1}$
1	$2\pi\delta(u)$
多项式 $P(x)$	$2\pi P(-id/du)\delta(u)$
x^k	$2\pi(-i)^k\delta^{(k)}(u)$
x^{-m}	$\pi i^m u^{m-1}\operatorname{sgn}u/(m-1)!$
$\lvert x\rvert^{2k}\operatorname{sgn}x$	$2i(-1)^k(2k)!\,u^{-2k-1}$
$\lvert x\rvert^{2k+1}$	$2(-1)^{k+1}(2k+1)!\,u^{-2k-2}$
$\lvert x\rvert^{\lambda},\lambda\neq -1,-3,\cdots$	$-2\sin(\lambda\pi/2)\Gamma(\lambda+1)\lvert u\rvert^{-\lambda-1}$
$\lvert x^{\lambda}\rvert\operatorname{sgn}x,\lambda\neq -2,-4,\cdots$	$2i\cos(\lambda\pi/2)\Gamma(\lambda+1)\lvert u\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}u$
$x_+^{\lambda},\lambda\neq -1,-2,\cdots$	$ie^{i\lambda\pi/2}\Gamma(\lambda+1)(u+i0)^{-\lambda-1}$
$x_-^{\lambda},\lambda\neq -1,-2,\cdots$	$-ie^{-i\lambda\pi/2}\Gamma(\lambda+1)(u-i0)^{-\lambda-1}$
x_+^k	$(-i)^k\pi\delta^{(k)}(u) + i^{k+1}k!\,u^{-k-1}$
x_-^k	$i^k\pi\delta^{(k)}(u) + (-i)^{(k+1)}k!\,u^{-k-1}$
$(x+i0)^{\lambda}$	$2\pi e^{i\lambda\pi/2}u_-^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$
$(x-i0)^{\lambda}$	$2\pi e^{-i\lambda\pi/2}u_+^{-\lambda-1}/\Gamma(-\lambda)$
e^{bx}	$2\pi\delta(u-bi)$

续表

广义函数 $f(x)$	傅里叶变换式 $\hat{f}(u)$
$\sin bx$	$-i\pi[\delta(u+b)-\delta(u-b)]$
$\cos bx$	$\pi[\delta(u+b)+\delta(u-b)]$
$\sinh bx$	$\pi[\delta(u-bi)-\delta(u+bi)]$
$\cosh bx$	$\pi[\delta(u-bi)+\delta(u+bi)]$
$e^{-t\|x\|^2/2}$	$\sqrt{\pi/t}\,e^{-\|u\|^2/(4t)}$
$\ln x_+$	$i\{(\Gamma'(1)+i\pi/2)[(u+i0)^{-1}-(u+i0)^{-1}\ln(u+i0)]\}$
$\ln x_-$	$-i\{(\Gamma'(1)-i\pi/2)[(u-i0)^{-1}-(u-i0)^{-1}\ln(u-i0)]\}$

在上表中,$k=0,1,2,\cdots;m=1,2,\cdots$.

4.6.2 多变量函数(n 个变量)

广义函数 $f(x)$	傅里叶变换式 $\hat{f}(u)$
$\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	1
1	$(2\pi)^n\delta(u_1,u_2,\cdots,u_n)$
多项式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	$(2\pi)^nP\left(-i\dfrac{\partial}{\partial u_1},\cdots,-i\dfrac{\partial}{\partial u_n}\right)\delta(u)$
$r^\lambda,\lambda\neq-n,-n-2,\cdots$	$2^{\lambda+n}\pi^{n/2}\left(\Gamma\left(\dfrac{\lambda+n}{2}\right)/\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)\rho^{-\lambda-n}$
r^{2-n}	$4\pi^{n/2}\left[\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)\right]^{-1}\rho^{-2}$
$r^{-1}(n=3)$	$4\pi\rho^{-2}$
$r^{-2}(n=2)$	$-2\pi\ln\rho-2\pi C$ $C=\displaystyle\int_0^1\frac{1-J_0(y)}{y}dy-\int_1^\infty\frac{J_0(y)}{y}dy$
$\delta(r-a),n\geqslant1$	$\Omega_{n-1}a^{n/2}J_{\frac{n-2}{2}}(a\rho)\rho^{1-n/2}$
$\delta(r-a),n=3$	$4\pi a\rho^{-1}\sin(a\rho)$
$\left(\dfrac{d}{ada}\right)^m\dfrac{\delta(r-a)}{a}$	$\Omega_n\sqrt{2/\pi}\rho^{-1}\sin(a\rho)$
e^{-tr^2}	$(\pi/t)^{n/2}e^{\rho^2/(4t)}$
e^{isr^2}	$(i\pi/s)^{n/2}e^{i\rho^2/(4s)}$

在上表中,$r=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2},\rho=(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)^{1/2},\Omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$,$J_p$ 是 p 阶贝塞尔函数,$m=0,1,\cdots$.

5 拉普拉斯变换

5.1 经典函数的拉普拉斯变换

5.1.1 拉氏变换的定义

定理1 设函数 $f(t)$ 满足:1) $f(t)$ 及其导数 $f'(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 时除去有限个第一类不连续点之外处处连续;2) 当 $t \to \infty$ 时 $f(t)$ 的增长速度不超过某一个指数函数,即存在正常数 $M > 0$ 和 $c \geqslant 0$ 使 $|f(t)| \leqslant Me^{ct}(0 < t < \infty)$, c 称为 $f(t)$ 的增长指数.则由积分

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p) \quad (p \text{ 是复数})$$

所定义的函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, p > c$ 上一定存在,而且 $F(p)$ 是解析函数.

定义1 设 $f(t)$ 满足定理1中条件1)和2),则称积分式

$$L[f] \equiv \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

为 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换式**(简称拉氏变换式). $\tilde{f}(p)$ 称为拉氏变换的像, $f(t)$ 称为变换的像源.记

$\sigma_f = \inf\{c: f(t)e^{-ct} \in L(-\infty,\infty)\}$,称为积分式 $L[f]$ 的可和性横坐标.

定理2 设 $f(t)$ 的拉氏变换式为 $F(p)$,则当 $t > 0$ 时在 $f(t)$ 的每一个连续点处有

$$f(t) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} F(p)e^{pt}dp, \tag{5-1}$$

其中积分是沿着任一直线 $\mathrm{Re}\, p = \sigma > c$ 取的,且当 $t < 0$ 时,上式右端等于零.

定义2 称积分式

$$f(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \tilde{f}(p)e^{pt}dp$$

为 $\tilde{f}(p)$ 的拉普拉斯逆变换式,其中 $\sigma = \mathrm{Re}\, p$.

5.1.2 拉氏变换的基本性质

1° 线性性质 $L[af(t) + bg(t)] = a\tilde{f}(p) + b\tilde{g}(p)$.

2° 微分性质 若函数 $f(t)$ n 次连续可微,且 $\tilde{f}^{(i)}(p)$ 存在, $i = 0,1,\cdots,n$,则

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n\tilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

如果 $f^{(i)}(0)$ 无定义,则补充定义 $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(+0)$, $i = 0,1,2,\cdots,n-1$.

3° 尺度伸缩性质　设 $a>0$,则有

$$L[f(at)]=a^{-1}\tilde{f}(p/a)$$

4° 位移性质　设 ω 是任意复数,则

$$L[e^{\omega t}f(t)]=\tilde{f}(p-\omega).$$

5° 延迟性质　设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$,则对任一 $\tau\geqslant 0$ 有

$$L[f(t-\tau)H(t-\tau)]=e^{-\tau p}\tilde{f}(p).$$

6° 像函数微分性质　若 $\tilde{f}(p)$ 存在,则

$$[\tilde{f}(p)]^{(n)}=L[(-t)^n f(t)],\quad n=0,1,\cdots$$

7° 像源的唯一性　若等式 $\tilde{f}(p)=\tilde{g}(p)$ 在它的收敛区域中某条铅垂线上成立,则 $f(t)=g(t)$.

5.1.3　卷积定理

定理 3　设 $\tilde{f}(p)$ 和 $\tilde{g}(p)$ 存在,则 $L[(f*g)(t)]$ 存在,且

$$L[(f*g)(t)]=\tilde{f}(p)\cdot\tilde{g}(p),\mathrm{Re}\,p>\max(\sigma_f,\sigma_g).$$

5.2　右侧广义函数的拉普拉斯变换

5.2.1　拉普拉斯变换的定义

定义 3　设 $f(t)$ 是右侧广函,即 $f\in\mathscr{D}'^{+}(\mathbf{R})$(见 3.7),且对某实数 c 有 $e^{-ct}f\in\mathscr{S}'$,则称 f 为 L 可变的,并定义其拉普拉斯变换式为

$$\tilde{f}(p)\equiv L[f]=\langle e^{-ct}f,e^{-(p-c)t}\rangle=\langle f,e^{-pt}\rangle,\mathrm{Re}\,p>c.$$

此时 $\tilde{f}(p)$ 是解析函数.类似可定义左侧广函的拉氏变换.

例 1　$[H(t)]^{\sim}=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=1/p.$

例 2　$[\delta(t)]^{\sim}=\langle\delta(t),e^{-pt}\rangle=1.$

例 3　$[\delta^{(n)}(t)]^{\sim}=p^n.$

例 4　$[\delta(t-a)]^{\sim}=e^{-ap}.$

定理 4　设 $F(p)$ 当 $\mathrm{Re}\,p\geqslant c$ 时为解析函数,且

$$|F(p)|\leqslant e^{-(\mathrm{Re}\,p)T}G(|p|),\mathrm{Re}\,p\geqslant c,$$

T 为某实数,$G(|p|)$ 为某正值多项式,则 $F(p)$ 是某右侧广函 f 的拉普拉斯变换式:$F(p)=\tilde{f}(p)$,且 $\mathrm{supp}f$ 在 $t=T$ 右侧,并可用公式(5-1)计算 $f(t)$.

5.2.2 拉普拉斯变换的基本性质

经典函数的拉普拉斯变换基本性质(除微分性质外)和卷积定理都可以直接转移到右侧广函的拉普拉斯变换上来.关于微分性质有

命题1 设$f(t)$在$(-\infty,0)$和$(0,\infty)$有直到m阶的连续导数,$f^{(i)}(t)$在$x=0$有跃度$f^{(i)}(+0)-f^{(i)}(-0)=\sigma_i, i=0,1,\cdots,m-1$,则$m$阶广函导数的拉氏变换式

$$L([f(t)]^m)=p^m\tilde{f}(p)-p^{m-1}f(-0)-p^{m-2}f'(-0)-\cdots-f^{(m-1)}(-0).$$

特别地,当$t<0$时$f(t)=0$,则有

$$L([f(t)]^{(m)})=p^m\tilde{f}(p).$$

证 由1.4.5定理12知

$$[f]^{(m)}=[f^{(m)}]+\sigma_0\delta^{(m-1)}+\sigma_1\delta^{(m-2)}+\cdots+\sigma_{m-1}\delta,$$

等式两端取拉氏变换,利用5.1.2性质2°即可推出命题结论.

5.3 重要变换公式

(1) $L[H(t)]=1/p, \mathrm{Re}\,p>0.$

(2) $L[t_+^\lambda]=\Gamma(\lambda+1)/p^{\lambda+1}, \mathrm{Re}p>0, \lambda\neq-1,-2,\cdots.$

(3) $L[t_+^{-k}]=(-p)^{k-1}[\psi(k)-\ln p]/(k-1)!, \mathrm{Re}\,p>0$,其中$\psi(k)=-r+\sum_{i=1}^{k-1}1/i, r=0.577\,2\cdots, k=2,3,4.$

(4) $L[\ln t_+]=-(r+\ln p)/p, r=0.577\,2\cdots, \mathrm{Re}\,p>0.$

(5) $L[t_+^{-1}]=-(r+\ln p); r=0.577\,2\cdots, \mathrm{Re}\,p>0.$

(6) $L[\delta^{(k)}(t-a)]=p^k e^{-ia}, -\infty<\mathrm{Re}\,p<\infty.$

(7) $L[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kb)]=\dfrac{1}{1-e^{bp}}, \mathrm{Re}\,p>0.$

(8) $L[t^k f(t)]=(-1)^k F^{(k)}(p), \mathrm{Re}\,p>\sigma_f.$

(9) $L[f(t-a)]=e^{-ap}F(p), \mathrm{Re}\,p>\sigma_f.$

(10) 设当$t<0$时$f(t)=0$,则

$$L[f^{(k)}(t)]=p^k F(p), \mathrm{Re}\,p>\sigma_f.$$

(11) $L[e^{-at}f(t)]=F(p+a), \mathrm{Re}\,p>\sigma_f-\mathrm{Re}a.$

参 考 文 献

1 Schwartz L. Méthodes mathématiques de la physique. Paris: Hermann, 1965.

2 Schwartz L. Théorie des distributions. 2nd ed. Paris: Hermann, 1966.

3 盖尔方特,希洛夫著.林坚冰译.广义函数 I.北京:科学出版社,1960.

4 Kanwal R P. Generalized functions, theory and technique. New York: Academic press, 1983.

5 李邦河,李雅卿编著.广义函数及其解析和调和表示.北京:国防工业出版社,1992.

·近代数学卷·

第 10 篇

常微分方程的稳定性理论

编　者　廖晓昕
审校者　何猛省

目　录

引　　言

稳定性概念，早在17世纪就出现了，托里斯利(Torricelli)原理说明物体处于重心位置最低时是稳定的．稳定性概念也先后被拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、麦克斯韦(Maxwell)、汤姆逊和德特(Thomson and Tait)、庞加莱(Poincaré)等用过，但无精确的严格的数学定义．达朗贝尔(D'Alembert)、拉格朗日、麦克斯韦、魏施涅格特斯基(Вышнеградский)、茹可夫斯基(Жуковский)及斯图多(Ctodola)等采用过一项近似方法研究稳定性，但未证明其合理性．

直到1892年俄国数学力学家李雅普诺夫的博士论文《运动稳定性的一般问题》问世，才给了稳定性严格的数学定义及一般理论和方法，奠定了稳定性理论的基础．但相当长的时期内，稳定性理论仅在苏联发展．

美国著名数学家拉萨尔(LaSalle)说过："在某种程度上可以说，李雅普诺夫的直接法在西方重新发现是20世纪50年代中期的事，至少那时在非线性控制系统的设计中已广泛地承认了它的重要性．我对于李雅普诺夫理论的理解和赏识始于1959年．"差不多在同时期，稳定性理论相继在中国、日本、罗马尼亚、南斯拉夫等许多国家蓬勃发展．

近十多年来，人工神经网络的理论和应用的研究，形成了世界性的热潮，其中稳定性扮演着重要角色，专家们利用动力系统的吸引子和电子电路的实现来完成某些智能优化计算、联想记忆、学习算法．对稳定性感兴趣的人已远远不止数学、力学、自动控制界的学者．无线电、计算机、生物、化学工作者，也需要用到稳定性方面的知识．

这里仅仅介绍常微分方程稳定性理论的基本理论、方法及部分应用．现在稳定性理论已推广到用各种非常微分方程描述的动力系统．有兴趣的读者可参考本篇所列的参考文献[6]．

1　稳定性定义与近代工具

1.1　稳定性的定义

分别给定 n 维自治和非自治微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1-1}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}A} = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}). \tag{1-2}$$

这里，$x \in \mathbf{R}^n$，$f: = \mathrm{col}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$，$g: = \mathrm{col}(g_1, g_2, \cdots, g_n)$分别为$\mathbf{R}^n$，$I \times \mathbf{R}^n$上的连续向量函数，$I = [0, +\infty)$，$f(0) = 0$，$g(t, 0) = 0$.

1.1.1　稳定性

定义1　若$\forall \varepsilon > 0$，$\forall t_0 \in I$，$\exists \delta = (t_0, \varepsilon) > 0$，当$\| x_0 \| < \delta(t_0, \varepsilon)$时，对一切$t \geqslant t_0$有$\| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$成立，这里$x(t, t_0, x_0)$表(1-2)式过始值$(t_0, x_0)$的解，则称(1-2)式的零解$x = 0$是**稳定的**.

类似地可给出(1-1)式零解稳定性定义.若(1-2)式、(1-1)式的零解分别不满足稳定性的定义，便称为**不稳定**.

定义2　若定义1中的δ不依赖于t_0，则称(1-2)式的零解$x = 0$是一致稳定的.

对于自治系统(1-1)它的零解稳定与一致稳定等价.

1.1.2　吸引性

定义3　若$\forall t_0 \in I$，$\forall \varepsilon$，$\exists \sigma(t_0) > 0$，$\exists T(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$，使得当$\| x_0 \| < \sigma(t_0)$，$t \geqslant t_0 + T(\varepsilon, t_0, x_0)$时，有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon,$$

则称(1-2)式的零解是吸引的.

类似地可以给出(1-1)式零解吸引的定义.

定义4　若定义3中的σ不依赖于t_0，T仅依赖于ε，不依赖于t_0，x_0，则称(1-2)式的零解是一致吸引的.($\| x_0 \| < \sigma$)，即当$t \to +\infty$时，$x(t, t_0, x_0) \to 0$关于t_0，x_0一致成立.

定义5　若定义3[定义4]中的$\sigma(t_0)$[σ]可以任意大，则称(1-2)式的零解全局吸引[全局一致吸引].

1.1.3　渐近稳定性

定义6　若(1-2)式的零解是稳定的且是吸引[全局吸引]的，则称(1-2)式的零解是渐近稳定[全局渐近稳定]的.

定义7　若它是一致稳定的，且是一致吸引[全局一致吸引]的，则称(1-2)式的零解是**一致渐近稳定**(全局一致渐近稳定)的.

定义8　若$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \lambda > 0$，$\exists \delta(\varepsilon) > 0$，$\forall x_0 \in I$，当$\| x_0 \| < \delta$时，有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-\lambda(t - t_0)},$$

则称(1-2)式的零解是**指数稳定**的.

定义9　若$\forall \delta > 0$，$\exists \lambda > 0$，当$\| x_0 \| < \delta$时，有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant k(\delta) \| x_0 \| \mathrm{e}^{-\lambda(t - t_0)},$$

则称(1-2)式的零解是**全局指数稳定**的.

注1　对于自治系统(1-1)，它的零解的稳定性与一致稳定等价；渐近稳定与一致渐近稳定等价.

1.2 李雅普诺夫函数

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 空间中包含原点的 n 维开子集. $V(x) \in C[\Omega, \mathbf{R}^1]$ 表示定义域为 Ω、值域为 $\mathbf{R}^1 = (-\infty, \infty)$ 的连续函数. $V(t, x) \in C[I \times \Omega, \mathbf{R}^1]$,表定义域为 $I \times \Omega$、值域为 $\mathbf{R}^1$ 的连续函数.

定义 10 若在 Ω 上, $W(x) \geqslant 0[-W(x) \geqslant 0]$,且当且仅当 $x = 0$ 时, $W(x) = 0$. 则称函数 $W(x) \in C[\Omega, \mathbf{R}^1]$ 为正定[负定]函数.

正定、负定函数统称为**定号函数**.

定义 11 若在 Ω 上 $W(x) \geqslant 0[-W(x) \geqslant 0]$,且 $W(x) = 0$ 可能有非零解 $x = x_0 \neq 0$. 则称 $W(x)$ 在 Ω 上是半正定[半负定]的.

半正定(半负定)函数称为常正[常负]函数,统称为常号函数.

例 1
$$W(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$
是正定函数;
$$W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$
是半正定函数.

定义 12 若存在正定函数 $W(x) \in C[\Omega, \mathbf{R}^1]$,使得在 $I \times \Omega$ 上有
$$V(t, x) \geqslant W(x)[V(t, x) \leqslant -W(x)]; 且 V(t, 0) \equiv 0,$$
则称 $V(t, x) \in C[I \times \Omega, \mathbf{R}^1]$ 为正定[负定]函数.

若在 $I \times \Omega$ 上有 $V(t, x) \geqslant 0 \quad [-V(t, x) \geqslant 0]$,则称 $V(t, x)$ 在 $I \times \Omega$ 上为半正定(半负定)函数.

定义 13 若 $V(t, x)$、$W(x)$ 在其定义域内可正可负,则分别称 $V(t, x)$ 在 $I \times \Omega$ 上、$W(x)$ 在 Ω 上为**变号函数**.

例 2
$$W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2,$$
$$V(t, x) = (\sin t)x_1^2 + (\cos t)x_2^2$$
都是变号函数.

定义 14 若 $W(\boldsymbol{x})$ 正定,且 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty \Rightarrow W(\boldsymbol{x}) \to \infty$,则称 $W(\boldsymbol{x}) \in C[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1]$ 为无穷大正定函数.

例 3
$$W(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2\cos(x_1 + x_2)$$
$$\geqslant x_1^2 + x_2^2 \to \infty, 当 x_1^2 + x_2^2 \to \infty 时,$$
故 $W(x_1, x_2)$ 是无穷大正定函数.

定义 15 若存在正定的 $W_1(\boldsymbol{x}) \in [\Omega, \mathbf{R}^1]$,使得
$$|V(t, \boldsymbol{x})| \leqslant W_1(\boldsymbol{x}),$$
则称 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C[I \times \Omega, \mathbf{R}^1]$ 具有无穷小上界.

若存在无穷大正定函数 $W_2(\boldsymbol{x})$,使得:
$$V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant W_2(\boldsymbol{x}),$$
则称 $V(t, x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1]$ 具有无穷大下界.

例 4
$$V(t, \boldsymbol{x}) = (2 + \sin t)x_1^2 + (2 - \cos t)x_2^2.$$

令 $W_1(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2;\ W_2(x) = x_1^2 + x_2^2.$
显然有

$$W_2(x) \leqslant V(t,x) \leqslant W_1(x),$$

故 $V(t,x)$ 是具有无穷大下界,无穷小上界的函数.

正定、负定函数常称为李雅普诺夫函数.

1.3 楔函数(K类函数)

1.3.1 楔函数定义

定义16 若 φ 是连续的、严格单调上升的函数,而且有 $\varphi(0) = 0$,则称函数 $\varphi \in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$ 或 $\varphi \in [[0,r],\mathbf{R}^+]$ 为楔函数,或称为 K 类函数.记为 $\varphi \in K$.若 $\varphi \in C[\mathbf{R},\mathbf{R}^+]$,且 $\varphi \in K$ 和 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r) = \infty$,则称 $\varphi(r)$ 为径向无界的 K 类函数,记为 $\varphi \in K\mathbf{R}$.这里 $\mathbf{R}^+ \xlongequal{\text{def}} [0,+\infty)$.

1.3.2 楔函数与李雅普诺夫函数

关于李雅普诺夫函数与K类函数有如下重要关系.

定理1 任意给定一个在 $\|x\| \leqslant \mathbf{R}$上正定的连续函数 $W(x)$,必存在两个 K 类函数 φ_1、φ_2,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \leqslant W(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|).$$

定理2 若在 $\mathbf{R}^n$ 上任意给定无穷大正定函数 $W(x)$,则必存在两个 KR 类函数 $\varphi_1(\|x\|)$,$\varphi_2(\|x\|)$,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \leqslant W(x) \leqslant \varphi_2(\|x\|).$$

1.4 迪尼导数

1.4.1 迪尼导数

设 $f(t) \in C[I,\mathbf{R}^1]$,$\forall t \in I$,下面四个极限:

$$\mathrm{D}^+ f(t) \xlongequal{\text{def}} \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t));$$

$$\mathrm{D}_+ f(t) \xlongequal{\text{def}} \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t));$$

$$\mathrm{D}^- f(t) \xlongequal{\text{def}} \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t));$$

$$\mathrm{D}_- f(t) \xlongequal{\text{def}} \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$$

分别称为 $f(t)$ 在 t 点处的右上、右下、左上、左下导数，统称为迪尼(Dini)导数.

迪尼导数有可能为 $\pm\infty$，但若不出现这两种情况，迪尼导数总存在. 特别地当 $f(t)$ 满足局部利普希茨(Lipschitz)条件时，四个迪尼导数均有限. 当且仅当 $f(t)$ 的这四个迪尼导数相等时，$f(t)$ 的一般导数存在.

1.4.2　函数的单调性与迪尼导数定号性的关系

连续函数的单调性与它的迪尼导数的定号性有以下重要关系：

定理 3　设 $f(t)\in C[I,\mathbf{R}^1]$，则 $f(t)$ 在 I 上单调不减的充要条件是 $D^+f(t)\geqslant 0(\forall t\in I)$.

1.4.3　沿微分方程组的解求函数的迪尼导数

给定一个 n 维微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\tag{1-3}$$

定理 4　设函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times\Omega,\mathbf{R}^1]$，并关于 $\boldsymbol{x}$ 对 t 一致地满足局部利普希茨条件，即

$$|V(t,\boldsymbol{x})-V(t,\boldsymbol{y})|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

则 $V(t,\boldsymbol{x})$ 沿(1-3)式的解 $\boldsymbol{x}(t)\triangleq\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的右上迪尼导数及右下迪尼导数分别为

$$D^+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(4\text{-}1)}=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))-V(t,\boldsymbol{x})];$$

$$D_+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(4\text{-}1)}=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))-V(t,\boldsymbol{x})].$$

1.5　M 矩　阵

在研究微分方程、计算数学、数理统计时，M 矩阵是一个很有用的近代数学工具. M 矩阵有许多等价条件. 这里列出几个实用而常见的等价条件.

定义 17　一个实矩阵 $A(a_{ij})_{n\times n}$ 如果它满足下列条件：

1° $a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}\leqslant 0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，

2° 下列 n 个行列式：

$$\det\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}&\cdots&a_{ii}\end{vmatrix}>0\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为一个 M 矩阵.

下面是几个实用的分别等价于 M 矩阵的条件.

(1) $a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，

$A^{-1}\geqslant 0$，即 A^{-1} 是一个非负矩阵；

(2) $a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，且存在一组

常数 $c_j > 0, j = 1,2,\cdots,n$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n);$$

(3) $a_{ii} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n), a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$，且存在一组常数 $c_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij} > 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n);$$

(4) $a_{ii} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n), a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$，任给定一组正常数 $\xi = \mathrm{col}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$$

有正根

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} = \mathrm{col}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) > 0;$$

(5) $a_{ii} > 0, a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$，矩阵 $-A$ 是一个赫尔维茨(Hurwitz)矩阵，即 $-A$ 仅有负实部的特征值；

(6) $a_{ii} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n), a_{ij} \leqslant 0 \quad (i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$，矩阵：

$$G \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} 0, & \dfrac{a_{12}}{a_{11}}, & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}}, & 0, & \cdots & \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}, & \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}, & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

的谱半径 $\rho(G) < 1$，即 G 的所有特征值的模小于1.

2 线性系统的稳定性

线性系统成立迭加原理，解集构成线性空间，而且通解可以由标准基本解矩阵表示，故稳定性有许多深刻的结果和特殊的方法．而常系数齐次线性系统的解是由多项式与指数函数之积 $P_r(t)e^{\lambda_r t}$ 的线性组合组成，求解过程可以代数化，故稳定性问题可变为代数方程来解决．

2.1 常系数线性方程组

给定 n 维常系数线性系统：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}. \tag{2-1}$$

2.1.1 稳定性的代数判据

定义 1 若 A 的所有特征值具有负实部，则称 A 为赫尔维兹矩阵，也称 A 稳定；若 A 没有正实部的特征值，但具有零实部的特征值，只对应 A 的简单的初等因子，则称 A 拟稳定。

定理 1 当且仅当 A 稳定时，方程组(2-1)的零解渐近稳定；当且仅当 A 拟稳定时，方程组(2-1)的零解稳定.

(1) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 稳定的充要条件

令

$$f_n(\lambda)\xlongequal{\text{def}}\det(\lambda E-A)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n, \tag{2-2}$$

其中

$$a_1=(-1)\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\quad a_2=(-1)^2\sum_{i<j}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}$$

为所有二阶主子式的和， $a_i=(-1)^i\sum|A_i|$，$\sum|A_i|$ 表 A 的所有 i 阶主子式的和.

$$M_f\xlongequal{\text{def}}\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & \cdots & 0\\ a_3 & a_2 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \\ & & & a_{n-2}\\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & & a_n\end{vmatrix},$$

当 $s<0$ 或 $s>0$ 时，取 $a_s=0$.

定理 2(赫尔维茨判据) 当且仅当 M_f 的各阶主子行列式为正时，A 稳定，即

$$\Delta_1=a_1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots,\Delta_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & \cdots & 0\\ a_3 & a_2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & & & a_{n-2}\\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n\end{vmatrix}=\Delta_{n-1}a_n>0.$$

(2) $A(a_{ij})_{n\times n}$ 稳定的充分条件

令

$$\overline{A}\xlongequal{\text{def}}\begin{bmatrix}-a_{11} & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}|\\ -|a_{21}| & -a_{22} & \cdots & -|a_{2n}|\\ \vdots & & & \vdots\\ -|a_{n1}| & \cdots & & -a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$B \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-|a_{12}|}{a_{11}} & \cdots & \frac{-|a_{1n}|}{a_{11}} \\ \frac{-|a_{21}|}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-|a_{2n}|}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-|a_{n1}|}{a_{nn}} & \frac{-|a_{n2}|}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

定理3 设 $a_{ii} < 0(i = 1,2,\cdots,n)$,则下列四个条件彼此等价,且任何一个成立,均蕴涵 $A(a_{ij})$ 稳定.

1° 存在实数 $\xi_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,使得

$$\xi_j a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \xi_i |a_{ij}| < 0, \quad j = 1,2,\cdots,n;$$

2° $\overline{A}$ 为 M 矩阵;

3° $\overline{A}$ 非奇异,且 $\overline{A}^{-1} \geqslant 0$;

4° B 的谱半径 $\rho(B) < 1$.

定理4 设 $a_{ii} < 0(i = 1,2,\cdots,n)$,则下列六个条件之一均蕴涵 $\bar{A}$ 为 M 矩阵,从而 A 稳定.

1° $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1$;

2° $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$;

3° $\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} \right)^2 < 1$;

4° $\sum\limits_{i=1}^{j-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \mu_i + \sum\limits_{i=j+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \xlongequal{\text{def}} \mu_j < 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$;

5° $v^{(j)} \xlongequal{\text{def}} \sum\limits_{i=1}^{j-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| v^{(i)} + \max\limits_{j+1\leqslant i\leqslant n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \quad (j = 1,2,\cdots,n)$,

且

$$\sum_{j=1}^{n} v^{(j)} \xlongequal{\text{def}} v < 1;$$

6° $\sigma_j^2 \xlongequal{\text{def}} j\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|^2 \sigma_i^2 + \sum\limits_{i=j+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|^2 \right) \quad (j = 1,2,\cdots,n)$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \xlongequal{\text{def}} \sigma^2 < 1.$$

例1 讨论矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-8 & 6 & -5 & 5\\ 1 & -6 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix}$$

的稳定性.

解 A 的主对角线上元素全为负,且

$$\mu_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}<1, \mu_2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{5}{8}\times 1+\frac{1}{6}=\frac{19}{24}<1,$$

$$\mu_3 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{5}{8}\times\frac{5}{4}=\frac{25}{32}<1, \mu_4 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{10}\times\frac{19}{24}=\frac{94}{240}<1,$$

故 A 满足定理 4 的条件 4°,从而 A 稳定.

2.1.2 稳定性的几何判据

仍考虑(2-2)式,米哈依诺夫(Михойлов)根据复变函数中的幅角原理,给出了 $f_n(\lambda)$ 稳定的几何判据.

定理 5 设 $f_n(\lambda)=0$ 无纯虚根,则 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 稳定的充要条件是 ω 从 0 变到 $+\infty$, $f(\mathrm{i}\omega)$ 依反时针方向旋转角增加 $\Phi=\frac{\pi}{2}n$.

这个定理几何直观性强,但证法较繁,要求 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化,计算绘图都很难,没有充分利用实系数多项式零点的共轭性及其根的有界性等信息.为此,下面改进和简化的几何判据,颇为实用.

先在复平面上作以 $O(0,0)$ 为圆心,$\rho=1+\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}|a|$ 为半径的圆 S,由根的界限定理,知 $f_n(\lambda)=0$ 的根全在圆 S 中.考虑$\frac{1}{4}$ 的圆 OAB,以 $\Phi \stackrel{\text{def}}{=\!=} \underset{ABO}{\triangle}\operatorname{Arg} f_n(\lambda)$ 表示 $f_n(\lambda)$ 当 λ 沿弧$\overset{\frown}{AB}$ 和虚轴线段$\overrightarrow{BO}$ 从 A 到 O 幅角的增量,则有

定理 6 设 $f_n(\lambda)$ 在 OB 上无零点,且

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=\!=} \underset{ABO}{\triangle}\operatorname{Arg} f_n(\lambda)=k\pi,$$

则当且仅当 $k=0$ 时,$f_n(\lambda)$ 仅有负实部零点,即 A 稳定;当且仅当 $\alpha<k\leqslant n$ 时,$f_n(\lambda)$ 有 k 个正实部零点.

2.2 周期系数线性系统

考虑周期系数 n 维线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \tag{2-3}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 在 I 上连续,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}(t+\omega)=\boldsymbol{A}(t)$.

佛罗克 - 李雅普诺夫理论指出(2-3)式的标准基本解矩阵(又称为柯西矩阵)可表为

$$X(t) = F(t)e^{Kt}, \tag{2-4}$$

其中 $F(t)$ 是周期为 ω 的非奇、连续矩阵，且具有一个可积、逐段连续的导数，而其中

$$K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega).$$

定理 7 当且仅当 K 稳定时，(2-3) 式零解指数稳定；当且仅当 K 拟稳定时，(2-3) 式的零解稳定；当且仅当 $\rho(X(\omega)) < 1$ 时，K 稳定；当且仅当 $\rho(X(\omega)) \leqslant 1$，且 $\rho(X(\omega)) = 1$，只对应 $X(\omega)$ 的简单初等因子时，K 拟稳定；这里 ρ 为 $X(\omega)$ 的谱半径.

一般求出(2-4) 式 $X(t) = F(t)e^{Kt}$ 是很困难的，但对于一些特殊的周期系统，可较方便地求出 $X(t)$ 来.

定理 8 若(2-3) 式满足下列两个条件：

1° $A(t)\int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1 = \int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1 A(t)$;

2° $B(\omega) - B(0) = \int_0^{\omega} A(t)dt$ 稳定，

则(2-3) 式的零解指数稳定.

例 2 判定下列周期系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (a + \cos bt)x_1 - \dfrac{1}{2}x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{2}x_1 + (a + \cos bt)x_2 \end{cases}$$

的稳定性.

解 显然

$$A(t)\left(\int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1\right) = \left(\int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1\right)A(t),$$

$$B\left(\frac{2\pi}{|b|}\right) - B(0) = \begin{bmatrix} a\dfrac{2\pi}{|b|} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{|b|} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{|b|} & a\dfrac{2\pi}{|b|} \end{bmatrix},$$

当且仅当 $a < -\frac{1}{2}$ 时，$B\left(\frac{2\pi}{|b|}\right) - B(0)$ 稳定；当且仅当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，$B\left(\frac{2\pi}{|b|}\right) - B(0)$ 拟稳定.

故当且仅当 $a < -\frac{1}{2}$ 时，此周期系统是指数稳定的；当且仅当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，此周期系统是稳定的.

2.3 一般变系数线性系统

2.3.1 齐次与非齐次方程组稳定性的关系

考虑 n 维变系数齐次线性方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{2-5}$$

和非齐次线性方程组：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t). \tag{2-6}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n} \in C[I,\mathbf{R}^{n^2}]$,

$\boldsymbol{f}(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)) \in C[I,\mathbf{R}^n]$.

若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是(2-5)式的解，则线性组合 $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ 也是(2-5)式的解. 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是(2-6)式的解，则 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ 便是(2-5)式的解.

(2-5)式的几个线性无关的解构成(2-5)式的解空间的基底，设 $\boldsymbol{X}(t) = (x_{ij}(t))_{n\times n}$ 是(2-5)式的基本解矩阵，则

$$\boldsymbol{K}(t,t_0) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0) \tag{2-7}$$

便是(2-5)式的标准基本解矩阵，也称为柯西矩阵，(2-5)式的通解可表为

$$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{K}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0. \tag{2-8}$$

由拉格朗日常数变易法公式可知，(2-6)式的通解可表为

$$\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{K}(t,t_0)\boldsymbol{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{K}(t,t_1)\boldsymbol{f}(t_1)\mathrm{d}t_1 .$$

定义 2　若方程组(2-6)的所有解具有某种稳定性，便称方程组(2-6)具有该种稳定性.

定理 9　当且仅当(2-5)式的零解具有相同的稳定性时，$\forall \boldsymbol{f}(x) \in C[I,\mathbf{R}^n]$ 方程组(2-6)具有某种稳定性.

推论 1　当且仅当方程组(2-6)的某一个解 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 具有同一种稳定性时，方程组(2-6)具有某种稳定性.

推论 2　当且仅当方程组(2-5)具有同一稳定性，当且仅当(2-5)式的零解具有同一种稳定性时，方程组(2-6)具有某种稳定性.

2.3.2　齐次线性方程组稳定性的判据

定理 10　齐次线性方程组(2-5)零解稳定(一致稳定)的充要条件是它的柯西(Chuchy)矩阵 $\boldsymbol{K}(t,t_0)(t \geqslant t_0)$ 有界(一致有界).

推论 3　若方程组(2-6)稳定，则它的所有解或者同时有界，或者同时无界.

定理 11　方程组(2-5)零解渐近稳定等价于零解吸引.

推论 4　方程组(2-5)零解一致渐近稳定等价于零解一致吸引，且 $\boldsymbol{K}(t,t_0)$ 一致有界.

推论 5　方程组(2-5)零解渐近稳定(一致渐近稳定)等价于全局渐近稳定(全局一致渐近稳定).

定理 12　方程组(2-5)平凡解渐近稳定(一致渐近稳定)等价于(2-5)式的柯西矩阵 $\boldsymbol{K}(t,t_0) \to 0$(当 $t \to +\infty$ 时)($\boldsymbol{K}(t,t_0) \xrightarrow{\text{关于 } t_0} 0$ 当 $t \to +\infty$ 时，且 $\boldsymbol{K}(t,t_0)$ 一致有界，$t \geqslant t_0$).

定理 13　方程组(2-5)一致渐近稳定等价于指数稳定.

2.4　线性系统扰动理论

考虑线性系统:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{2-9}$$

和它的扰动系统:

$$\frac{dx}{dt}=(A(t)+B(t))x, \tag{2-10}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$, $A(t)$ 和 $B(t)$ 均为 $n\times n$ 连续函数矩阵. 如果(2-9)式和(2-10)式的稳定性等价,就可以用较简单的(2-9)式来代替较复杂的(2-10)式. 因此等价性问题在理论和应用上都有意义.

定理 14　若 $\int_0^{+\infty}\|B(t)\|dt<\infty$,则(2-9)式与(2-10)式一致稳定性等价.

定理 15　若存在正常数 $M>0$,使得

$$\int_{t_0}^{t}\|B(t_1)\|dt_1\leqslant r(t-t_0)+M,$$

其中 $0<r<1$,即 r 足够小,则(2-9)式与(2-10)式的零解指数稳定性等价.

推论 6　若 $\lim\limits_{t\to+\infty}B(t)=0$,则定理 15 的条件成立.

对于非线性方程组,一个经常使用的方法就是局部线性化,也就是所谓一次近似理论. 下面的定理将提供这种方法合理性的理论根据.

考虑非线性系统:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t,x), \tag{2-11}$$

其中

$$f(t,x)\in C[I\times R^n,R^n],f(t,0)\equiv 0.$$

定理 16　若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\sigma(\varepsilon)>0$,当 $x\in D\overset{\text{def}}{=\!=}[x\mid\|x\|<\sigma]$, $t\in I$ 时,有 $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$,则(2-9)式的零解指数稳定蕴涵(2-11)式的零解指数稳定.

推论 7　若 $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}\xrightarrow{\text{关于 } t_0 \text{ 一致}}0$(当 $\|x\|\to\infty$ 时),且 $f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$,则定理 16 的条件必满足.

例 3　证明

$$\frac{dx}{dt}=(Ae^t+P_n(t)B)x \tag{2-12}$$

与

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{2-13}$$

的零解指数稳定等价,其中 $P_n(t)$ 为 t 的 n 次多项式.

证　对(2-12)式作自变量变换 $\tau = e^t$,则有

$$\frac{dx}{dt} = (A + f(\tau)B)x, \tag{2-14}$$

其中

$$f(\tau) = \frac{P_n(t)}{e^t} = \frac{P_n(\ln\tau)}{\tau}.$$

因为 $\tau \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$,故(2-12)式与(2-14)式的稳定性等价.将(2-14)式的 τ 再记为 t,便为

$$\frac{dx}{dt} = (A + f(t)B)x,$$

而当 $t \to \infty$ 时,$f(t)B \to 0$,故推论1的条件成立.从而结论真.

2.5　线性方程组谱的估计

设　$x^{(k)}(t)$ 为(2-5)式的任意解,则

$$\alpha \xlongequal{\text{def}} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\| x^{(k)}(t) \|$$

称为解 $x^{(k)}(t)$ 的特征指数,除 $\pm\infty$ 外,一切特征指数的全体称为(2-5)式的谱.

若 $\| A(t) \| \leqslant C < \infty$,则(2-5)式的每个实的或复的非零解具有有限的特征指数.

1. 瓦杜夫斯基(Важевский)谱估计式

设 $x(t)$ 为(2-5)式的任意非零解,则有估计式:

$$\| x(t_0) \|_E e^{\int_{t_0}^t \lambda(t_1)dt_1} \leqslant \| x(t) \|_E \leqslant \| x(t_0) \|_E e^{\int_{t_0}^t \Lambda(t_1)dt_1}, \tag{2-15}$$

这里 $\lambda(t)$ $\Lambda(t)$ 分别为:$A^H \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{2}[A(t) + A^T(t)]$ 的最小和最大特征值.于是(2-5)式的谱分布的范围为$[l, L]$,其中

$$l = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(t_1)dt_1;$$

$$L = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \Lambda(t_1)dt_1.$$

由此可得到稳定性判据:

1° 若 $L < 0$,则(2-5)式是指数稳定的;

2° 若 $l > 0$,则(2-5)式是不稳定的.

2. 改进的瓦杜夫斯基谱估计式

若(i) $\| L(t) \| < \infty$, $\| L^{-1}(t) \| < \infty$;(ii) $|\det L(t)| > m > 0$,则称矩阵 $L(t) = (L_{ij}(t))_{n\times n} \in C[I, \mathbf{R}^{n^2}]$ 为李雅普诺夫矩阵.变换 $y = L(t)x$ 称为李雅普诺夫变换.

定理 17　对(2-5)式作适当的李雅普诺夫变换:

$$y = \mathrm{diag}(l_{11}(t), \cdots, l_{nn}(t))x \xlongequal{\text{def}} L(t)x, \tag{2-16}$$

则(2-5)式的任何解 $x(t)$ 有估计式

$$\| L(t) \|^{-1} \| L(t_0)x(t_0) \| e^{\int_{t_0}^{t} \tilde{\lambda}(t_1)dt_1}$$

$$\leqslant \| x(t) \| \leqslant L^{-1}(t) \| L(t_0)x(t_0) \| e^{\int_{t_0}^{t} \tilde{\Lambda}(t_1)dt_1},$$

这里 $\|\cdot\|$ 表欧氏范数，$\tilde{\lambda}(t)$ $\tilde{\Lambda}(t)$ 分别为

$$\tilde{A}^{H} = \frac{1}{2}[\hat{A}(t) + \hat{A}^{T}(t)]$$

的最小最大特征值，而

$$\tilde{A} \xlongequal{\text{def}} (L(t)A(t)L^{-1}(t) - L(t)\dot{L}^{-1}(t)). \tag{2-17}$$

从而(2-5)式的谱分布范围为$[\hat{l},\hat{L}]$，其中

$$\hat{l} = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \tilde{\lambda}(t)dt_1, \quad \hat{L} = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\int_0^t \hat{\Lambda}(t_1)dt_1.$$

推论 8 若 $L(t) \xlongequal{\text{def}} L$ 为常数矩阵，则(2-17)式中的 $\tilde{A} = (LA(t)L^{-1})$；若 $L(t) = E$(单位阵)，则 $l = \tilde{l}, L = \tilde{L}$，这便是瓦杜夫斯基对谱的上、下界估计.

例 4 考虑方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = -(1+\dfrac{1}{t})x_1 + 81(1+\sin t)x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -(1+\sin t)x_1 - (1+\dfrac{1}{t})x_2\end{cases} \tag{2-18}$$

解的稳定性.

按瓦杜夫斯基方法，有

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1-\dfrac{1}{t} & 81(1+\sin t) \\ -(1+\sin t) & -1-\dfrac{1}{t}\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}[A(t) + A^{T}(t)] = \begin{bmatrix} -1-\dfrac{1}{t} & 40(1+\sin t) \\ 40(1+\sin t) & -1-\dfrac{1}{t}\end{bmatrix},$$

$$\lambda(t) = -40 - \frac{1}{t} - 40\sin t, \quad \Lambda(t) = 39 - \frac{1}{t} + 40\sin t,$$

$$l = -40, L = 39.$$

这个方法只能断言谱在[-40,39]之间，对稳定性不能下任何断言.

但按推论 2，取 $L = \text{diay}(1,9), L^{-1} = \text{diay}(1,\frac{1}{9})$.

从而

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1-\dfrac{1}{t}&81(1+\sin t)\\-(1+\sin t)&-1-\dfrac{1}{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\dfrac{1}{9}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-\dfrac{1}{t}&9(1+\sin t)\\-9(1+\sin t)&-1-\dfrac{1}{t}\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}[\widetilde{A}+\widetilde{A}^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}-1-\dfrac{1}{t}&0\\0&-1-\dfrac{1}{t}\end{bmatrix},$$

于是有

$$\widetilde{\lambda}(t)=-1-\frac{1}{t},\ \widetilde{\Lambda}(t)=-1-\frac{1}{t},\ \widetilde{l}=\widehat{L}=-1,$$

故(2-18)式是指数稳定的.

2.6　标准基本解矩阵的表示及稳定性

前面已述,对于方程组(2-5),它的标准基本解矩阵 $K(t,t_0)$ 反映了所有解的全貌.可是只有 $A(t)$ 为常数矩阵、对角矩阵、三角矩阵易于写出 $K(t,t_0)$ 来,对于一般的 $A(t)$,$K(t,t_0)$ 不能表示为有限积分形式.下面介绍对于满足某些条件的 $A(t)$ 能将 $K(t,t_0)$ 的表达式写出来.

定理 18 (拉甫－答尼列夫斯基(Лаппо-Даницлевский)定理)　若成立下列条件:

1° $A(t)\in C[I,\mathbf{R}^{n^2}]$;

2° $A(t)\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1=\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1A(t)$;

3° $\bar{A}\xlongequal{\text{def}}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1$ 存在,且 $\bar{A}$ 稳定,

则(2-5)式的**标准基本解矩阵**为

$$K(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1},$$

且方程组(2-5)渐近稳定.

定理 19　若下列条件成立:

1° $A(t)\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1-\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1A(t)\xlongequal{\text{def}}K(t)\neq0$,但

$$K(t)\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1-\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1K(t)=0;$$

2° $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}A(t_1)\mathrm{d}t_1=A$ 存在,且 A 稳定;

3° 当 $t\to+\infty$ 时，$K(t)\to 0$，
则方程组(2-5)渐近稳定.

定理 20 若(2-5)式满足

1° $A(t)\in C'[I,\mathbf{R}^{n^2}]$，且存在实常矩阵 A_1，使

$$A_1A(t)-A(t)A_1=\dot{A}(t);$$

2° 令 $A_2\xlongequal{\text{def}} e^{-A_1t_0}[A(t_0)-A_1]e^{A_1t_0}$，

$$\alpha\xlongequal{\text{def}}\max_j\mathrm{Re}\lambda_j(A_1),\beta\xlongequal{\text{def}}\max_j\mathrm{Re}\lambda_j(A_2),$$

且

$$\alpha+\beta<0,$$

则(2-5)式的标准基本解矩阵可表为

$$K(t,t_0)=e^{A_1t}e^{A_2(t-t_0)}e^{-A_1t_0};$$

方程组(2-5)渐近稳定.

例 5 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-e^{2t}y,\\ \dfrac{dy}{dt}=e^{-2t}x-4y\end{cases}\tag{2-19}$$

的稳定性.

这里

$$A(t)=\begin{bmatrix}-1 & -e^{2t}\\ e^{-2t} & -4\end{bmatrix}.$$

取 $A_1=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$，有

$$A_1A(t)-A(t)A_1=\dot{A}(t).$$

取 $t_0=0$，有 $A_2=\begin{bmatrix}-4&-1\\1&-5\end{bmatrix}$. 由于

$$\alpha=\max\mathrm{Re}\lambda_j(A_1)=3,$$

$$\beta=\max\mathrm{Re}\lambda_j(A_2)=-\frac{9}{2},\quad \alpha+\beta<0.$$

则由定理17知(2-19)式渐近稳定.

2.7 冻结系数法

1. 经典冻结系数法

对于(2-5)式，如果再加上系数是缓变的限制，便有如下经典的**冻结系数法**.

定理 21 若对于(2-5)式成立下列条件：

1° $\forall t_1,t_2\in I,\exists c=\text{const}>0$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(t_1)-a_{ij}(t_2)|\leqslant c;$$

2° $\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A}(t))<-r<0$;

3° $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t_0)\boldsymbol{x}$ 的标准基本解矩阵 $\boldsymbol{R}(t,t_0)=(K_{ij}(t,t_0))_{n\times n}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n}|K_{ij}(t)|\leqslant b\mathrm{e}^{-\frac{r}{2}(t-t_0)},$$

且　$bc<\dfrac{r}{4}$,则(2-5) 式的任意解满足

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant b\|\boldsymbol{x}_0\|\mathrm{e}^{-\frac{r}{4}(t-t_0)}.$$

从而(2-5) 式指数稳定.

2. 改进的冻结系数法

改进的冻结系数法从以下四个方面改进了经典的冻结系数法.

(1) 只需冻结的系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t_0^*)$ 稳定,放弃了 $\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A}(t))<-r<0$ 对一切 t 成立的苛刻要求;

(2) 利用了积分的平均性质,放宽了经典冻结法对缓变的要求;

(3) 利用孤立子系统冻结后的系数矩阵不同的稳定度来控制强弱不同的耦合,精估解的渐近性质;

(4) 改计算高维的冻结系统的标准基本解矩阵为降维系统的标准基本解矩阵,增加了计算可行性.

将(2-5) 式改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=&\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}(t_0),\boldsymbol{A}_{22}(t_0),\cdots,\boldsymbol{A}_{rr}(t_0))\boldsymbol{x}+\\&\ \mathrm{diag}(((\boldsymbol{A}_{11}(t)-\boldsymbol{A}_{11}(t_0)),\cdots,(\boldsymbol{A}_{rr}(t)-\boldsymbol{A}_{rr}(t_0)))\boldsymbol{x}+\\&\ (\underset{i\neq j}{\boldsymbol{A}_{ij}}(t))\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{A}_{ij}(t)$ 为 $n_i\times n_j$ 矩阵,$\boldsymbol{A}_{ii}(t_0)$ 为 $\boldsymbol{A}_{ii}(t)(i=1,2,\cdots,r)$ 在 $t=t_0$ 处的冻结矩阵,

$$\sum_{i=1}^{r}n_i=n(i=1,2,\cdots,r),$$

$$\boldsymbol{x}_i=\mathrm{col}(x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}),\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{bmatrix}.$$

考虑冻结的孤立子系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}(t_0),\cdots,\boldsymbol{A}_{rr}(t_0))\boldsymbol{x}.\tag{2-21}$$

定理 22　若

1° (2-21) 式的标准基本解矩阵

$$\boldsymbol{P}(t,t_0)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}_{11}(t,t_0),\cdots,\boldsymbol{P}_{rr}(t,t_0))$$

$$= \operatorname{diag}(e^{A_{11}(t-t_0)}, \cdots, e^{A_{rr}(t-t_0)})$$

有估计式：$\| P_{ii}(t,t_0) \| \leqslant M_i e^{-\alpha_i(t-t_0)}$，其中 M_i, α_i 为正常数；

2° $\qquad \| A_{ii}(t) - A_{ii}(t_0) \| \leqslant L_{ii}(t), \| A_{ij}(t) \| \leqslant L_{ij}(t)$,

其中 $\quad L_{ij}(t) \in C[I, \mathbf{R}^1]$ 为已知函数；

3° 存在常数 $\varepsilon > 0, 0 < \varepsilon < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \alpha_i$，使得

$$b_{ij}(t) \xlongequal{\text{def}} \int_{t_0}^{t} M_i e^{-(\alpha_i - \varepsilon)(t-t_1)} L_{ij}(t_1) dt_1 \leqslant \widehat{b}_{ij} = \text{const}, \tag{2-22}$$

且矩阵 $\widetilde{B}(\widetilde{b}_{ij})_{r \times r}$ 的谱半径 $\rho(\widetilde{B}) < 1$（特别地 $\| \widetilde{B} \| < 1$），则(2-20)式指数稳定.

3　李雅普诺夫直接法的基本理论

对非线性方程组，线性系统许多好的性质它不具有，到目前为止，研究非线性系统稳定性的最一般方法仍是俄国数学力学家李雅普诺夫首创的所谓直接法，也称为 V 函数法. 本章叙述这种方法的基本内容.

3.1　V 函数法的几何思想

以二维自治系统为例，说明如何借助一个 V 函数来探测轨线的走向的几何思想.

考虑二维自治非线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0, \tag{3-1}$$

其中 f_1, f_2 连续，保证解的唯一性.

设 $V(x)$ 是正定的 K 类函数，且 $V(x) \in C^1$，虽然(3-1)式的解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 无法具体表示出来，但它的导数满足关系：$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$. 姑且把任意解 $x(t)$ 代入 $V(x)$，得到

$$V(t) \xlongequal{\text{def}} V(x(t)).$$

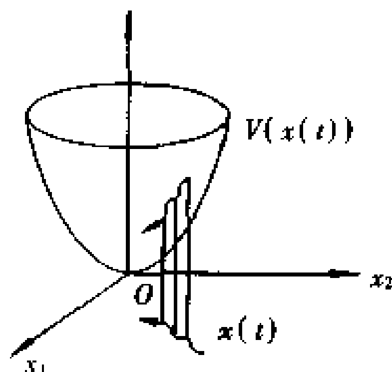


图 3-1

零解的稳定性（包括渐近稳定、稳定、不稳定）是由 $x(t)$"走近"原点、"不远离"原点、"远离"原点来决定的，而这些信息分别等价于 $V(x(t))$ 是 t 的下降、不增、上升函数(图3-1). 由于 $V \in C^1$，后者又分别等价于

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}<0,\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant 0,\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}>0,$$

而

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\mathbf{grad}V\cdot f\begin{cases}<0, & \text{当}\ \theta>\dfrac{\pi}{2}\ \text{时};\\ =0, & \text{当}\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\ \text{时};\\ >0, & \text{当}\ \theta<\dfrac{\pi}{2}\ \text{时},\end{cases}\tag{3-2}$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{grad}V$ 与 f 的夹角.这样最后的表达式已不依赖于方程组的解 $x(t)$ 的信息,仅依赖于 V 和已知向量场 f,这就是直法法的几何思想.

3.2　稳定与一致稳定性判据

考虑一般的 n 维非自治非线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\tag{3-3}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}=\mathrm{col}(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$, $\boldsymbol{f}$ 连续,并保证(3-3)式解的唯一性,且 $f(t,0)\equiv 0$.

3.2.1　稳定性判据

定理 1　(3-3)式的零解稳定的充要条件是在某区域 $G_H\xlongequal{\text{def}}\{(t,\boldsymbol{x}):t\geqslant t_0,\ \|\boldsymbol{x}\|<H\}$ 上存在正定函数 $V(t,x)$,使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0.\tag{3-4}$$

例 1　研究系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)y-q(t)x(x^2+y^2);\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-p(t)x-q(t)y(x^2+y^2)\end{cases}\tag{3-5}$$

零解的稳定性,此处 $p(t)$ 和 $q(t)$ 是对所有的 $t\geqslant t_0$ 都有定义的连续单值函数,且 $q(t)\geqslant 0$.

取　$V=x^2+y^2$,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}5)}=-2q(t)(x^2+y^2)^2\leqslant 0.$$

由定理 1 知系统(3-5)式的零解稳定.

定理 2(马尔金(Малкин)定理)　若存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x)$ 和负定函数 $V_1(t,x)$,使在任何固定域 $0<\lambda\leqslant\|x\|\leqslant\mu\leqslant H$ 中,有

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}-V_1\right)=0,$$

则(3-3)式的零解稳定.

定理3(马尔金定理的改进形式)　若存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x)$ 和负定函数 $V_1(t,x)$,使在任何固定域 $0<\lambda\leqslant\|x\|\leqslant\mu\leqslant H$ 中,$\forall\delta>0$, $\exists t^*(\delta)$,当 $t\geqslant t^*$ 时,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3-3)}<V_1(t,x)+\delta,$$

则(3-3)式的零解稳定.

注1　因为　$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-V_1=0\Leftrightarrow\forall\delta>0,\exists t^*(\delta)$,

当　$t\geqslant t^*$ 时,$V_1(t,x)-\delta<\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<V_1(t,x)+\delta$.显然,不等式左边的限制是多余的,故定理3是定理2的改进形式.

例2　考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{1}{1+t}+\sin t-|\sin t|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(t,x)x_j\right)-x_i^3$$
$$(i=1,2,\cdots,n),\tag{3-6}$$

其中 $P_{ij}(t,x)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 t,x 的连续有界函数,且广义二次型

$$x^{\mathrm{T}}Px=\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}(t,x)x_ix_j$$

是半正定的,则(3-6)式的零解稳定.

事实上　令 $V=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$,则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3-6)}&=\sum_{i=1}^{n}x_i\dot{x}_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{1+t}+\sin t-|\sin t|\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}(P_{ij}(t,x)x_j-x_j^4\right]\\&=\left(\frac{1}{1+t}+\sin t-|\sin t|\right)x^{\mathrm{T}}Px-\sum_{i=1}^{n}x_i^4.\end{aligned}$$

令　$V_1=-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4$,则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=V_1+\left(\frac{1}{1+t}+\sin t-|\sin t|\right)x^{\mathrm{T}}Px.$$

容易证明定理3的条件成立,从而(3-6)式的零解稳定.

下面考虑 n 维自治系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x),\tag{3-7}$$

这里 $x\in\mathbf{R}^n$,$f(x)\in C[\Omega=(x,\|x\|\leqslant H),\mathbf{R}^n]$,保证(3-7)式解的唯一性,且 $f(0)=0$.

定理4　若在 Ω 上存在正定的 $V(x)\in C[\Omega,\mathbf{R}^1]$ 及正数序列 $\{r_k\}$,其中 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k$

$=0$，且在 Ω 内存在区域

$$D_k = \{x \mid r_k \geqslant V(x) \geqslant r_k - \eta_k > 0, \eta_k > 0\}, k = 1,2,\cdots,$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}7)} \leqslant 0, x \in D_k, k = 1,2,\cdots,$$

则(3-7) 式的零解稳定.

这个定理允许$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$变号.

例 3　考虑下列系统的零解的稳定性：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -y + x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \text{ 时};\\ -y & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \text{ 时}; \end{cases} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} x + y(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \text{ 时};\\ x & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases} \tag{3-8}$$

令 $V = x^2 + y^2$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}8)} = 2(x^2+y^2)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \text{ 时},$$

取

$$r_k = \frac{1}{2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}} > 0,$$

$$\eta_k = \frac{\dfrac{\pi}{4}}{\left(2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right)\left(2k\pi + \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)} > 0 \quad (k = 1,2,\cdots,),$$

则有

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0, \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}8)} < 0,$$

当 $r_k - \eta_k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r_k$ 时，
故定理 4 条件满足，从而(3-8) 式的零解稳定.

3.2.2　一致稳定性判据

定理 5　(3-3) 式的零解一致稳定的充要条件是，在某一域 $G_H = \{(t,x) \mid t \geqslant t_0, \|x\| < H\}$ 上存在正定有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得成立下列不等式：

$$\mathrm{D}^+ V|_{(3\text{-}3)} \leqslant 0.$$

定理 6　若存在函数 $V(t,x)$，$\theta(t)$，$W(x)$，使 $V(t,x) - \theta(t)W(x) \xlongequal{\text{def}} V(t,x)$，并有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)} \leqslant 0,$$

其中 $W(x)$ 是正定可微函数，$\theta(t)$ 为 t 的单调增函数，且 $\theta(t_0)=1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t)=+\infty$，则(3-3) 式的零解一致稳定，且吸引.

例 4　$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t} \tag{3-9}$$

作　$$V=(1+t)x^2,\theta(t)=t,W(x)=x^2.$$

则　$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-x^2\leqslant 0,U(x)=V(t,x)-\theta(t)W(x)=1,$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.$$

故定理 6 条件满足，从而(3-9) 式的零解一致稳定，且吸引.

3.3　渐近稳定与一致渐近稳定性

由于一致稳定蕴涵着稳定，故定理 6 也是一个渐近稳定的判据. 下面再叙述一致渐近稳定性定理.

定理 7　(3-3) 式零解一致渐近稳定的充要条件是在某域 $G_H=\{(t,x),t\geqslant t_0,\|x\|<H\}$ 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x)$，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x)$$

是负定的.

注 2　定理 7 中对于 $V(t,x)$ 具有无穷小上界的假设是重要的. 马塞尔(Massera)(1949) 曾举例说明，如果没有无穷小上界的假设，甚至连渐近稳定都不能保证.

注 3　李雅普诺夫原来的渐近稳定定理即为定理 3.7 的条件满足，则(3-3) 式的零解为渐近稳定. 然而例如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t}$$

的零解是渐近稳定的，但不具有正定的有无穷小上界的 $V(t,x)$，使得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定，可见李雅普诺夫渐近稳定性定理是不可逆的.

定理 8　若存在 $V(t,x)\in C[G_H,\mathbf{R}]$，使得

1° $V(t,x)-\theta(t,x)\omega(x)$ 常正，其中 $W(x)$ 在 G_H 上正定，$\theta(t,x)\in C[G_H\mathbf{R}^1]$ 为连续非负，且在 $\|x\|<H$ 中，$\theta(t,x)\xrightarrow[\text{关于 }x]{}+\infty\quad(t\to\infty)$；

2° $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant 0,$

则(3-3) 式零解渐近稳定.

例 5　讨论方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+\sin x} \tag{3-10}$$

零解的渐近稳定性.

解　取 $V=(t+\sin x)x^2, \theta(t,x)=t+\sin x, W(x)=x^2$,则

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3\text{-}10)} &= 2(t+\sin x)x\left(\frac{-x}{t+\sin x}\right)+x^2\left(1+\cos x-\frac{-x}{t+\sin x}\right)\\ &= -2x^2+x^2\left(1-\frac{x\cos x}{t+\sin x}\right)\\ &= -x^2\left(1+\frac{x\cos x}{t+\sin x}\right)\leqslant 0 \qquad (\|x\|\ll 1),\end{aligned}$$

故当 $\|x\|\leqslant H\ll 1, t\geqslant t_0\gg 1$ 时,满足定理 8 的条件,从而(3-10)式零解渐近稳定.

定理 9　设(3-3)式右端 $f(t,x)$ 在 $t\geqslant 0, \|x\|\leqslant H$ 上有界,且存在正定函数 $V(t,x)$,使得 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3\text{-}3)}$ 负定,则(3-3)式零解渐近稳定.

定理 10　若在 $t\geqslant t_0, \|x\|\leqslant H$ 上,

1° 存在正定函数 $W(x)$,使得

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{(3\text{-}3)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}f_i(t,x) = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\cdot f(t,x)\right)$$

有上界或有下界;

2° 存在正定函数 $V(t,x)$,使得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3\text{-}3)} = \frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial x_i}f_i(t,x)$$

是负定的,

则(3-3)式零解渐近稳定.

定理 10 包含了定理 9 作为特例.

例 6　考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{-x_1}{1+t}+t^2x_2^{2k-1}-tx_1^{2r-1}+\dfrac{1}{t}x_1x_2^{2k};\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{-x_2}{1+t}-t^2x_1^{2k-1}-tx_2^{2r-1}+\dfrac{1}{t}x_1^{2k}x_2\end{cases} \tag{3-11}$$

零解的渐近稳定性,其中 $0<\tau\leqslant t<+\infty$,$\tau$ 为常数,r,k 为自然数.

解　作李雅普诺夫函数:

$$V(t,x)=(1+t)(x_1^{2k}+x_2^{2k})\geqslant x_1^{2k}+x_2^{2k},$$

则 V 正定,但不具有无穷小上界.事实上

$\alpha^2=\frac{\tau}{2(1+\tau)}$,当 $x_1^{2k}+x_2^{2k}\leqslant\alpha^2$ 时,由

$$\begin{aligned}4k\left(1+\frac{1}{\tau}\right)x_1^{2k}x_2^{2k} &= -2\left(1+\frac{1}{\tau}\right)(x_1^{2k}-x_2^{2k})^2+2k\left(1+\frac{1}{\tau}\right)(x_1^{4k}+x_2^{4k})\\ &\leqslant -2k\left(1+\frac{1}{\tau}\right)(x_1^{2k}-x_2^{2k})+k(x_1^{2k}+x_2^{2k}),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}11)} &= (x_1^{2k}+x_2^{2k})+2k(1+t)(x_1^{2k-1}\dot{x}_1+x_2^{2k-1}\dot{x}_2)\\ &= (x_1^{2k}+x_2^{2k})+2k(1+t)\Big[-\frac{x_1^{2k}+x_2^{2k}}{1+t}-t(x_1^{2(k+r-1)}+\\ &\quad x_2^{2(k+r-1)})+\frac{2}{t}x_1^{2k}x_2^{2k}\Big]\\ &\leqslant (1-2k)(x_1^{2k}+x_2^{2k})-2k\tau(1+\tau)[x_1^{2(k+r-1)}+x_2^{2(k+r-1)}]+\\ &\quad 4k(1+\frac{1}{\tau})x_1^{2k}x_2^{2k}\\ &\leqslant -(2k-1)-k(x_1^{2k}+x_2^{2k})-2k\tau(1+\tau)[x_1^{2(k+r-1)}+x_2^{2(k+r-1)}],\end{aligned}$$

即 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ 负定.

再定义　$W(x)=x_1^{2k}+x_2^{2k}$,则 $W(x)$ 正定,且

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}f(t,x) &= 2k(x_1^{2k-1}\dot{x}_1+x_2^{2k-1}\dot{x}_2)\\ &= 2k\Big[-\frac{x_1^{2k}+x_2^{2k}}{1+t}-t(x_1^{2(k+r-1)}+x_2^{2(k+r-1)})+\frac{2}{t}x_1^{2k}x_2^{2k}\Big]\\ &\leqslant \frac{4k}{\tau}x_1^{2k}x_2^{2k}\\ &\leqslant \frac{2k}{\tau}(x_1^{2k}+x_2^{2k})^2\leqslant\frac{wk}{\tau}\alpha^4,\end{aligned}$$

从而它有上界.由定理 10 知(3-11)式零解渐近稳定.

3.4　全局渐近稳定与全局一致渐近稳定性

对满足上述渐近稳定和一致渐近稳定性定理条件的 V 函数,只要再加上无穷大正定条件,便可得到全局性结果.

定理 11　(3-3)式的零解全局一致渐近稳定的充要条件是存在 $V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}]$ 及 $\varphi_1,\varphi_2\in K\mathbf{R}$,使得

1° $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$;

2° $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t,x)$

负定.

定理 12　若存在 $V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$ 及 $\varphi(\|x\|)\in K\mathbf{R}$,使得 $V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$,且 $\forall\varepsilon>0$,可求得 $k(\varepsilon)$,使当 $t\geqslant t_0$, $\|x\|\geqslant\varepsilon$ 时,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant -k,$$

则(3-3)式是全局渐近稳定的.

3.5　指数稳定与全局指数稳定性

设 $f(t,x)\in C[G_H,\mathbf{R}^n]$，$f(t,0)=0$，且 $f(t,x)$ 关于 x 满足利普希茨条件，则有

定理 13　(3-3) 式的零解指数稳定的充要条件是存在 $V(t,x)\in C[G_H,\mathbf{R}^1]$，满足

1° $\|x\|\leqslant V(t,x)\leqslant K(H)\|x\|$，$x\in S_H=\{x\,\|x\|<H\}$；

2° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant -qV(t,x)$，　$q>0$。

若 $f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$，且 $f(t,0)=0$，$f(t,x)$ 关于 x 满足利普希茨条件，则有

定理 14　(3-3) 式的零解全局指数稳定的充要条件是，存在 $V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$，满足

1° $\|x\|\leqslant V(t,x)\leqslant k(\alpha)\|x\|$，$\forall\alpha>0$ 和 $\forall x\in S_\alpha=\{x\,\|x\|\leqslant\alpha\}$；

2° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant -qV(t,x)$，　$q>0$。

如果不限定 $f(t,x)$ 满足利普希茨条件，则有

定理 15　若存在 $V(t,x)\in C[G_H,\mathbf{R}^1]$[$V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$]，满足

1° $\|x\|\leqslant V(t,x)\leqslant K(H)\|x\|$，$x\in S_H=\{x:\|x\|\leqslant H\}$，

$$[\forall h>0,x\in S_H];$$

2° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant -C\,V(t,x)$，$C$ 为常数，

则(3-3) 式的零解指数稳定(全局指数稳定)。

定义 1　设 $\varphi,\psi\in K[K\mathbf{R}]$。若存在常数 $k_1>0$ 及 $k_2>0$，使得 $k_1\varphi(\|x\|)\leqslant\psi(\|x\|)\leqslant k_2\varphi(\|x\|)$，则称 φ,ψ 具有局部[全局]同级增势。

定理 16　若存在 $V(t,x)\in C[G_H,\mathbf{R}^1]$[$V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$] 及与 $\|x\|^\lambda(\lambda>0)$ 具有局部[全局]同级增势的 $\varphi_1,\varphi_2,\psi\in K[\varphi_1,\varphi_2\in K\mathbf{R}]$，使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|);$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}\leqslant -\psi(\|x\|),$$

则(3-3) 式的零解指数稳定[全局指数稳定]。

定理 15 与定理 16 是等价的。

例 7　讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x+3y-x(x^2+y^2+1),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4x-3y-y(x^2+y^2+1)\end{cases}\tag{3-12}$$

的零解的稳定性。

作　$V = \dfrac{x^2+y^2}{2}$，取 $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}12)} = -2x^2 - xy - 3y^2 - (x^2+y^2)(x^2+y^2+1)$$

$$\leqslant -2x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3y^2$$

$$\leqslant -x^2 - y^2 = -2V.$$

易见定理 16 的条件成立，从而(3-12) 式的零解是全局指数稳定的.

3.6　不稳定性定理

本节介绍(3-3) 式的零解不稳定性的**切塔耶夫**(Цетаев) **定理**.

定理 17　若存在定义在 $t \geqslant t_0$，$\|x\| \leqslant H$ 上的连续可微函数 $V(t,x)$，$V(t,0) = 0$，并满足条件：

1° 对于 $t \geqslant t_0$ 在原点任意邻域内有 $V > 0$ 的区域存在；

2° 在区域 $V > 0$ 中，$V(t,x)$ 有界；

3° 在 $V > 0$ 中，$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}$ 正定，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists l > 0$，使得在 $V \geqslant \varepsilon > 0$ 中，对一切 $t \geqslant t_0$，有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)} \geqslant l > 0$，

则(3-3) 式的零解不稳定.

推论 1(李雅普诺夫第一不稳定性定理)　若在 $t \geqslant t_0$，$\|x\| \leqslant H$ 上存在可微函数 $V(t,x)$，$V(t,0) = 0$，使得

1° 定理 17 的条件 1° 成立；

2° V 具有无穷小上界；

3° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}$ 正定，

则(3-3) 式零解不稳定.

推论 2(李雅普诺夫第二不稳定性定理)　若在 $t \geqslant t_0$，$\|x\| \leqslant H$ 上存在可微函数 $V(t,x)$，$V(t,0) = 0$，使得

1° 在原点任意邻域内有 $V > 0$ 的区域；

2° V 在 $t \geqslant t_0$，$\|x\| < H$ 内有界；

3° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)} \leqslant \lambda V + W(t,x)$，其中 $\lambda > 0$. $W(t,x) \geqslant 0$，$t \geqslant t_0$，

则(3-3) 式零解不稳定.

例 8　判定系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1^2 - 2x_2^2; \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 x_2 \end{cases} \tag{3-13}$$

的零解的稳定性.

解 取 $V(x)=\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2$,得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x_1(x_1^2-2x_2^2)=4x_1V.$$

当 $x_1>0$ 时,有 $\dot{V}>0$. 根据定理 17 知(3-13)式的零解不稳定.

例 9 证明方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2;\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=k^2\sin x_1,k\neq 0\end{cases}\tag{3-14}$$

零解不稳定.

证 取 $V=x_1x_2$,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|=k^2x_1^2+x_2^2+W(x_1),$$

式中 $W(x_1)$ 最低为四项,故 $\dot{V}$ 在原点某邻域内正定. 根据定理 17,知(3-14)式的零解不稳定.

定理 18 若在区域 $G_H=\{(t,x)\mid t\geqslant t_0,\|x\|\leqslant H\}$ 内存在 $V(t,x)$,$V(t,0)=0$,使得

1° 在原点任意小的邻域

$$B_\delta=\{x\mid\|x\|<\delta\leqslant H\}\text{ 内,有区域 }V>0;$$

2° 在 $V>0$ 内,V 有界,且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}3)}=\xi(t)K(v)+U(t,x)\geqslant 0,$$

其中 $\xi(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 任意有限区间上可积,$\int_0^{+\infty}\xi(t)\mathrm{d}t=+\infty$;$K(V)$ 为 V 的连续函数,且当 $V>0$ 时有

$$K(V)>0,U(t,x)\geqslant 0,$$

则(3-3)式的零解是不稳定的.

例 10 讨论方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{x+1}(x_1^2+x_1x_2)e^{\cos(x_1+x_2)}+x_2e^{\sin t},\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1e^{\sin t}+x_2^2e^{\cos(x_1+x_2)}\quad(x\geqslant 0)\end{cases}\tag{3-15}$$

的零解的稳定性.

解 令 $V(x_1,x_2)=x_1+x_2$,则 $V(x_1,x_2)$ 的正区域为

$$D=\{t\geqslant 0,x_1+x_2>0\}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{x+1}(x_1^2+x_1x_2)e^{\cos(x_1+x_2)}+x_2e^{\sin t}+$$

$$\begin{aligned}&x_1e^{\sin t}+x_2^2e^{\cos(x_1+x_2)}\\=&\frac{1}{1+t}(x_1+x_2)^2e^{\cos(x_1+x_2)}+\frac{x_1^2}{x+1}e^{\cos(x_1+x_2)}+\\&(x_1+x_2)e^{\sin t}+x_2^2e^{\cos(x_1+x_2)}\left(1-\frac{1}{t+1}\right).\end{aligned}\tag{3-16}$$

在 D 中 $\xi(t)\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{t+1}>0$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau+1}=+\infty$.

$$K(V)=V^2e^{\cos V}=(x_1+x_2)^2e^{\cos(x_1+x_2)}>0.$$

$$U(t,x_1,x_2)=x_2^2\left(1-\frac{t}{t+1}\right)e^{\cos(x_1+x_2)}+(x_1+x_2)e^{\sin t}+\frac{x_1^2}{1+t}e^{\cos(x_1+x_2)}\geqslant 0.$$

从而定理 17 条件满足，故(3-16)式零解不稳定.

3.7　李雅普诺夫一次近似理论

考虑如下形式的非自治系统：

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t,x),\tag{3-17}$$

其中
$$f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n],\quad f(t,0)\equiv 0.$$

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\tag{3-18}$$

称(3-18)式为(3-17)式的一次近似系统.

人们常常用(3-18)式的稳定性来推断(3-17)式的稳定性.理论根据便是下列的定理，称为一次近似理论.

定理 19　若 $\forall\varepsilon>0,\exists\sigma(\varepsilon)>0$，当 $x\in D=[x\mid\|x\|<\sigma]$，$t\in[t_0,+\infty)$ 时，有 $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$，则(3-18)式的零解指数稳定缊涵(3-17)式的零解也指数稳定.

推论 3　若当 $\|x\|\to 0$ 时，$\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}\xrightarrow{\text{关于 }t\text{ 一致}}0$，则定理 19 的条件成立.

若(3-17)式与(3-18)式中的 $A(t)\equiv A$，而 $f(t,x)$ 满足定理 19 的条件，则有

定理 20　若 A 为赫尔维茨矩阵，则(3-17)式的零解指数稳定；若 A 至少有一个正实部特征值，则(3-17)式的零解不稳定.

根据一次近似理论，人们通常将(3-3)式的右边的 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开，删去非线性项而用线性系统的稳定性来推断非线性系统的稳定性.

例 11　给定如下方程组：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+4y-x^2+xy-y^4;\\\frac{dy}{dt}=-3x-2y+2x^2-3xy+4y^2,\end{cases}\tag{3-19}$$

试讨论 $x=y=0$ 的稳定性.显然它的一次近似系统为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 2y, \end{cases} \tag{3-20}$$

而 $A = \begin{bmatrix} -1, & 4 \\ -3, & -2 \end{bmatrix}$ 为赫尔维茨矩阵，故(3-19)式的零解指数稳定.

注4 一次近似理论是工程上最乐于采用的方法，因为它简单，有构造性的计算程序.但缺点是只能得到局部稳定性结论，一般不能推断非线性方程组的全局稳定性.其次当 A 有零实部特征值时，用一次近似系统的稳定性不能推断非线性系统的稳定性.这种临界情况，极为复杂，这里就不介绍了.

4 李雅普诺夫直接法的扩展

李雅普诺夫直接法不仅是用来研究李雅普诺夫意义下的稳定性的一般方法，而且还可以用来研究动力系统的有界性、耗散性、收敛性、结构扰动下的鲁棒稳定性、有界性、实用稳定性、条件稳定、轨道稳定、相对稳定、非常稳定、集合稳定等等.特别与其他方法结合可以得到许多结果.

4.1 拉萨尔不变原理

1960年，拉萨尔(Lasalle)发现了李雅普诺夫函数与伯劳霍夫极限集之间的关系.他认为一个运动极限集位置的研究，实际上是研究运动的渐近行为，适当选定李雅普诺夫函数就可给出极限集位置的信息.现介绍拉萨尔的不变原理.

考虑(1-1)式.假定 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，并保证解存在与唯一.

定义1 若 $\forall x_0 \in M$，有 $x(t,t_0,x_0) \subset M(t \geqslant t_0)$，则称集合 $M \subset \mathbf{R}^n$ 为(1-1)式定义的轨线的正向不变集；若存在 $P \in M$ 和 $t_n \to \infty(n \to \infty)$，使得 $\| x(t_n,0,x_0) - P \| \to 0$，则称当 $t \to \infty$ 时，$x(t,0,x_0) \to M$.称 P 为 $x(t,0,x_0)$ 的 ω 极限点.

引理1 若 $x(t,0,x_0)$ 对一切 $t \geqslant 0$ 有界，则 $x(t,0,x_0)$ 的 ω 极限点组成的 $\Omega(x_0)$ 集有下列性质：

1° $\Omega(x_0)$ 非空；

2° $\Omega(x_0)$ 是紧集(有界闭)；

3° $\Omega(x_0)$ 是(1-1)式的轨线的不变集；

4° 当 $t \to +\infty$ 时，$x(t,t_0,x_0) \to \Omega(x_0)$.

定理1 (拉萨尔不变原理) 设 $\mathscr{D} \in \mathbf{R}^n$ 是一有界闭集，从 $\mathscr{D}$ 内出发的(1-1)式的解 $x(t,t_0,x_0) \in \mathscr{D}$(停留在 $\mathscr{D}$ 中)，并存在 $V(x) \in C'[\mathscr{D},\mathbf{R}]$，使

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3\text{-}3)} \leqslant 0;$$

又设 $E := \left\{x \left| \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1\text{-}1)} = 0, x \in \mathscr{D}\right.\right\}$ $M \subset E$ 是最大不变集，则当 $t \to \infty$ 时，有 $x(t,$

$t_0, x_0) \to M$.

特别地，若 $M = \{0\}$，则(1-1)式的零解渐近稳定.

在某些应用中，只要作出了满足定理1的李雅普诺夫函数，同时也就给出了集合 $\mathscr{D}$. 定义集合 $\mathscr{D}$ 为

$$\mathscr{D} = \{x \mid V(x) \leqslant l\}.$$

若 $\mathscr{D}$ 是有界集，且在 $\mathscr{D}$ 中 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$，则对任何从 $\mathscr{D}$ 出发的解 $x(t)$，$V(x(t))$ 是非增的函数. 因此对一切 $t > 0$，解 $x(t)$ 恒停留在 $\mathscr{D}$ 内. 于是根据定理1，有

定理 2　设 $\mathscr{D}: = \{x \mid V(x) \leqslant l\}$ 是有界集，$V(x)$ 在 $\mathscr{D}$ 中有连续的一阶偏导数，且在 $\mathscr{D}$ 中，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1\text{-}1)} \leqslant 0,$$

则(1-1)式的从 $\mathscr{D}$ 出发的每一个解 $x(t, t_0, x_0) \to M$，当 $t \to \infty$ 时($x_0 \in \mathscr{D}$)，其中 M 的含义与定义1中定义相同.

例 1　讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx + x^2 = 0 \qquad (a > 0, b > 0) \tag{4-1}$$

的零解的稳定性.

化为方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y; \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -bx - ay - x^2. \end{cases} \tag{4-2}$$

取函数　　$V(x, y) = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3.$

做下列有界闭区域(图4-1)

$$\mathscr{D}: V \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2,$$

$$W_1 = x \geqslant -\beta,$$

$$W_2 = y + ax \geqslant -\alpha\beta, \beta > 0.$$

对任意 $x_0 \in \mathscr{D}$，当 $t \geqslant t_0$ 时，现证 $x(t, t_0, x_0)$ 恒停留在 $\mathscr{D}$ 内.

因为当 $y \neq 0$ 时，$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}2)} = -ay^2 < 0$，故 $x(t, t_0, x_0)$ 不能由曲线 $ABCD$ 由里向外穿出.

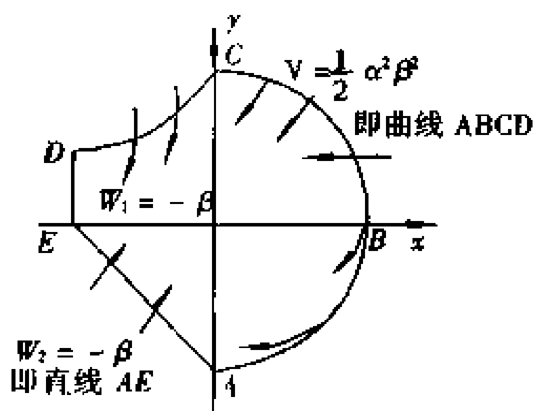


图 4-1

在 DE 上，因为 $y \geqslant 0$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t}\right|_{x=-\beta} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=-\beta} = y > 0,$$

轨线 $x(t, t_0, x_0)$ 的走向是从左到右，即从外到里.

在 AE 上，因为 $\alpha \leqslant 0$，且 $-x = \beta + \frac{\gamma}{a} \leqslant \beta$，故当 $0 < \beta < b$ 时有

$$b > \beta > -x, b + x > 0, \quad 当 y \neq 0 时.$$

于是有
$$\frac{dW_2}{dt} = -x(b+x) > 0, \quad 当 y \neq 0 时.$$

这表明 $x(t, t_0, x_0)$ 走向也是由外向里，从而轨线一直停留在 $\mathscr{D}$ 中．注意

$$\frac{dV}{dt} = -ay^2,$$

故

$$E = \{y = 0\} = x 轴, M = \{0,0\}.$$

当 $0 < \beta < b$ 时，$x(t, t_0, x_0) \to 0$，故(4-1)式的零解渐近稳定．

4.2 比较原理

虽然，李雅普诺夫 V 函数法，解决了不少实际系统的稳定性，但有些问题，还必须结合其他方法才能解决，其中理论上最完善、应用上最广泛的便是比较法，或称为比较原理．

先叙述两条引理．

引理 2 设 $I: = [a, +\infty)$，$\varphi(t) \in C[I, R^r]$ 满足下列不等式：

$$D^+\varphi(t) \leqslant f(t, \varphi(t)) \qquad [D_+\varphi(t) \geqslant f(t, \varphi(t))],$$
$$f(t, x) \in C[I \times \mathbf{R}, \mathbf{R}];$$

又设 $\bar{\Phi}(t)[\underline{\Phi}(t)]$ 为方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4-2}$$

过$(t_0, \varphi(t_0))$的右行最大[最小]解，则下列不等式成立：

$$\phi(t) \leqslant \bar{\Phi}(t)[\varphi(t) \geqslant \underline{\Phi}(x)], \quad t \in I. \tag{4-3}$$

引理 3 设 $f(t, x)$ 在平面区域 $\mathbf{R}$: $|t - t_0| \leqslant a$, $|x - x_0| \leqslant b$ 上连续，且关于 x 是单调不减的；又设 $\varphi(t)$ 在 $|t - t_0| \leqslant a$ 内连续，且$(t, \varphi(t)) \subset \mathbf{R}$，如果 $\varphi(t)$ 满足积分不等式：

$$\varphi(t) \leqslant x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

$$\left[\varphi(t) \geqslant x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau\right], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

则有

$$\varphi(t) \leqslant \bar{\Phi}(t) \qquad [\varphi(t) \geqslant \underline{\Phi}(t)], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

其中 $\bar{\Phi}(t)(\underline{\Phi}(t))$ 是微分方程(4-3)式过始点(t_0, x_0)的定义在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$ 上的最大[最小]解，此处

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \qquad M = \max_{(t,x) \in R} |f(x, x)|.$$

现讨论 n 维非自治系统：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\tag{4-4}$$

其中 $f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$，$f(t,0)=0$，并保证解存在且唯一. 同时考虑纯量比较方程：

$$\frac{du}{dt}=g(t,u),\tag{4-5}$$

其中
$$g\in C[I\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^1],\quad g(t,0)=0.$$

定理3（比较原理）　若存在正定连续函数 $V(t,x)\in[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+]$，$V(t,0)=0$，且 V 沿(4-5)式解的迪尼右上导数满足

$$D^+V|_{(4.4)}\leqslant g(t,V),\tag{4-6}$$

则有以下结论：

1° (4-5)式的零解稳定，蕴涵(4-4)式的零解稳定；

2° 若 V 还具有无穷小上界，则(4-5)式的零解一致稳定蕴涵(4-4)式的零解一致稳定；

3° (4-5)式的零解渐近稳定，蕴涵(4-4)式的零解渐近稳定；

4° V 还有无穷小上界，则(4-5)式的零解一致渐近稳定，蕴涵(4-4)式的零解一致渐近稳定；

5° 若存在 $a>0,b>0$，使

$$a(\|x\|)^b\leqslant V(t,x),$$

且 V 有无穷小上界，则(4-5)式的零解指数稳定，蕴涵(4-4)式的零解指数稳定；

6° 若还存在 $\varphi,\psi\in K\mathbf{R}$，使得

$$\varphi(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\psi(\|x\|),$$

则(4-5)式的零解全局一致渐近稳定，蕴涵(4-4)式的零解全局一致渐近稳定.

定理4　设 $f(t,x)\in C[I\times B_\sigma,\mathbf{R}^n]$，$g(t,u)\in C[I\times B'_\sigma,\mathbf{R}^1]$，其中 $B_\sigma=\{x\mid\|x\|<\sigma\}$，$B'_\sigma:=\{x\mid |x|<\sigma\}$，且在 $I\times B_\sigma$ 上存在连续正定具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$D_+V(t,x)|_{(4.4)}\geqslant g(t,V),\quad (t,x)\in I\times B_\sigma,$$

则(4-5)式的零解不稳定，蕴涵(4-4)式的零解不稳定.

例2　研究系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=(-3+8\sin t)x_1+(\sin t)x_2,\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=(\cos t)x_1+(-3+8\sin t)x_2\end{cases}\tag{4-7}$$

的零解的稳定性.

解　作李雅普诺夫函数：

则有

$$V(x)=\frac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}7)} = (-3 + 8\sin t)x_1^2 + (\sin t)x_1x_2 + (\cos t)x_1x_2 + (-3 + 8\sin t)x_2^2,$$

它是变号的,因此,不能用李雅普诺夫直接法判定.但如果变为微分不等式,则有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}7)} &\leqslant (-3 + 8\sin t)x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + (-3 + 8\sin t)x_2^2 \\ &= (-2 + 8\sin t)x_1^2 + (-2 + 8\sin t)x_2^2 \\ &= 2(-2 + 8\sin t)V.\end{aligned}$$

利用此式作比较方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(-2 + 8\sin t)u, \\ u(t_0) = V(t_0).\end{cases} \tag{4-8}$$

显然(4-8)式的解为

$$u(t) = u(t_0)\mathrm{e}^{2\int_{t_0}^{t}(-2+8\sin t)\mathrm{d}t}.$$

由比较原理,则有

$$V(t) \leqslant u(t) = u(t_0)\mathrm{e}^{2\int_{t_0}^{t}(-2+8\sin t)\mathrm{d}t}. \tag{4-9}$$

由(4-9)式可以看出,系统(4-7)的零解不仅渐近稳定,而且是指数稳定的.

4.3　微分方程解的有界性

考虑 n 维非自治非线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \tag{4-10}$$

其中　$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$,且保证解的唯一性.

定义 2　若(4-10)式的每一个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 有界,即存在 $\beta(t_0,\boldsymbol{x}_0) = \text{const} > 0$,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \beta(t_0,\boldsymbol{x}_0),$$

则称(4-10)式的解有界,也称系统(4-10)是**拉格朗日稳定**的.

定义 3　若 $\forall \alpha > 0, \exists \beta(\alpha) > 0$,使得 $\forall x_0 \in S_\alpha = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| < \alpha\}$,有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \beta(\alpha) \quad t \geqslant t_0,$$

则称(4-10)式的解是一致有界的.一致有界性,也称拉格朗日一致稳定性.

定理 5　(4-10)式的解有界的充要条件是存在函数 $V(t,\boldsymbol{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1]$,满足下列条件:

1° $V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$,　$\varphi(\|\boldsymbol{x}\|) \in K\mathbf{R}$;

2° 对每一个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,$V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))$ 关于 t 不增.

注 1　作为2°的充分条件可以用条件

$$\mathrm{D}^+ V|_{(4\text{-}10)} \leqslant 0$$

来代替.

例 3　二阶非线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P(t)\frac{dx}{dt}+q(t)f(x)=0 \tag{4-11}$$

的有界性,其中 $P(t)\in C[I,\mathbf{R}]$, $q(t)\in C^1[I,\mathbf{R}]$.

$f(x)\in C[(-\infty,+\infty),\mathbf{R}]$,且下列条件成立:

1° $0<q(t)\leqslant M$;

2° $p(t)\geqslant -\dfrac{q'(t)}{2q(t)}$;

3° $\int_0^{\pm\infty}f(x)dx=+\infty$.

证　化(4-11)式为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-p(t)y-q(t)f(x).\end{cases} \tag{4-12}$$

设

$$V(t,x,y)=\int_0^x f(\xi)d\xi+\frac{y^2}{2q(t)},$$

根据条件 1° 有

$$V(t,x,y)\geqslant\int_0^x f(\xi)d\xi+\frac{y^2}{2M}=W(x,y)\to+\infty,\text{当 } x^2+y^2\to\infty \text{ 时}.$$

故存在 $\varphi\in KR$,使得

$$V(t,x,y)\geqslant\varphi(x^2+y^2).$$

$$\begin{aligned}D^+V(t,x(t),y(t))|_{(4\text{-}12)}&=f(x(t))\cdot y(t)+\frac{y(t)}{q(t)}\frac{dy}{dt}-\frac{y^2(t)\dot q(t)}{2q^2(t)}\\&=f(x(t))y(t)-\frac{y(t)}{q(t)}\{p(t)y(t)+\\&\qquad q(t)f(x(t))\}-\frac{y^2(t)\dot q(t)}{2q^2(t)}\\&=\frac{-y^2(t)}{q(t)}\Big[p(t)+\frac{\dot q(t)}{2q(t)}\Big]\leqslant 0.\end{aligned}$$

故 $x(t)$ 和 $y(t)=\dot x(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 内有界.

定理 6　(4-10)式的解一致有界的充要条件是存在　$V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$,使得

1° $V(t,x)\geqslant\varphi(\|x\|)$,　$\varphi\in KR$;

2° 对每一解 $x(t,t_0,x_0)$, $V(t,x(t,t_0,x_0))$ 关于 t 不增;

3° $\forall\alpha>0,\exists\beta(\alpha)>0,\forall x\in S_\alpha=\{x\mid\|x\|\leqslant\alpha\}$,有

$$V(t,x)\leqslant\beta(\alpha).$$

定理 7　若 $f(t,x)$ 关于 x 满足利普希茨条件,即 $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant$

$L\|x-y\|$，则(4-10)式的解一致有界的充要条件是存在 $V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$ 满足条件：

1° $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$　其中 $\varphi_1,\varphi_2\in KR$；

2° $D^+V(t,x)|_{(4\text{-}10)}\leqslant 0$.

例 4　考虑二阶非线性方程：

$$\ddot{x}+f(x,y)\dot{x}+g(x)=p(t). \tag{4-13}$$

假设成立下列条件：

1° $f(x,y),g(x)$ 对所有变元连续；

2° $p(t)$ 在 I 上连续，且 $\int_0^{+\infty}|p(t)|\mathrm{d}t<\infty$；

3° $f(x,y)\geqslant 0$ 对一切 x,y 成立；

4° $G(x)\xlongequal{\text{def}}\int_0^x g(u)\mathrm{d}u>0,\quad\forall x\neq 0$, 且当 $|x|\to\infty$ 时，$G(x)\to\infty$，

则(4-13)式的解一致有界.

证　化(4-13)式为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y;\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x,y)y-g(x)+p(t).\end{cases} \tag{4-14}$$

取

$$V(t,x,y)=\sqrt{y^2+2G(x)}-\int_0^t|p(s)|\mathrm{d}s,$$

当　$x^2+y^2\geqslant k^2\gg 1$ 时，有

$$\frac{1}{2}\sqrt{y^2+2G(x)}\leqslant V(t,x,y)\leqslant\sqrt{y^2+2G(x)},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}14)}=\frac{1}{\sqrt{y^2+2G(x)}}\{g(x)y+y(-f(x,y)y-g(x)+p(t))\}-|p(t)|\leqslant 0.$$

由定理 4.12 知(4-14)式的解一致有界，从而(4-13)式的解一致有界.

在某些情况下，下面的充分条件，在应用中较方便.考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=F(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=G(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\end{cases} \tag{4-15}$$

这里　$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$，且 $F(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),G(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 都在 $I\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ 上连续.

定理 8　设存在 $V(t,x,y)\in C[I\times\Omega^c,\mathbf{R}]$，$\Omega^c=\{x,y,\|x\|^2+\|y\|^2\geqslant K^2\}$，并满足条件：

1° $V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rightrightarrows+\infty$，当 $\|\boldsymbol{y}\|\to+\infty$ 时；

2° $V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant b(\|\boldsymbol{x}\|,\|\boldsymbol{y}\|)$，其中 $b(r,s)$ 为连续函数；

3° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}15)} \leqslant 0.$

此外，设对每个 $M>0$，定义 $\Omega_1{}^c=\{x,y,\|x\|\geqslant k_1(M),\|y\|\leqslant M\}$，设存在 $W(t,x,y)\in C[I\times\Omega_1{}^c,\mathbf{R}^1]$，满足

4° $W(t,x,y)\rightrightarrows+\infty$，当 $\|x\|\to+\infty$ 时；

5° $W(t,x,y)\leqslant C(\|x\|)$，这里 $c(r)$ 是连续的；

6° $\left.\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}15)} \leqslant 0,$

则(4-15)式的解一致有界.

例5 考虑二阶非线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=p(t) \tag{4-16}$$

假设

1° $f(x)$ 于 $\mathbf{R}^1$ 上连续，且当 $x\to\pm\infty$ 时，有

$$F(x)\xlongequal{\text{def}}\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi\to\pm\infty;$$

2° $g(x)$ 于 $\mathbf{R}^1$ 上连续，且对于 $|x|>q$，有 $xg(x)>0$；

3° $p(t)$ 连续，且 $p(t)=\int_0^t p(\xi)\mathrm{d}\xi$ 有界.

试证(4-16)式的每一个解及它的导数均有界.

证 化(4-16)式为方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x)+p(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x).\end{cases} \tag{4-17}$$

适当选取常数 $a>0,b>0$.令

$$G(x)=\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi,\ V(x,y)=G(x)+\frac{y^2}{2},$$

$$\widetilde{V}(t,x,y)\xlongequal{\text{def}}\begin{cases}V(x,y) & (x\geqslant a,\ |y|<\infty),\\ V(x,y)-x+a & (|x|\leqslant a,y\geqslant b),\\ V(x,y)+2a & (x<-a,y\geqslant b),\\ V(x,y)+\dfrac{2a}{b} & (x\leqslant -a,\ |y|<b),\\ V(x,y)-2a & (x\leqslant -a,y\leqslant -b),\\ V(x,y)+x-a & (|x|\leqslant a,y\leqslant -b),\end{cases}$$

则 $\widetilde{V}$ 满足定理8条件 $1^\circ\sim3^\circ$，且对于适当的 k_1，在 $|x|>k_1(M)$ 和 $|y|\leqslant M$ 上有定义的函数：

$$W(t,x,y)\xlongequal{\text{def}}|x|$$

满足定理8的条件 $4^\circ\sim6^\circ$.计及 $y(t)$，$F(x(t))$，$p(t)$ 有界，从而(4-16)式的解及它

的导数均为有界.

4.4 系统的耗散性

定义 4 若存在常数 $B>0$,对于(4-10)式的每个解 $x(t,t_0,x_0)$,都存在常数 $T(t_0,x_0)$,当 $t\geqslant t_0+T(t_0,x_0)$ 时,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<B,$$

则称(4-10)式为一耗散系统,称(4-10)式的解对界限 B 最终有界.若 $\forall\alpha>0,\forall x_0\in s_\alpha=\{x,\|x\|\leqslant\alpha\}$,$\exists T(\alpha)>0$,当 $t\geqslant t_0+T$ 时,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<B,$$

则称(4-10)式具有一致耗散性,称(4-10)式的解对界限 B 最终一致有界.

定理 9 (4-10)式一致耗散的充要条件是存在常数 $B>0$,函数 $V(t,x)\in C[I\times\Omega_k^c,\mathbf{R}^1]$($\Omega_K^c=\{x,\|x\|\geqslant K\}$,$K\leqslant B$),使得

1° $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$,$\varphi_1,\varphi_2\in KR$ 在 $I\times\Omega_K^c$ 上成立;

2° $D^+V|_{(4\text{-}10)}\leqslant-\varphi(\|x\|)$,$\varphi\in K$ 在 $I\times\Omega_k^c$ 上成立.

定理 10 若存在常数 $B>0$ 及函数 $V(t,x)\in C[I\times\Omega_k^c,\mathbf{R}^1]$,使得

1° $\varphi(\|x\|)\leqslant V(t,x)$ 在 $I\times\Omega_k^c$ 上成立,$\varphi\in KR$;

2° $D^+V|_{(4\text{-}10)}\leqslant-cV(t,x)$,$c=\text{const}>0$,

则(4-10)式是一耗散系统.

例 6 考虑系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-4x_2-x_1^3;\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=4x_1+x_2-x_2^3\end{cases}\tag{4-18}$$

的耗散性.

作

$$V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4\text{-}18)}=x_1^2+x_2^2-(x_1^4-x_2^4)<0,\text{当 } x_1^4+x_2^4>x_1^2+x_2^2\text{ 时},$$

故(4-18)式是一耗散系统.

例 7 证明系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2-x_1(x_1^2+x_2^2+\sin t),\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+x_2-x_2(x_1^2+x_2^2+\sin t)\end{cases}\tag{4-19}$$

的一致耗散性.

证 取 $B=3$, $k=2.5$, $\Omega_k^c=\{x_1^2+x_2^2\geqslant k\}$.则

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4\text{-}19)} &= x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + \sin t) \\ &= -(x^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + \sin t + 1) \\ &\leqslant -0.5(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -4(x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

当 $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2.5$ 时,易见定理 9 的条件会满足,故(4-19) 式是一致耗散的.

4.5 系统的收敛性

仍考虑系统(4-10),但 $f(t,x) \in C[I_t \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$.其中 $I_t = (-\infty, +\infty) f(t, \boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是连续可微的.

定义 5 若

1° 系统(4-10) 的所有解 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上有定义;

2° 惟一存在定义于 I_t 上的有界解 $\boldsymbol{\eta}(t)$,即

$$\sup_t \| \boldsymbol{\eta}(t) \| < \infty;$$

3° $\boldsymbol{\eta}(t)$ 全局渐近稳定,即对每一个解 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 有

$$\lim_{t \to \infty} \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\eta}(t) \| = 0,$$

则称系统(4-10) 具有收敛性.

研究收敛性的重要目的之一是研究系统的周期解的存在性.

如果 $f(t, x)$ 关于 t 以 ω 为周期,即

$$\boldsymbol{f}(t + \omega) \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

且(4-10) 式具有收敛性,$\boldsymbol{\eta}(t)$ 为全局渐近稳定的有界解,则 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 为周期解.因为

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(t + \omega)}{dt} = \boldsymbol{f}(t + \omega, \boldsymbol{\eta}(t + \omega)) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\eta}(t + \omega)),$$

故 $\boldsymbol{\eta}(t + \omega)$ 也是(4-10) 式的解,且在 I_t 上有界.由惟一性,有 $\boldsymbol{\eta}(t + \omega) \equiv \boldsymbol{\eta}(t)$,故 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 是周期解.

定理 11 设(4-10) 式满足条件:

1° $\sup_t \| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}) \| = k < \infty$;

2° $\Lambda(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -\alpha < 0$,此处 $\Lambda(t, \boldsymbol{x})$ 是矩阵

$$\boldsymbol{J}_s(t, \boldsymbol{x}) \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{2}\{\boldsymbol{f}'_x(t, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{f}'_x(t, \boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\}$$

的最大特征值,

则(4-10) 式具有收敛性.

定理 12 假设

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{4-20}$$

1° $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是稳定的；

2° $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t),\cdots,f_n(t)) \in C[I_t,\mathbf{R}^n]$ 有界，

则(4-20)式具有收敛性，且其在 I_t 上有惟一有界且全局渐近稳定的解为

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

4.6　非常稳定性

仍考虑系统(4-10)，其中 $f(t,x) \in C[I\times S_H,\mathbf{R}^n]$，

$$S_H = \{x : \|x\| \leqslant H\}, x = \mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n).$$

定义 6　若 $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 \in S_H^*, \forall y_0 \in S_H^* = \{x: \|x\| \leqslant H^*\}$，当 $\|x_0 - y_0\| < \delta(\epsilon)$ 时有：

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < \epsilon, t \geqslant t_0,$$

则称(4-10)式关于$(H^*,H)(H^* \leqslant H)$是一致非常稳定的. 若 $\forall \tilde{\epsilon} > 0, \exists \delta_0 > 0$ 和 $T(\epsilon) > 0$，使得 $\forall x_0 \in S_{H^*}, \forall y_0 \in S_{H^*}$，当 $\|x_0 - y_0\| < \delta_0$ 时，对所有 $t \geqslant t_0 + T(\epsilon)$，有：

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < \tilde{\epsilon},$$

则称(4-10)式关于(H^*,H)一致非常吸引.

若(4-10)式关于(H^*,H)一致非常稳定，且一致非常吸引，则称(4-10)式关于(H^*,H)一致非常渐近稳定.

定理 13　若 $f(t,x) \in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$，且存在

$V(t,x,y) \in C^1[I\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}]$，满足

1° $\varphi_1(\|x-y\|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant \varphi_2(\|x-y\|)\quad \varphi_1,\varphi_2 \in KR$；

2° $$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}10)} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) + \frac{\partial V}{\partial y}f(t,y) \leqslant 0$$
$$[\leqslant -\psi(\|x-y\|), \psi \in K],$$

则(4-10)式一致非常稳定[一致非常渐近稳定].

定义 7　设 $H = +\infty$. 若 $\forall \alpha > 0, \exists \beta(\alpha) > 0$，当 $\|x_0 - y_0\| < \alpha$ 时，有

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < \beta(\alpha)\quad (t \geqslant t_0),$$

则称(4-10)式是一致距离有界的.

若对于给定的常数 $B > 0, \forall \alpha > 0, \exists T(\alpha) > 0$，当 $\|x_0 - y_0\| < \alpha$ 时，对所有的 $t \geqslant t_0 + T(\alpha)$，有

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < B,$$

则称(4-10)式对给定的界 B 最终一致有界.

定理 14　若存在 $V(t,x,y) \in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$ 使在 $t \in I$ 和 $\|x-y\| \geqslant k$ 上，满足条件：

1° $\varphi_1(\|x-y\|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant \varphi_2(\|x-y\|)$，　$\varphi_1,\varphi_2 \in KR$；

2° $\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}10)} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x}f(t,x) + \dfrac{\partial V}{\partial y}f(t,y) \leqslant 0[-C\|x-y\|]$,

则(4-10)式是一致距离有界的[对 $B > k$ 最终一致距离有界].

例8 考虑方程：

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = e(t,\dot{x}), \tag{4-21}$$

其中 $f(x)$ 连续、不减，且 $e(t,\dot{x})$ 连续，如果

$$(x-v)\{e(t,x) - e(t,v) + f(v) - f(x)\} \leqslant 0,$$

则(4-21)式的解一致距离有界.

证：化(4-21)式为方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x - f(y) + e(t,y), \end{cases} \tag{4-22}$$

并考虑同一形式的方程组：

令

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u - f(v) + e(t,v). \end{cases}$$

则

$$V(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \triangleq -2(y-v)\{f(y) - f(v)\} + 2(y-v)\}\{e(t,y) - e(t,v)\} \leqslant 0.$$

根据定理4.13，(4-21)式的解是一致距离有界的.

4.7 相对稳定性

非常稳定性(有界性)是研究同一方程的解与解之间的距离关系.

下面要介绍两个不同方程的解与解之间的距离关系.

考虑两个不同的系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad f \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n], x \in \mathbf{R}^n; \tag{4-23}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t,y), \quad y \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n], y \in \mathbf{R}^n. \tag{4-24}$$

定义8 若 $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0 \quad (\delta = \delta(\varepsilon))$，当 $\|x_0 - y_0\| < \delta$ 时，有

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0,$$

则称(4-23)式与(4-24)式的解是相对稳定的(相对一致稳定的).

若 $\forall \varepsilon > 0, t_0 \in I, \exists \sigma_0 = \sigma(t_0)(\sigma_0 = \sigma)$ 和 $T = T(t_0,\varepsilon)(T = T(\varepsilon))$，当 $\|x_0 - y_0\| < \sigma_0$ 时，有

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\| < \varepsilon \quad (t \geqslant t_0 + T),$$

则称(4-23)式与(4-24)式的解是相对吸引的(相对一致吸引).

若(4-23)式与(4-24)式的解相对稳定[一致稳定],且相对吸引[相对一致吸引],称为相对渐近稳定[相对一致渐近稳定].

定理 15 若存在 $V(t,x,y)\in C[I\times \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+]$,使得

1° $\varphi_1(\|x-y\|)\leqslant V(t,x,y)\leqslant \varphi_2(\|x-y\|)$, $\varphi_1,\varphi_2\in K\mathbf{R}$;

2° $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)+\frac{\partial V}{\partial y}f(t,y)\leqslant 0$$
$$[\leqslant -\psi(\|x-y\|)\quad \psi\in K],$$

则(4-23)式与(4-24)式的解相对一致稳定(相对一致渐近稳定).

相对稳定在电力系统中有很好的应用.人们需要研究几台电机的同步运行,化为微分方程便是相对稳定问题.

4.8 集合稳定性

仍考虑(4-10)式,在 $I\times \mathbf{R}^n$ 空间上考虑一个集合 M,它可以是一个任意的有界或无界点集.

令 $M(\sigma)=\{x\mid (\sigma,x)\in M\}$ 表示超平面 $t=\sigma$ 与 M 的交集.π_M 表示 M 在 $\mathbf{R}^n$ 上的投影,$d(x,M)$ 表示 x 到 π_m 的最小距离,即

$$d(x,M)=\inf_{y\in \pi_M}\|x-y\|. \tag{4-25}$$

设 $M(\sigma,\varepsilon)$ 是 $M(\sigma)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的 ε 邻域.

以下关于 M 的稳定性、吸引性,都是对方程(4-10)的解而言.为行文简便起见,省去了"对方程(4-10)的解而言"一语.

定义 9 若 $\forall \varepsilon>0,\forall \alpha>0,\forall t_0\in I,\exists \delta(t_0,\varepsilon,\alpha)[\exists \delta(\varepsilon)]$,使得 $\forall x_0\in S_\alpha=\{x,\|x\|\leqslant \alpha\}$,当

$$\mathrm{d}(x_0,M(t_0))<\delta(t_0,\varepsilon,\alpha)[<\delta(\varepsilon)]$$

时,有
$$d(x(x,t_0,x_0),M(t))<\varepsilon\qquad (t\geqslant t_0),$$

则称集合 M **稳定**(一致稳定).

定义 10 若当 $t\to\infty$ 时,(4-10)式的每一个解 $x(t,t_0,x_0)\to M$,则称集合 M 全局吸引;若 $\forall \varepsilon>0,\forall \eta>0,\forall \alpha>0,\forall t_0\in I,\exists T(\varepsilon,\eta)>0$,当

$$x_0\in S_\alpha=\{x,\|x\|\leqslant \alpha\},\quad d(x_0,m(t_0))\quad\leqslant \eta,$$

时,有

$$d(x(t,t_0,x_0),M(t))<\varepsilon\qquad (t\geqslant t_0+T),$$

则称 M 为全局一致吸引.

若集合 M 稳定且吸引,则称它为渐近稳定;若 M 一致稳定且一致吸引,则称它为**全局一致渐近稳定**.

定理 16 若存在函数

$$V(t,x)\in C[I\times D_H,\mathbf{R}^1],D_H=\{x\mid d(x,M)\leqslant H\},$$

满足

1° $\varphi_1(d(x,M(t))) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(d(x,M(t))),\varphi_1,\varphi_2 \in K$;

2° $D^+ V(t,x)|_{(4\text{-}10)} \leqslant 0$,

则集合 M 一致稳定.

定理 17　若存在 $V(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1]$,满足

1° $\varphi_1(d(x,M)) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(d(x,M)),\varphi_1,\varphi_2 \in KR$;

2° $\dfrac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t} \leqslant -\psi(d(x,M)),\quad \psi \in K$,

则 M 全局一致渐近稳定.

4.9　条件稳定性

仍考虑系统(4-10).

定义 11　若在 $\mathbf{R}_x^n$ 内存在 k 维流形

$$S_k(\xi(t_0)) \in S_k \quad 1 \leqslant k < n.$$

则称(4-10)式的解 $\xi = \xi(t)$　当 $t \to \infty$ 时条件稳定.

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$,当初始扰动 $x(t_0) \in S_k$,且

$$\| x(t_0) - \xi(t_0) \| < \delta(\varepsilon),$$

有

$$\| x(t,t_0,x_0) - \xi(t,t_0,\xi_0) \| < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_0),$$

其中

$$x(t_0) = x_0,\xi(t_0) = \xi_0.$$

若(4-10)式是条件稳定的,且存在 $\Delta = \text{const} > 0$,当 $\| x(t_0) - \xi(t_0) \| < \Delta$ 时,有

$$\| x(t) - \xi(t) \| \to 0 \qquad (t \to +\infty),$$

则称(4-10)式的解 $\xi = \xi(t)$ 当 $t \to \infty$ 时条件渐近稳定.

考虑系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + \varphi(t,x), \tag{4-26}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为常矩阵,$\varphi \in C[I \times \mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$.

定理 18　设矩阵 A 有 k 个负实部的特征值,其他特征值的实部非负,$\varphi(t,x)$ 关于 t 连续($t \geqslant 0$),关于 x 满足

$$\| \varphi(t,x) - \varphi(t,y) \| \leqslant L(\Delta) \| x - y \| \qquad (\| x \| \leqslant \Delta, \| y \| \leqslant \Delta),$$

其中　当 $\Delta \to 0$ 时,$L(\Delta) \to 0$,则方程组(4-26)的零解关于某 k 维流形 S_k 是条件渐近稳定的.

推论 1　设矩阵 A 有 k 个负实部特征值和$(n-k)$个正实部的特征值,且对 $\varphi(t,x)$ 在 $t \in (-\infty,+\infty)$ 内满足利普希茨条件,当利普希茨常数充分小时,则在 $\mathbf{R}^n$ 的原点某邻域内存在 k 维流形 S_k^+ 和 $n-k$ 维流形 S_{n-k}^-,使方程组(4-26)式的解 $x(t)$ 成立下列极限关系:

$$x(t) \to 0,\text{当 } t \to +\infty \text{ 时}, \quad \text{若 } x(0) \in S_k^+;$$

$$x(t) \to 0,\text{当 } t \to -\infty \text{ 时}, \quad \text{若 } x(0) \in S_{n-k}^-.$$

例 9　下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y\end{cases}\tag{4-27}$$

的通解为

$$x(t,0,x_0)=x_0\mathrm{e}^t,$$
$$y(t,0,y_0)=y_0\mathrm{e}^{-t}.$$

显然(4-27)式的零解是不稳定的，但同时不难看出，若取 $x_0=0,y_0\neq0$，则有当 $t\to^{+}\infty$ 时，$(x(t,0,x_0),y(t,0,y_0))\to0$；若取 $x_0\neq0,y_0=0$，则有当 $t\to-\infty$ 时，$(x(t,0,x_0),y(t,0,y_0))\to0$. 故(4-27)式的零解是条件渐近稳定的.

4.10　鲁棒稳定性和有界性

仍考虑系统(4-10)，且设 $f(t,0)\equiv0,f(t,x)\in C[I\times S_H,\mathbf{R}^n],S_H=\{x\mid\|x\|\leqslant H\}$. 同时，考虑扰动系统：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y)+g(t,y),\tag{4-28}$$

其中 $g\in C[I\times S_H,\mathbf{R}^n]$.

定义 12　若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1(\varepsilon)>0,\delta_2(\varepsilon)>0$，当 $\|g(t,y)\|<\delta_1,\|y_0\|\leqslant\delta_2$ 时，(4-28)式的解 $y(t,t_0,y_0)$ 有估计式

$$\|y(t,t_0,y_0)\|<\varepsilon\quad(t\geqslant t_0),$$

则称(4-10)式的零解是经常干扰下稳定的.

定理 19　若存在函数 $V\in C[I\times S_H,\mathbf{R}]$ 满足条件：

1° $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)\quad\varphi_1,\varphi_2\in K$;

2° $D^+V|_{(4\text{-}10)}\leqslant-CV(t,x)\quad C>0$;

3° $\|V(t,x)-V(t,y)\|\leqslant K\|x-y\|$.

则(4-10)式的零解是经常干扰下稳定的.

定理 20　对于线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x,\tag{4-29}$$

其中 $A(x)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是连续函数矩阵. 若(4-29)式的零解是经常干扰下稳定的，则它的零解必是指数稳定的.

定义 13　若 $\forall\alpha>0,\exists\beta(\alpha)>0,r(\alpha)>0$，使当 $\alpha\leqslant\|y\|<\beta$ 时，有

$$\|y(t,y)\|<r(\alpha),$$

且若 $\forall y_0\in S_0=\{y\mid|y|<\alpha_0\}$，则对一切 $t\geqslant t_0$ 有

$$\|y(t,t_0,y_0)\|<\beta(\alpha),$$

这里 $y(t,t_0,y_0)$ 是(4-28)式的解，则称(4-10)式是经常干扰下有界的.

定理 21　若存在函数 $V(t,x)\in C[I\times S_k^c,\mathbf{R}^1]$（$S_k^c=\{x\mid\|x\|\geqslant k\}$）使得

1° $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|),\varphi_1,\varphi_2\in KR$;

2° $\| V(t,x) - V(t,y) \| \leqslant L \| x - y \|$;

3° $D^+ V(t,x)|_{(4\text{-}10)} \leqslant -C(\|x\|)$ ($C(r)$ 连续正定),

则(4-10)式是在经常干扰下有界的.

4.11 实用稳定性

李雅普诺夫稳定性定义中的 ϵ 是任意给定的,而 $\delta(\epsilon)$ 只要存在,不管多小,但实际问题中,δ 太小,以致要求初始扰动不超过 δ,本身就做不到.同样地,要求一系统实际运行状态与理想的运行状态相差任意小,是不可能,也不必要的,可以允许在限定误差范围内运行.因此很自然地提出以下实用稳定性问题.

考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{4-30}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + p(t,x), \tag{4-31}$$

这里 $f(t,0) \equiv 0, f \in C[I \times S_H, \mathbf{R}^n], p(t,x) \in C[I \times S_H, \mathbf{R}^n]$.

定义 14 预先给定正数 δ 及两个集合 Q 与 Q_0,其中 Q 是包含原点的有界闭集,Q_0 是 Q 的子集.若 $\forall x_0 \in Q_0, \forall t_0 \geqslant 0$ 和 $\forall p(t,x) \in P \triangleq \{P(t,x) \mid \|p(t,x)\| \leqslant \delta\}$,(4-31)式的解 $x(t,t_0,x_0) \in Q$ $(t \geqslant t_0)$,则称(4-30)式的零解关于 δ, Q, Q_0 为实用稳定.

实用稳定概念与数 δ 及集合 Q, Q_0 有关.Q 是许可状态集,Q_0 是初始状态集.

定理 22 设 Q_0 为 $\mathbf{R}^n$ 空间中包含原点的紧集,如果存在函数 $V(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$,使对一切 $x \in Q_0^c$ (Q_0^c 为 Q_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的余集),有

$$D^+ V(t,x)\Big|_{(4\text{-}31)} \leqslant 0,$$

且对一切 $x_1 \in Q_0, x_2 \in Q^c$ (Q^c 为 Q 的余集) 及 $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$,有

$$V(t_1,x_1) < V(t_2,x_2),$$

则(4-31)式的从 Q_0 内出发的解,在 $t \geqslant t_0$ 不超出 Q,从而(4-31)式的零解关于 δ, Q_0, Q 为实用稳定的.

定义 15 若 $\forall p \in P = \{P(t,x) \mid \|p(t,x)\| \leqslant \delta\}$,从 Q_0 出发的解 $x(t,t_0,x_0)$ 在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ 内不越出集 Q,则称(4-30)式的零解关于 δ, Q_0, Q 在有限时间$[t_0, T]$内为实用稳定的.

定理 23 若存在 $V(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$,使在 Q_0 内 $V \leqslant l_0$,在 Q^c 内有 $V \geqslant l$,且

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4\text{-}30)} \leqslant (l - l_0)/T,$$

则(4-30)式从 Q_0 出发的解在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ 内保持在 Q 内.

定义 16 若(4-30)式的零解是关于 δ, Q_0, Q 为实用稳定的,且对 $\forall p \in P$,(4-30)式的每一个解 $x(t,t_0,x_0)$ 最终要进入 Q,则说(4-31)式的零解为强实用稳

定的.

定理 24 若存在函数 $V(t,x)\in C[\mathbf{R}^n,\mathbf{R}]$,当 $\|x\|\to+\infty$ 时,$V(x)\to+\infty$;对 $\forall x\in Q_0^c$ 和 $\forall p\in P$,当 $t\geqslant t_0$ 时,$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4\text{-}31)}\leqslant-\varepsilon<0$;又 $V(t,x)<V(t,y)$ 对所有 $x\in Q_0$ 和 $y\in Q^c$ 成立,则(4-31)式的零解关于 δ,Q_0,Q 具有强实用稳定性.

注 3 实用稳定中的集合 Q,Q_0 比较抽象,可以具体化为

$$Q=\{x\mid\|x\|\leqslant k\},\qquad Q_0=\{x\mid\|x\|\leqslant k_0\}.$$
$$0<k_0<k.$$

这使用起来就方便了.

5 特殊系统的稳定性

5.1 分离变量非线性系统

考虑 n 维分离变量非线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(x_j)\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{5-1}$$

这里 $f_{ij}(0)=0$, $f_{ij}(x_j)\in C[\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1](i,j=1,2,\cdots,n)$,并保证(5-1)式解的唯一性.

这种系统是定常线性系统的自然推广,它有鲜明的实际背景.不仅一般非线性控制往往可化为(5-1)式,而且一般的生态系统,甚至一般神经网络系统都可以化为(5-1)的形式.

定理 1 若(5-1)式满足下列条件:

1° $f_{ii}(x_i)\cdot x_i<0,x_i\neq0,i=1,2,\cdots,n$;

2° $\int_0^{\pm\infty}f_{ii}(x_i)\mathrm{d}x_i=-\infty$, $i=1,2,\cdots,n$;

3° 存在常数 $c_i>0,i=1,2,\cdots,n$,使得矩阵 $A(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 负定,其中

$$a_{ij}(x)=\begin{cases}-c_i, & i=j\\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_if_{ij}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}+\dfrac{c_jf_{ji}(x_i)}{f_{ii}(x_i)}\right), & i\neq j,x_ix_j\neq0,\end{cases}$$

则系统(5-1)式的零解全局稳定.

注 1 定理1中 $A(a_{ij}(x))$ 的元素可以取为较保守但易验证的形式.例如可取

$$a_{ij}(x)\begin{cases}=-c_i\quad(i=1,2,\cdots,n,i=j),\\ \geqslant\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{c_if_{ij}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}+\dfrac{c_jf_{ji}(x_i)}{f_{ii}(x_i)}\right|, & i\neq j,x_ix_j\neq0;\end{cases}$$

或者 $$a_{ij}=\begin{cases} c_i, & i=1,2,\cdots,n,\quad i=j=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{1}{2}(c_ib_j+c_jb_i), & i\neq j,\end{cases}$$
其中
$$b_i\geqslant\left|\frac{f_{ji}(x_i)}{f_{ii}(x_i)}\right|,\qquad b_j\geqslant\left|\frac{f_{ij}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right|.$$
这样,可适当选取易估计的函数(特别是常数)来简化 $A(a_{ij}(x))$ 负定的验证.

例1 试判定
$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1^3+\sin x_2^3-16x_2^3;\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{4}(\sin x_1)x_1^2+x_1^3-2x_2^3\end{cases}\tag{5-2}$$
的零解的稳定性.

令
$$f_{11}(x_1)=-x_1^3,\qquad f_{22}(x_2)=-2x_2^3,$$
$$f_{21}(x_1)=\frac{1}{4}(\sin x_1)x_1^2+x_1^3,\quad f_{12}(x_2)=\sin x_2^3-16x_2^3.$$
显然定理的条件1°,2°成立.又如取 $c_1=1,c_2=8$,则根据定理1中 $A(a_{ij})$ 的定义,求得
$$a_{11}=-1,\quad a_{22}=-8,$$
$$a_{12}=-\frac{1}{2}\left(\frac{-(\sin x_2^3-16x_2^3)}{-2x_2^3}+\frac{8\left(\frac{1}{4}(\sin x_1)x_1^2+x_1^3\right)}{-x_1^3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x_2^3}{2x_2^3}-\frac{2\sin x_1}{x_1}\right)=-\frac{1}{4}\frac{\sin x_2^3}{x_2^3}+\frac{\sin x_1}{x_1}=a_{21}.$$
易见
$$a_{12}a_{21}=\left(-\frac{1}{4}\frac{\sin x_2^3}{x_2^3}+\frac{\sin x_1}{x_1}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{4}+1\right)^2=\frac{25}{16}<8=a_{11}a_{22},$$
故矩阵 $(a_{ij})_{2\times2}$ 负定.由定理1知例1的零解全局稳定.

例2 试判定系统
$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+\dfrac{x_2^4}{1+x_2^2},\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{2x_1^2}{1+x_1^2}-x_1^3\end{cases}\tag{5-3}$$
的零解的稳定性.

令
$$f_{11}(x_1)=-x_1,\quad f_{22}(x_2)=-x_2^3,$$
$$f_{21}(x_1)=\frac{2x_1^2}{1+x_1^2},\quad f_{12}(x_2)=\frac{x_2^4}{1+x_2^2}.$$

显然定理 1 的条件 1°,2° 成立.取 $c_1 = c_2 = 1$.于是

$$a_{11} = a_{22} = 1, \qquad a_{12} = a_{21} \leqslant \frac{1}{2}\left[\left|\frac{2x_1}{1+x_1^2}\right| + \left|\frac{x_2}{1+x_2^2}\right|\right] \leqslant \frac{3}{4},$$

故矩阵$(a_{ij})_{2\times 2}$负定.从而例 2 的零解全局稳定.

定理 2　若(5-1)式满足下列条件:

1° $f_{ii}(x_i)\cdot x_i < 0, x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$;

2° 存在常数 $c_i > 0$,使得

$$c_j \mid f_{jj}(x_j) \mid - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} c_i \mid f_{ij}(x_j) \mid > 0,$$

则(5-1)式的零解全局稳定.

定理 3　若(5-1)式满足条件:

1° $f_{ii}(x_i)\cdot x_i < 0, x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$;

2° $\left|\dfrac{f_{ij}(x_j)}{f_{jj}(x_j)}\right| \leqslant a_{ij}$;

3° 矩阵　$\tilde{A}\ (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$　是一个 M 矩阵,其中

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1,\cdots,n, \\ -a_{ij}, & i \neq j, i,j = 1,\cdots,n, \end{cases}$$

则(5-1)式零解全局稳定.

例 3　考虑方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -1.2x_1^3 + (\sin x_1)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{2x_1^4}{1+x_1^2} - x_2 \end{cases} \tag{5-4}$$

的零解的稳定性.

显然

$$f_{11}(x_1)\cdot x_1 = -1\cdot 2x_1^4 < 0, \quad x_1 \neq 0,$$

$$f_{22}(x_2)\cdot x_2 = -x_2^2 < 0, \quad x_2 \neq 0.$$

$$\left|\frac{f_{12}(x_2)}{f_{22}(x_2)}\right| = \frac{\mid (\sin x_1)x_2 \mid}{\mid x_2 \mid} \leqslant a_{12} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{f_{21}(x_1)}{f_{11}(x_1)}\right| = \left|\frac{\dfrac{2x_1^4}{1+x_1^2}}{1\cdot 2x_1^3}\right| \leqslant \frac{\mid x_1^3 \mid}{\mid 1\cdot 2x_1^3 \mid} = \frac{1}{1\cdot 2} = a_{21}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\dfrac{1}{1\cdot 2} & 1 \end{pmatrix} \quad 为\ M\ 矩阵.$$

故(5-4)式零解全局稳定.

5.2 一类更特殊的非线性分离变量系统

考虑一类更特殊的非线性变量分离系统：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{5-5}$$

其中 $f_j(0)=0, f_j(x_j)\quad(j=1,2,\cdots,n)$ 连续，保证解的唯一性.

定理 4 若下列条件满足：

1° $f_i(x_i)\cdot x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$;

2° $\int_0^{\pm\infty}f_i(x_i)dx_i=\infty,\quad a_{ii}<0,\quad i=1,2,\cdots,n$;

3° 存在常数 $c_i>0, i=1,2,\cdots,n$，使得矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$ 负定，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}-c_ia_{ii}, & i=j=1,2,\cdots,n;\\ \frac{-1}{2}(c_ia_{ij}+c_ja_{ji}), & i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

则(5-5)式的零解全局稳定.

定理 5 若(5-5)式满足下列条件：

1° $f_i(x_i)x_i>0, a_{ii}<0, i=1,2,\cdots,n$;

2° $\widetilde{A}\ (\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 为 M 矩阵，其中

$$\widetilde{a}_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=1,2,\cdots,n;\\ -\left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right|, & i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

则(5-5)式的零解全局稳定.

5.3 一类可化为变量分离的非线性系统

考虑系统

$$\begin{cases}\frac{dx_i}{dt}=F_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right),\\ F_i(0)=0, y_iF_i(y_i)>0, y_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{5-6}$$

连续，并保证(5-6)式解的唯一性.

定理 6 若(5-6)式满足条件：

1° $\int_0^{\pm\infty}F_i(y_i)dy_i=+\infty\quad(i=1,2,\cdots,n)$;

2° $a_{jj}<0,\quad j=1,2,\cdots,n$，且 $\det A(a_{ij})\neq 0$;

3° 存在 $c_i>0$，使得矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$ 负定，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}-c_i\mid a_{ii}\mid, & i=1,2,\cdots,n,\\ -\frac{1}{2}(c_ia_{ij}+c_ja_{ji}), & i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

则(5-6)式的零解全局稳定.

定理 7　若成立下列条件:

1° $F_i(y_i)y_i > 0, a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n, \det A(a_{ij})_{n\times n} \neq 0$;

2° $\widetilde{A}(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 为 M 矩阵,其中

$$\widetilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1,2,\cdots,n, \\ -\left|\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}\right|, & i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n, \end{cases}$$

则(5-6)式的零解全局稳定.

例 4　考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (-2x_1 - 4x_2)^2 \xlongequal{\text{def}} F_1(-2x_1 - 4x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (8x_1 - 2x_2)^5 \xlongequal{\text{def}} F_2(8x_1 - 2x_2). \end{cases} \tag{5-7}$$

显然(5-7)式满足定理 6 条件 1°,2°,今取

$$c_1 = 2, c_2 = 1, b_{11} = -4, b_{22} = -2,$$

$$b_{12} = b_{21} = -\frac{1}{2}[8-8] = 0,$$

故 $B(b_{ij})$ 负定.从而(5-7)式的零解全局稳定.

5.4　鲁里叶型非线性控制系统

鲁里叶(Lurie)型非线性控制系统为

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \\ \sigma = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j, \end{cases} \tag{5-8}$$

这里

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{b} = \mathrm{col}(b_1, b_2, \cdots, b_n),$$
$$\boldsymbol{c} = \mathrm{col}(c_1, c_2, \cdots, c_n), \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}.$$

令

$$F = \{f \mid f(0) = 0, f(\sigma)\sigma > 0, \sigma \neq 0, f(\sigma) \in C[\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1]\};$$

$$F_{[0,k]} = \{f \mid f(0) = 0, 0 \leqslant \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leqslant k < \infty, f(\sigma) \in C[\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1]\};$$

$$F_{[0,k)} = \{f \mid f(0) = 0, 0 \leqslant \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k < \infty, f(\sigma) \in C[\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1]\}.$$

(5-8)式中,$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是已知的,$f(\sigma) \in F[F_{[0,k]}$ 或 $F_{[0,k)}]$,但是未确切知道的函数.

定义 1　若 $\forall f(\sigma) \in F(F_{[0,k]}$ 或 $F_{[0,k)})$,(5-8)式的零解是全局稳定的,则称(5-8)式的零解是绝对稳定的(在赫尔维茨角域$[0,k]$或$[0,k)$绝对稳定的).

著名的鲁里叶问题提法为:问(5-8)式的零解绝对稳定的充要条件是什么?

对于(5-8)式有以下传统的分类.

(1) 若 A 为赫尔维茨矩阵,则称(5-8)式为直接控制系统;

(2) 若 A 仅有一个零特征值,其他特征值均具有负实部,则称(5-8)式为间接控制系统;

(3) 若 A 无正实部特征值,则称(5-8)式为临界控制系统.

5.4.1 绝对稳定的充分条件——积分项加二次型的 V 函数法

对于直接控制系统(5-8)式,鲁里叶得到:

定理 8 若存在对称正定矩阵 P 和常数 $\beta \geqslant 0$ 且 P 为李雅普诺夫矩阵方程

$$PA + A^{T}P = -B \tag{5-9}$$

的解,此处 B 为给定的 $n \times n$ 正定矩阵,使得

$$V(x) = x^{T}Px + 2\beta\int_{0}^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

沿(5-8)式的解,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5\text{-}8)} = -x^{T}Bx + 2x^{T}(Pb + \beta Ac^{T})xf(\sigma) + 2\beta c^{T}bf^{2}(\sigma) \tag{5-10}$$

是负定的,则(5-8)式的零解绝对稳定.

要验证(5-10)关于 x 为负定,往往是不易的,于是鲁里叶又提出了所谓 S 方法,对于(5-10)式加、减同一项 $2\tau c^{T}x$,则变为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5\text{-}8)} = -x^{T}Bx + 2x^{T}(Pb + \beta Ac^{T} + [c]^{T}xf(\sigma) + 2\beta c^{T}bf^{2}(\sigma) - 2\tau c^{T}xf(\sigma)$$

$$\xlongequal{\text{def}} -S(x,f) - 2\tau\sigma f(\sigma). \tag{5-11}$$

显然,$S(x,f)$ 的正定性,可保证 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5\text{-}8)}$ 的负定性.而前者的正定性的验证有著名的(Selvester)条件.

定理 9 如果存在一个对称正定矩阵 B 和正数 $\beta > 0, \tau > 0$,使得

$$-2\beta c^{T}b > (\beta A^{T}c + Pb + \tau c)^{T}B^{-1}(\beta A^{T}c + b + \tau c),$$

则(5-8)式的零解绝对稳定,其中 P 为李雅普诺夫矩阵方程(5-9)式的解.

定理 10 如果存在一个对称正定矩阵 B 和正数 $\beta > 0, \tau > 0$,使得

$$-\alpha\left(\beta c^{T}b + \frac{2\tau}{k}\right) > (\beta A^{T}c + Pb + \tau c)^{T}B^{-1}(\beta A^{T}c + Pb + \tau c),$$

则(5-8)式的零解在赫尔维茨角域 $[0, k]$ 内绝对稳定.其中 P 为(5-9)式的解.

定理 9 和定理 10,仅仅是定理 8 中 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 负定的充分而不必要的条件.

下列三个条件之一均是(5-10)式负定的等价条件.在(5-10)中取 $\beta = \frac{1}{2}$.

定理 11 下列三个条件,彼此等价,且它的任何一个都是(5-10)式负定的充要条件:

$$1^{\circ}\ c^{T}B^{-1}\eta + \sqrt{c^{T}B^{-1}c c\eta^{T}B^{-1}\eta} + c^{T}b \leqslant 0; \tag{5-12}$$

$$2^\circ\begin{cases} c^{\mathrm T}b+\eta^{\mathrm T}B^{-1}\eta-\dfrac{(c^{\mathrm T}B^{-1}\eta)^2}{c^{\mathrm T}B^{-1}c}\leqslant 0, \\ c^{\mathrm T}B^{-1}\eta\leqslant 0; \end{cases} \tag{5-13}$$

$$3^\circ\begin{cases} \text{当}\quad c^{\mathrm T}x=0,\ u(x)\triangleq x^{\mathrm T}Bx-2\eta^{\mathrm T}x-c^{\mathrm T}b\geqslant 0\text{时}, \\ c^{\mathrm T}B^{-1}\eta\leqslant 0, \end{cases} \tag{5-14}$$

其中
$$\eta=\frac{1}{2}(A^{\mathrm T}c+2Pb).$$

5.4.2　绝对稳定的另一充分条件 - 波波夫(Popov)准则

定理 12　设 A 为赫尔维茨矩阵,如果存在一个实数 q,使得

$$\mathrm{Re}\{(1+\mathrm{i}q\omega)W(\mathrm{i}\omega)\}+\frac{1}{k}>0\qquad(\omega\geqslant 0),$$

则(5-8)式的零解在赫尔维茨角域$[0,k]$内绝对稳定,这里

$$W(\mathrm{i}\omega)\xlongequal{\mathrm{def}}\frac{K(\mathrm{i}\omega)}{D(\mathrm{i}\omega)}=\frac{\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\omega E-A & b\\ c^{\mathrm T} & c\end{bmatrix}}{\mathrm{Det}(\mathrm{i}\omega E-A)}.$$

前人已证明定理 12 和定理 10 等价.

5.4.3　绝对稳定的充要条件及推广的充分条件

定义 2　若

$$V(x)\begin{cases}=0, x\in\Omega,\\ >0, x\in\Omega\end{cases}\quad\left[V(x)\begin{cases}=0 & x\in\Omega,\\ <0 & x\in\Omega\end{cases}\right],$$

则称 $V(x)\in C[\mathbf R^n,\mathbf R^1]$ 关于集合 $\Omega=\{x\mid\sigma=c^{\mathrm T}x=0\}$ 正定[负定].

称 V 关于Ω 为无穷大正定,V 关于Ω 正定,且当 $|\sigma|\to+\infty$ 时,$V(x)\to+\infty$.

定理 13　(5-8)式的零解绝对稳定的充要条件是

1° $[A+bc^{\mathrm T}\theta)\xlongequal{\mathrm{def}}B$ 稳定,其中 $\theta=1$ 或 $\theta=0$;

2° (5-8)式的零解关于集合 Ω 绝对稳定.

定理 14　(5-8)式的零解绝对稳定的充要条件是

1° $B\xlongequal{\mathrm{def}}A+\theta bc^{\mathrm T}$ 稳定,$\theta=1$ 或 $\theta=0$;

2° 存在可微函数 $V(x)\in C[\mathbf R^n,\mathbf R^1]$,$V(0)=0$,满足

$$V(x)\geqslant\varphi(|\sigma|),\text{且}\left.\frac{\mathrm dV}{\mathrm dt}\right|_{(5\text{-}8)}\leqslant\psi(|\sigma|),$$

其中 $\varphi(|\sigma|)\in KR$,$\psi(|\sigma|)\in K$.

定理 15　若下列条件满足:

1° $(A+bc^{\mathrm T}\theta)\xlongequal{\mathrm{def}}B$ 稳定,$\theta=0$ 或 $\theta=1$;

2° 存在对称矩阵 $P_{n\times n}$,常数 $\beta\geqslant 0$ 和 $\alpha>0$,以致 $V(x)=x^{\mathrm T}Px+\beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm d\sigma$ 有估计式

$$x^{\mathrm{T}}Px \geqslant \alpha\sigma^2$$

或

$$V(x) \geqslant \beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \beta > 0, \text{且} \quad \int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma = +\infty;$$

3° $x^{\mathrm{T}}(PA + A^{\mathrm{T}}P)x + (2Pb + \beta A^{\mathrm{T}}c)^{\mathrm{T}}xf(\sigma) + \beta c^{\mathrm{T}}bf^2(\sigma) \leqslant -\varepsilon\tau$,
其中 $\tau \in \{\sigma^2, \sigma f(\sigma), f^2(\sigma)\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$,
则(5-4)式的零解绝对稳定.

定理 15 包含了定理 8、定理 9、定理 10 作为特例.

例 5 考虑系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 + f(x_1 + x_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2 - 2f(x_1 + x_2) \end{cases} \tag{5-15}$$

的零解的绝对稳定性,其中 $f \in F$.

解 (1) 令 $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ 代入(5-15)式,便得到

$$B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

稳定.

(2) 作 $V(x) = (x_1 + x_2)^2$,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5\text{-}15)} = -2(x_1 + x_2)f(x_1 + x_2)$$

关于 $\Omega := \{x \mid \sigma = x_1 + x_2 = 0\}$ 稳定,定理 15 的全部条件满足.从而(5-15)的零解是绝对稳定的.

例 6 考虑系统

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(x_1 + x_2 + x_3) \tag{5-16}$$

的零解的绝对稳定性,$f \in F$.

容易验证

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

稳定.作 $V = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5\text{-}16)} \leqslant -2(x_1 + x_2 + x_3)f(x_1 + x_2 + x_3),$$

它关于　$\Omega = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ 负定.定理 15 条件全满足,故(5-16)式的零解绝对稳定.

例 7　考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = 0x_1 + x_2 - f(x_1 - x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 0x_2 + f(x_1 - x_2)\end{cases} \tag{5-17}$$

的零解的绝对稳定性,$f \in \boldsymbol{F}$.

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$有一对纯虚特征值,故(5-17)式既不是直接控制系统,也不是间接控制系统,而是更复杂的临界系统.

令　$f(x_1 - x_2) = x_1 - x_2$　代入(5-17)式得到

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

稳定.作　$V = \dfrac{1}{2}(x_1{}^2 + x_2{}^2)$,则

$$\left.\frac{dV}{dt}\right| = -(x_1 - x_2)f(x_1 - x_2),$$

它关 $\Omega = \{x \mid x_1 - x_2 = 0\}$ 负定,从而(5-17)式的零解绝对稳定.

例 8　考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = 0x_1 + x_2 - f(\sigma);\\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - \sigma x_2 + f(\sigma);\quad \rho > 0, f(\sigma) \in \boldsymbol{F}.\\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 - \rho f(\sigma),\end{cases} \tag{5-18}$$

这里 $\rho > 0, f \in \boldsymbol{F}$,且$\displaystyle\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)d\sigma = +\infty$.

注意此处 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$不稳定,故传统方法失效.

令 $f(\sigma) = \sigma$ 代入(5-18)式得

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\rho \end{bmatrix},$$

易证 $\boldsymbol{B}$ 为稳定.

作 $V = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \displaystyle\int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma$,有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(5\text{-}18)} = -\rho f^2(\sigma) < 0, \text{当 } \sigma \neq 0 \text{ 时},$$

故(5-18)式的零解绝对稳定.

5.4.4　第一标准型的简便代数判据

考虑控制系统的第一标准型：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\rho_i x_i+f(\sigma),i=1,2,\cdots,n, \tag{5-19}$$

其中 $\rho_i>0,\sigma=c^{\mathrm{T}}x=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i,f\in F_{[0,k]}$.

不妨设

$$c_i\begin{cases}<0 & i=1,2,\cdots,i_1,\\ =0 & i=i_1+1,\cdots,i_2,\quad 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n.\\ >0 & i=i_2+1,\cdots,n,\end{cases}$$

定理 16　若 $\rho_i>2k(n-i_2)c_i\quad(i=i_2+1,\cdots,n)$ 则(5-19)式的零解在赫尔维茨角域[0, k]内绝对稳定.

特别地若 $c_i\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,则定理 16 结论成立.

定理 17　若 $c_i<0\quad(i=1,2,\cdots,n)$,则(5-19)式的零解绝对稳定.

定理 18　若 $\rho_i>0(i=1,2,\cdots,n-1),\rho_n=0,c_n<0$,且

$$c_i<\frac{\rho_i}{2k(n-1)}\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

则(5-19)式的零解在[0 k]内绝对稳定.

推论 1　若 $\rho_i>0(i=1,2,\cdots,n-1),\rho_n=0,c_n<0$,且

$$c_i\leqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

则(5-19)式的零解在[0 k]内绝对稳定.

推论 2　若 $\rho_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\rho_n=0,c_i<0(i=1,2,\cdots,n)$,则(5-19)式的零解绝对稳定.

5.4.5　第二标准型的简便代数判据

控制系统第二标准型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\rho_i x_i+\sigma;\\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j-P\sigma-rf(\sigma),\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{5-20}$$

这里 $f(\sigma)\in F,p>0,r>0,\rho_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 均为常数.

定理 19　若

$$p\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+\operatorname{sign}\beta_i}{2}\right)\frac{\beta_i}{\rho_i},$$

则(5-20)式的零解绝对稳定.

例 9　考虑下列飞机纵向运动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i x_i + \sigma, \quad i = 1,2,3,4, \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{4} \beta_j x_j - rp_2\sigma - f(\sigma), \end{cases}$$

这里 $rp_2 > 0, \rho_i > 0, f(\sigma) \in F$. 显然它是(5-20)式的特例,从而若

$$rp_2 \geqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{1 + \mathrm{sign}\beta_i}{2} \frac{\beta_i}{\rho_i},$$

则飞机纵向运动方程的平衡位置 $x_i = \sigma = 0 (i = 1,2,3,4)$ 是绝对稳定的.

5.5 霍普费德神经网络系统

霍普费德(Hopfield) **神经网络系统为**

$$C_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} V_j - \frac{u_i}{R_i} + I_i, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{5-21}$$

其中 C_i 为电容, R_i 为电阻, I_i 为电流, u_i 为电压, T_{ij} 为神经元之间的联结强度, $V_i = g_i(u_i)$ 为单调函数.

5.5.1 霍普费德意义下的稳定性

定义 3 设 E 为(5-21)式的平衡点集,若 E 是吸引的,称(5-21)式在霍普费德意义下是稳定的,简称为 ***H*** **稳定**.

H 稳定与李雅普诺夫稳定性的区别是显然的.下面给出(5-21)式 H 稳定的条件.

定理 20 若存在常数 $\beta_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 使得矩阵 $(\beta_i T_{ij})_{n\times n}$ 是对称的,则(5-21)式是 H 稳定的.

推论 3 若 $(T_{ij})_{n\times n}$ 是对称的,则(5-21)式是 H 稳定的.

例 10 考虑神经网络:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{5-22}$$

权矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 非对称,若取 $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1$,则

$$(\beta_i T_{ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

是对称的,故(5-22)式是 H 稳定的.

例 11 考虑一个 3 维神经网络

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}. \tag{5-23}$$

取 $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 4$,则

$$(\beta_i T_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

为对称矩阵,从而(5-23)式是 H 稳定.

设 $g_i'(u_i)$ 存在,令 $\gamma_i = \dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$,则(5-21)式化为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma_i}{C_iR_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{ij}}{C_i} g_j'(u_j)\gamma_j. \tag{5-24}$$

令
$$\underline{T}_{ij} = \inf_{u_j \in \mathbf{R}^1} \left\{ \frac{T_{ij}}{c_i} g_i'(u_j) \right\}, \quad \overline{T}_{ij} = \sup_{u_i \in \mathbf{R}^1} \left\{ \frac{T_{ij}}{c_i} g_i'(u_i) \right\}.$$

定理 21　设

$$\frac{1}{C_iR_i} + \overline{T}_{ii} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,n;$$

$$B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \left(\frac{1}{C_iR_i} - \overline{T}_{ii} \right) - (1-\delta_{ij}) \max\{ |\underline{T}_{ij}|, |\overline{T}_{ij}| \}_{n\times n} \right\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{b_{ij}\}_{n\times n}$$

为一 M 矩阵,则(5-21)式是 H 稳定的.

例 12　考虑网络:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -u_1 + T_{11}g_1(u_1) + T_{12}g_2(u_1) + I_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -u_2 + T_{21}g_1(u_2) + T_{22}g_2(u_2) + I_2. \end{cases} \tag{5-25}$$

设　$C_i = \dfrac{1}{2}, R_i = \dfrac{1}{3}(i = 1,2), \overline{T}_{ii} = 2, \underline{T}_{ii} = -2(i = 1,2)$,

$$\underline{T}_{12} = -3.5, \overline{T}_{12} = -3, \overline{T}_{21} = 4,$$

$$B \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{c_1R_1} - \overline{T}_{11} & -\max(|\underline{T}_{12}|, |\overline{T}_{12}|) \\ -\max(|\underline{T}_{21}|, |\overline{T}_{21}|), & \dfrac{1}{c_2R_2} - \overline{T}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3.5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

显然它是 M 矩阵,故(5-25)式是 H 稳定的.

定理 22　令

$$b_{ii} = \frac{1}{c_iR_i} - \overline{T}_{ii}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

$$b_{ij} = \max_{i\neq j}\left[\left| \frac{\underline{T}_{ii} + \underline{T}_{ij}}{2} \right|, \left| \frac{\overline{T}_{ij} + \overline{T}_{ji}}{2} \right| \right], \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

若 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 正定,则(5-21)式 H 稳定.

例 13　考虑一个三维网络:

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R_i}u_i+\sum_{j=1}^{3}T_{ij}g_j(u_j)+I_i,\quad i=1,2,3. \tag{5-26}$$

设

$$C_i=\frac{1}{2},R_i=\frac{1}{2},\overline{T}_{ii}=1,i=1,2,3.$$
$$\underline{T}_{12}=-1,\underline{T}_{21}=-2,\overline{T}_{12}=2,\overline{T}_{21}=1,$$
$$\underline{T}_{13}=\underline{T}_{31}=-1.4,\overline{T}_{13}=\overline{T}_{31}=1,$$
$$\underline{T}_{23}=\underline{T}_{32}=-1.2,\overline{T}_{23}=\overline{T}_{32}=1.3.$$
$$\boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix}3&1.5&1.4\\1.5&3&1.3\\1.4&1.3&3\end{bmatrix}$$

是正定的，故(5-26)式H稳定.

改写(5-21)式为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i}{C_iR_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_j+\frac{I_i}{C_i}:=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{5-27}$$

令

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial u_n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial f_n}{\partial u_1}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial u_n}\end{bmatrix}.$$

定理 23　若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{p}=(p_{ij})_{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{Q}\xlongequal{\text{def}}(\boldsymbol{PJ}+\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$$

负定，则(5-27)式H稳定.

推论 4　若$(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})$负定，则(5-27)式H稳定.

推论 5　若

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{C_iR_i}+\dfrac{T_{ii}}{C_i}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i}<0;\\\partial\left(\dfrac{1}{C_iR_i}-\dfrac{T_{ii}}{C_i}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i}\right)>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\dfrac{T_{ij}}{C_i}\dfrac{\partial g_j}{\partial u_j}+\dfrac{T_{ji}}{C_j}\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i}\right|,\quad i=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

则(5-27)式H稳定.

5.5.2　李雅普诺夫意义下的稳定性

设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*=\mathrm{col}(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$ 是(5-21)式的平衡位置.

定理 24　若存在正定矩阵 $P=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)>0$，使得　$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PT}$ 半负定，此处 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 为转置矩阵，则 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是全局稳定的.

推论 6　若下列条件之一满足：

1° $T = T^{\mathrm{T}}$ 且半负定；

2° $T + T^{\mathrm{T}}$ 半负定；

3° T 反对称，

则 $u = u^*$ 全局稳定.

推论 7 若 $T_{ii} < 0$, $i = 1,2,\cdots,n$. 且 $(-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|$ 为一个赫尔维茨矩阵，则 $u = u^*$ 是全局稳定的.

定理 25 若下列条件之一满足：

1° 存在常数 $\xi_i > 0$ $i = 1,2,\cdots,n$，使得

$$\xi_j T_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \xi_i |T_{ij}| \leqslant 0;$$

2° $T_{ii} + \sum\limits_{\substack{i=1\\j\neq i}}^{n} |T_{ij}| \leqslant 0$,

则 $u = u^*$ 全局稳定.

注 2 定理25的条件比定理24的条件更弱，但验证定理24的条件更方便.

定理 26 令

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{T_{ii}}{C_i}\dfrac{\partial g_i(u_i)}{\partial u_i}\Bigg|_{u=u_i^*} - \dfrac{1}{c_iR_i}, & i = j = 1,2,\cdots,n; \\ \dfrac{1}{C_i}T_{ij}\dfrac{\partial g_j(u_j)}{\partial u_j}\Bigg|u_j = u_j^*, & i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

若 $((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$ 为一个赫尔维茨矩阵，则有

1° 当 $b_{ii} < 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 时，$u = u^*$ 是稳定的；

2° 当 $b_{i_0i_0} > 0(\exists\, i_0 \in \{1,2,\cdots,n\})$ 时，$u = u^*$ 是不稳定的.

5.6 一般生态系统

考虑一般生态系统：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x_i)\left[b_i(x_i) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_j(x_j)\right], \tag{5-28}$$

这里 $a_i(x_i), b_i(x_i), d_i(x_i)$ 均是 $\mathbf{R}^+$ 上的连续函数，且当 $x_i > 0$ 时 $a_i(x_i) > 0$，而 c_{ij} 为常数.

系统(5-28)式包含了许多生态系统(如罗特卡-沃尔泰拉(Lotka-Volterra)生态系统，基尔平(Gilpin)，亚拉(Ayala)竞争生态模型)以及许多神经网络作为特例.

基于生态学意义，仅在 $\mathbf{R}_+^n = \{x \mid x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$ 内考虑问题.

设 $x = x^* > 0$(即 $x_i^* > 0, i = 1,2,\cdots,n$) 为系统(5-28)式的平衡位置，并记为 $x = x^* \in \mathbf{R}_+{}^n$.

定义 4 如果存在正定矩阵 $P = \mathrm{diag}(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 使得 $PC + C^{\mathrm{T}}P$ 半负定(负定)，则称实矩阵 C 为拟 L-V 稳(L-V 稳).

L-V 稳定为李雅普诺夫-沃尔泰拉稳定的简称.

5.6.1 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内的全局稳定性

定义 5 若1° $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得 $\forall \in \mathbf{R}_+^n$,且 $\| x_0 - x^* \| < \delta$ 时,有 $\| x(t, t_0, x_0) - x^* \| < \varepsilon (t \geqslant t_0)$;

2° $\forall x_0 \in \mathbf{R}_+^n$,有

$$\lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = x^*,$$

则称 $x = x^* \in \mathbf{R}_+^n$ 内是全局稳定的.

定理 27 若(5-28)式满足下列条件:

1° 当 $x_j \neq x_j^*$ 时,有

$$\begin{cases} (d_j(x_j) - d_j(x_j^*))(x_j - x_j^*) > 0; \\ (b_j(x_j) - b_j(x_j^*))(x_j - x_j^*) < 0, \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n;$$

2° 当 $x_j \to 0$ 或 $x_j \to +\infty$ 时,有

$$\int_{x_j^*}^{x_j} (d_j(x_j) - d_j(x_j^*)) \frac{\mathrm{d}x_j}{Q_j(x_i)} \to +\infty;$$

3° 矩阵 $-C$ 为拟 L-V 稳定的,

则 $x = x^*$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局稳定.

下列四个条件之一成立可保证定理 27 的条件成立.

1° $-C$ 为 L-V 稳定;

2° $C + C^{\mathrm{T}}$ 半正定;

3° C 为对称半正定;

4° C 为反对称阵.

定理 28 若(5-28)式满足

1° 定理 27 条件 1°;

2° $c_{ii} > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,且 $((-1)^{\delta_{ij}} | c_{ij} |)_{n \times n}$ 为赫尔维茨矩阵,

则 $x = x^* \in \mathbf{R}_+{}^n$ 在 $\mathbf{R}_+{}^n$ 内绝对稳定.

例如下列条件之一成立可保证定理 28 的条件 2° 成立.

1° $c_{jj} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} | c_{ij} |, \quad j = 1,2,\cdots,n;$

2° $c_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | c_{ij} |, \quad j = 1,2,\cdots,n;$

3° $c_{ii} > 0$ 且 $\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{(1 - \delta_{ij}) c_{ij}}{c_{ii}} \right)^2 < 1, \quad i = 1,2,\cdots,n;$

4° $c_{ii} > \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (| c_{ij} | + | c_{ji} |), \quad j = 1,2,\cdots,n.$

定理 29 若(5-28)式满足

1° 定理39的条件1°，且 $c_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$；

2° 当 $x_j\to 0^+$ 或 $x_j\to+\infty$ 时，有

$$\int_{x_j^*}^{x_j}(b_j(x_i)-b_j(x_j^*))\frac{\mathrm{d}x_j}{a_j(x_i)}\to+\infty;$$

3° 存在常数 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得矩阵 $G=(g_{ij})_{n\times n}$ 半负定，这里

$$g_{ij}=\begin{cases}a_i & (i=j=1,2,\cdots,n),\\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{c_ic_{ij}(d_j(x_j)-d_j(x_j^*))}{b_j(x_j)-b_j(x_i^*)}+\dfrac{c_ic_{ji}(d_i(x_i)-d_i(x_i^*))}{b_i(x_i)-b_i(x_i^*)}\right] & (i\neq j),\end{cases}$$

则(5-28)式的 $x=x^*$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局稳定.

定理30 若(5-28)式满足

1° 定理27的条件1°成立；

2° 存在常数 a_{ij} $i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，使得

$$\left|\frac{c_{ij}(d_j(x_j)-d_j(x_j^*))}{b_j(x_j)-b_j(x_j^*)}\right|\leqslant a_{ij},\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n;$$

3° 存在常数 $\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\alpha_j-\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\alpha_i a_{ij}\geqslant 0,$$

则 $x=x^*\in\mathbf{R}_+^n$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局稳定.

定理31 若(5-28)式满足

1° 定理27的条件1°成立；

2° 存在常数 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$a_jc_{jj}-\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_i|c_{ij}|\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

则 $x=x^*$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内全局稳定.

例14 考虑三种群模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1(2.5-2x_1-x_2+x_3);\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2(4.5-x_1-3x_2-x_3);\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_3(-1+x_1+x_2-2x_3).\end{cases}\tag{5-29}$$

其平衡位置为 $x_1^*=x_2^*=1, x_3^*=0.5$. 应用定理5.27可验证此例平衡位置在 $\mathbf{R}_+^3$ 内全局稳定.

例15 考虑 n 维基尔平和亚拉竞争模型：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=r_ix_i\Big[1-(x_i/k_i)^{\theta_i}-\sum_{j\neq i}^{n}a_{ij}(x_j/k_j)\Big],\tag{5-30}$$

$$k_i>0, r_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

设有正的平衡点为$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$.

若 $\theta_i \geq 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$,令

$$b_{ii} = (x_i^*/k_i)^{\theta_i - 1} \qquad i = 1,2,\cdots,n,$$
$$b_{ij} = a_{ij} \qquad i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n.$$

如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$,使得矩阵 $\boldsymbol{PB} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 正定,则(5-30)式的平衡位置$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 内绝对稳定.

例 16 考虑另一个 n 种群的生态模型:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = r_i x_i \left[1 - \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(x_j/k_j)^{\theta_i}\right] \quad (r_i > 0), i = 1,2,\cdots,n, \tag{5-31}$$

这里 $\theta_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n), x = x^* > 0$ 为一平衡位置.

若存在 $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n) > 0$,使得 $PE + EP > 0$,

则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ 在 $\mathbf{R}_+{}^n > 0$ 全局稳定.

参 考 文 献

1 Ляпунов АМ. оъщад зауаиа оъ устоййцвости 1959.

2 秦元勋,王联等.运动稳定性理论和应用.北京:科学出版社,1981.

3 许淞庆.常微分方程稳定性,上海:上海科技出版社.1962.

4 黄琳.稳定性理论.北京:北京大学出版社,1992.

5 廖晓昕.稳定性的数学理论与应用.武汉:华中师范大学出版社,1988.

6 廖晓昕.李立鹏.邹应泽.动力系统的稳定性.武汉:华中理工大学出版社,1983.

·近代数学卷·

第 11 篇

常微分方程的几何理论

编　者　孙建华
审校者　李伟固

目　录

引　言

常微分方程的几何理论(或定性理论)通过微分方程直接研究和判断其解的性质,在常微分方程研究中具有独到的功能.

一百多年来,由庞加莱(Henri Poincaré)开创的这一理论得到了蓬勃的发展,已成为从事许多学科和尖端技术,诸如自动控制、航天技术、生物科学和经济学等研究的不可缺少的数学工具;其思想与技巧已逐渐渗透到其他数学分支,对于诸如线性代数、李(Lie)群理论、泛函分析和量子力学等学科的发源具有重大的意义.

迄今为止,这一理论仅对平面系统发展得比较完整.特别是,以叶彦谦教授为首的中国学派所建立的平面二次系统的几何理论处于国际领先水平.但这一理论的最新发展表明,正如常微分方程的显式求积一般是不可能的一样,对高维相空间的一般微分方程的定性研究也是不可能的.尽管如此,由于计算机技术的迅速发展,给常微分方程的几何理论研究提供了有力的辅助工具,同时定性理论分析往往给这一工具的使用提供重要的理论依据.

1　常微分方程解的一般性质

1.1　解的存在唯一性

1.1.1　柯西问题解的概念

给定常微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{1-1}$$

其中 $t\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}^n, f: G\to\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量值函数,而 $G\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 为某一区域.

如果存在 t 的区间 I 以及可微向量函数 $\varphi: \mathrm{I}\to\mathbf{R}^n$,使得当 $t\in\mathrm{I}$ 时满足

1° $(t,\varphi(t))\in G$;

2° $\dot{\varphi}(t)=f(t,\varphi(t))$,

则向量函数 $\varphi(t)$ 称为方程组(1-1)在 I 上的一个解.

设 (t_0,x_0) 为 G 中一个给定的点.方程(1-1)的**柯西(Cauchy)问题或初值问题**就是找到包含 t_0 的 t 区间 I 上的一个解 $\varphi(t)$ 使得 $\varphi(t_0)=x_0$.

1.1.2　解的存在唯一性

考虑柯西问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1-2}$$

定理 1(柯西-佩亚诺(Cauchy-Peano)定理)　设 $f(t,x)$ 在区域 $G: |t-t_0| \leqslant a$, $|x-x_0| \leqslant b$ 上连续,则柯西问题(1-2)在区间 $|t-t_0| \leqslant h$ 上存在解 $x=\varphi(t)$,其中 $h = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max\limits_{G} |f(t,x)|$.

定理 2(皮卡 G - 林德勒夫(Picard-Lindelöf)定理)　设 $f(t,x)$ 在区域 $G: |t-t_0| \leqslant a, |x-x_0| \leqslant b$ 上连续,且关于 x 满足**利普希茨(Lipschitz)条件**:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|,$$
$$\forall (t,x_i) \in G, \quad i=1,2.$$

其中 $L>0$ 称为利普希茨常数,则柯西问题(1-2)在区间 $|t-t_0| \leqslant h$ 上存在唯一的解 $x=\varphi(t)$,其中 $h=\min(a,\frac{b}{M})$, $M=\max\limits_{G}|f(t,x)|$.

1.2　解的延拓

1.2.1　延拓的概念

设 $\varphi(t)$ 是方程(1-1)在区间 I 上的解. 如果 $\psi(t)$ 也是方程(1-1)在区间 J 上的解, J⊃I 且在 I 上 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 相等,则称 $\psi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的一个**延拓**. 如果解 $\varphi(t)$ 没有延拓,则称 $\varphi(t)$ 是不可延拓的,并称区间 I 是**解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间**.

如果对任意给定的点 $A(t_0,x_0) \in G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$,都存在闭有界集 U, $A \in U$,使得 $f(t,x)$ 在 U 中关于 x 满足利普希茨条件,则称 $f(t,x)$ 在 G 上对 x 满足**局部利普希茨条件**.

1.2.2　延拓定理

定理 3　设 $f(t,x)$ 在区域 G 内有界,且对 x 满足局部利普希茨条件. 若柯西问题(1-2)的解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间为 $\alpha<t<\beta$,则极限

$$\varphi(\alpha+0) = \lim_{t \to \alpha+0} \varphi(t), \quad \varphi(\beta-0) = \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t)$$

存在,且 $(\alpha, \varphi(\alpha+0))$ 与 $(\beta, \varphi(\beta-0))$ 是 G 的边界点.

定理 4　设 $f(t,x)$ 在区域 G 上连续,且对 x 满足局部利普希茨条件,则柯西问题(1-2)的解可延拓到 G 的边界(也许是∞).

定理 5　设 $f(t,x)$ 在区域 G 上连续. 若柯西问题(1-2)的解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间为 $\alpha<t<\beta$,则当 $t \to \beta-0$ $(t \to \alpha+0)$ 时或 $\overline{\lim}|\varphi(t)| = \infty$,或 $\lim d(t) = 0$,其中 $d(t)$ 表示点 $(t,\varphi(t))$ 到 G 的边界的距离.

定理 6　设 $f(t,x)$ 对一切 t,x 连续,且对 x 满足局部利普希茨条件,又设 $|f(t,x)| \leqslant N|x|$,其中常数 $N>0$,则柯西问题(1-2)的所有解的存在区间为 $(-\infty,\infty)$.

定理 7 (温特纳(Wintner)定理)　设 $f(t,x)$ 对一切 t,x 连续,且对 x 满足局部

利普希茨条件.又设

$$|f(t,x)|\leq L(r),\quad r=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2},$$

其中 $L(r)$ 在 $r>0$ 时为正,且

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{1}{L(r)}\mathrm{d}r=+\infty\,(\alpha>0),$$

则柯西问题(1-2)的解的存在区间为 $(-\infty,\infty)$.

1.3　解对参数和初值的连续性与可微性

考虑含参数柯西问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x,u);\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{1-3}$$

其中 $(t,x)\in G\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, $u\in D\subset\mathbf{R}^m$ 为参数向量.如对任意的 $(t_0,x_0,u)\in G\times D$,柯西问题(1-3)存在解,则该解应为 t 及初值 (t_0,x_0)、参数 u 的函数,记为 $x=\varphi(t;t_0,x_0,u)$.

1.3.1　解对参数与初值的连续性

定理 8　设 $f:G\times D\to\mathbf{R}^n$ 连续,关于 x 满足局部利普希茨条件,且利普希茨常数与参数 u 无关,则柯西问题(1-3)存在唯一的解 $x=\varphi(t;t_0,x_0,u)$,对所有的 $u\in D$.进而解 $\varphi(t;t_0,x_0,u)$ 在其定义域内关于 t_0,x_0,u 连续.

1.3.2　解对参数与初值的可微性

定理 9　设 $f(t,x,u)$ 关于 x,u 一阶连续可微,则柯西问题(1-3)的解 $\varphi(t;t_0;x_0,u)$ 在定义域内关于 t,t_0,x_0,u 连续可微.此外,矩阵 $\partial\varphi(t;t_0,x_0,u)/\partial u$ 满足 $\partial\varphi(t_0;t_0,x_0,u)/\partial u=0$ 以及矩阵微分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial f(t,\varphi(t;t_0,x_0,u),u)}{\partial x}y+\frac{\partial f(t,\varphi(t;t_0,x_0,u),u)}{\partial u}.$$

矩阵 $\partial\varphi(t;t_0,x_0,u)/\partial x_0$ 满足 $\partial\varphi(t_0;t_0,x_0,u)/\partial x_0=E$(单位方阵)以及线性变分方程

$$\dot{y}=\frac{\partial f(t,\varphi(t;t_0,x_0,u),u)}{\partial x}y.$$

并且,

$$\frac{\partial\varphi(t;t_0,x_0,u)}{\partial t_0}=-\frac{\partial\varphi(t;t_0,x_0,u)}{\partial x_0}\cdot f(t_0,x_0,u).$$

1.4　平面自治系统轨线的性质

1.4.1　动力系统的一般概念

考虑微分方程(1-1)

$$\dot{x}=f(t,x),$$

其中 $t\in\mathbf{R},x\in G\subset\mathbf{R}^n,f:\mathbf{R}\times G\to\mathbf{R}^n$. 当方程(1-1)描写质点运动时，$t$ 代表时间，$\dot{x}$ 代表速度向量；$\mathbf{R}^n$ 称为**相空间**；方程(1-1)的解 $x=\varphi(t)$ 代表质点的运动. 如果方程(1-1)中的函数 f 不依赖于 t，即

$$\dot{x}=f(x),\tag{1-4}$$

则称为**自治系统**，否则称为**非自治系统**.

设(1-4)式中的 $f(x)$ 在 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上连续，且满足解的唯一性条件. 如令 $\varphi(p,t)$ 表示自治系统(1-4)的当 $t=0$ 时过点 p 的解，且设 $\varphi(p,t)$ 的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$，则对每个固定的 t，$\varphi(p,t)$ 定义了区域 G 到 G 自身的变换 $\boldsymbol{\varphi}:G\times\mathbf{R}\to G$. 变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 具有下列性质：

1° $\boldsymbol{\varphi}(p,0)=p$；

2° $\boldsymbol{\varphi}(p,t)$ 对 p,t 一并连续；

3° $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(p,t_1),t_2)=\boldsymbol{\varphi}(p,t_1+t_2)$，

即变换的全体 $\{\varphi(\cdot,t)\mid -\infty<t<+\infty\}$ 组成从 G 到 G 的单参数连续变换群. 这些变换的全体称为一个**动力系统**. 有时也把(1-4)式称为动力系统.

对固定的 p，$\varphi(p,t)$ 称为过 p 的**运动**. 集合 $\varphi(p,I)=\{\varphi(p,t)\mid -\infty<t<+\infty\}$ 称为运动 $\varphi(p,t)$ 的**轨线**. 集合 $\varphi(p,I^+)=\{\varphi(p,t)\mid 0\leqslant t<+\infty\}$ 和集合 $\varphi(p,I^-)=\{\varphi(p,t)\mid -\infty<t\leqslant 0\}$ 分别称为**正半轨线**和**负半轨线**.

定义 1(奇点)　若 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 满足 $f(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 称为方程(1-4)的一个**奇点**.

定义 2(周期运动)　若存在 $T>0$，使得对一切 t，有

$$\boldsymbol{\varphi}(p,t+T)=\boldsymbol{\varphi}(p,t),$$

则 $\varphi(p,t)$ 称为**周期运动**，其中最小的正实数 T 称为周期运动 $\varphi(p,t)$ 的**周期**.

定义 3(极限集)　如果存在时间序列 $t_n\to+\infty(-\infty)$，$n\to+\infty$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(p,t_n)=q,$$

则点 q 称为 $\varphi(p,t)$ 的 **$\omega(\alpha)$ 极限点**；$\varphi(p,t)$ 的所有 $\omega(\alpha)$ 极限点的全体称为 **$\omega(\alpha)$ 极限集**，记为 $\Omega_p(A_p)$.

定义 4(不变集)　如果对一切 $t\in(-\infty,+\infty)$，集合 A 满足 $\boldsymbol{\varphi}(A,t)=A$，其中 $\boldsymbol{\varphi}(A,t)=\{\boldsymbol{\varphi}(p,t)\mid p\in A\}$，则称 A 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 的**不变集合**.

定理 10(极限集的性质)　极限集 Ω_p 为闭、不变集合；如 $\varphi(p,I^+)$ 有界，则 Ω_p 连通. 极限集 A_p 亦有类似性质.

定义 5(轨线分类)　按 $\Omega_p(A_p)$ 的性质，可将动力系统(1-4)的轨线分成三大类.

1° 如 $\Omega_p(A_p)=\varnothing$，则 $\varphi(p,I)$ 称为正(负)向远离轨线；既正向又负向远离的轨

线称为远离轨线.

2° 如$\Omega_p(A_p)\neq\varnothing$,但$\Omega_p\cap\varphi(p,I^+)=\varnothing(A_p\cap\varphi(p,I^-)=\varnothing)$,则$\varphi(p,I)$称为正(负)向渐近轨线;既正向又负向的渐近轨线称为渐近轨线.

3° 如$\Omega_p\cap\varphi(p,I^+)\neq\varnothing(A_p\cap\varphi(p,I^-)\neq\varnothing)$,则$\varphi(p,I)$称为正(负)向泊松(Poisson)稳定轨线,简称$p^+(p^-)$稳定轨线;既正向又负向泊松稳定的轨线称为泊松稳定轨线,简称为p式稳定轨线.

1.4.2 平面自治系统轨线的性质

设自治系统(1-4)的相空间为欧氏平面$\mathbf{R}^2$.函数$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$连续,且满足数值问题解的唯一性条件.又不妨设方程(1-4)的每个解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$,则方程(1-4)在$\mathbf{R}^2$上定义了一个动力系统.

由解的存在唯一性和约当(Jordan)定理可推得平面自治系统(1-4)轨线的以下性质.

定理 11 方程(1-4)的所有奇点组成闭集.

定理 12 设$\varphi(p,I)$是方程(1-4)的$p^+(p^-)$稳定轨线,则$\varphi(p,I)$是奇点或闭轨线.

定理 13 如L为闭轨线,$L\in\Omega_p(A_p)$,则$\Omega_p=L(A_p=L)$.

定理 14 若$\Omega_p(A_p)$有界非空,且不包含奇点,则$\Omega_p(A_p)$必为闭轨线.

定理 15 在平面上任何闭轨线L所包围的区域中必有奇点.

定理 16(庞加莱-本迪克松(Poincare'-Bendixson)定理) 设D是由两条单闭曲线L_1和L_2所包围的环域,并且在D内无奇点;又设当t增加时从L_1,L_2上出发的轨线都进入(或都离开)D,则在D内存在闭轨线L,其相对位置是$L_1\subset L\subset L_2$.

定理 17 设D是由两条闭轨线$L_1\subset L_2$所围成的区域,D中无奇点也无其他闭轨线,则对一切$p\in D$,必有$\Omega_p=L_1,A_p=L_2$(或者$\Omega_p=L_2,A_p=L_1$).

2 平面奇点

2.1 线性系统的奇点

给定常系数线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by;\\ \dot{y}=cx+dy,\end{cases}\tag{2-1}$$

其中a,b,c,d为实常数,令

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

并记A的特征值为λ_1,λ_2.设$\det A\neq0$,则原点O为(2-1)式的唯一奇点.此时,称原

点 O 为(2-1)式的初等奇点．关于系统(2-1)的初等奇点 O 的类型以及 O 邻近的轨线结构，按 A 的特征值 λ_1,λ_2 的不同情形，有下述结果：

情形1　λ_1,λ_2 为实数，$\lambda_2<\lambda_1$．设 A 对应于特征值 λ_1、λ_2 的单位特征向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，而 L_1,L_2 为过原点且分别包含特征向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 的直线．

1° $\lambda_2<\lambda_1<0$(稳定结点)　存在奇点 O 的一个邻域，其中一切轨线当 $t\to+\infty$ 时均趋向原点；除 L_2 上的轨线外，其他所有轨线均切于 L_1 进入原点．此时奇点 O 称为**稳定结点**．见图2-1．

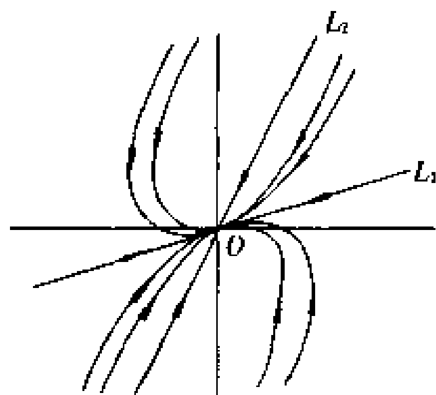


图2-1

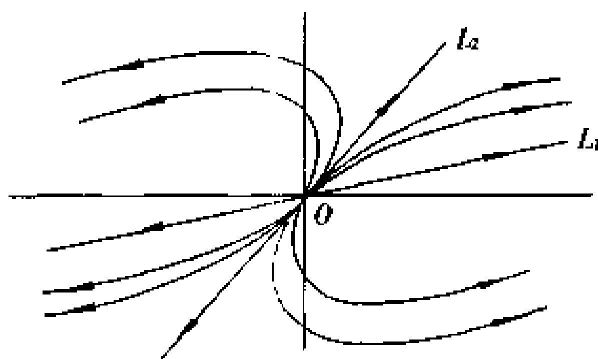


图2-2

2° $0<\lambda_2<\lambda_1$(不稳定结点)　存在奇点 O 的一个邻域，其中一切轨线当 $t\to-\infty$ 时均趋于原点；除 L_1 上的轨线外，其他所有轨线均切于 L_2 进入原点．此时原点 O 称为**不稳定结点**．见图2-2．

3° $\lambda_2<0<\lambda_1$(鞍点)　存在奇点 O 的一个邻域，L_2 上的轨线当 $t\to+\infty$ 时趋于原点；L_1 上的轨线当 $t\to-\infty$ 时趋于原点；而其他轨线均为无界，且以 L_1,L_2 为渐近线．此时，奇点 O 称为鞍点．见图2-3．

情形2　λ_1,λ_2 为复数．因 A 为实矩阵，故必有 $\lambda_1=\overline{\lambda}_2=\alpha+\mathrm{i}\beta$，其中 α,β 为实数，$\beta>0$．从而对应的特征向量必有 $\boldsymbol{v}_1=\overline{\boldsymbol{v}}_2=\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为实向量，且 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线性无关．记 U,V 为过原点且分别包含向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的直线．

1° $\alpha=0$(中心)．轨线是一簇围绕奇点 O 的封闭曲线．如 U,V 相互正交，这些曲线是中心在原点的椭圆．此时，奇点 O 称为**中心**．见图2-4．

2° $\alpha<0$(稳定焦点)．每一条轨线都在 $t\to+\infty$ 时绕原点 O 作无数次的旋转而进入它．此时，奇点 O 称为**稳定焦点**．见图2-5．

3° $\alpha>0$(不稳定焦点)．每一条轨线都在 $t\to-\infty$ 时绕奇点 O 作无数次的旋转而进入它．此时，奇点 O 称为不稳定焦点．见图2-6．

情形3　$\lambda_1=\lambda_2$(非正常结点)．如果 A 对应于重特征值 λ_1 有两个线性无关的特征向量，则所有轨线为通过原点的直线．此时，初等奇点 O 当 $\lambda_1<0(>0)$ 时，称为稳定的(不稳定的)**临界结点或星形结点**．见图2-7．如果 A 对应于重特征值 λ_1 仅有一个线性无关的特征向量，则对 $\lambda_1<0(>0)$ 时，所有轨线当 $t\to+\infty$ ($t\to$

$-\infty$)时,均切于 L_1 进入原点.此时,奇点 O 当 $\lambda_1<0(>0)$时称为**稳定的**(**不稳定的**)**退化结点**,或**单向结点**.见图 2-8.以上两情形下,奇点 O 统称为**非正常结点**.

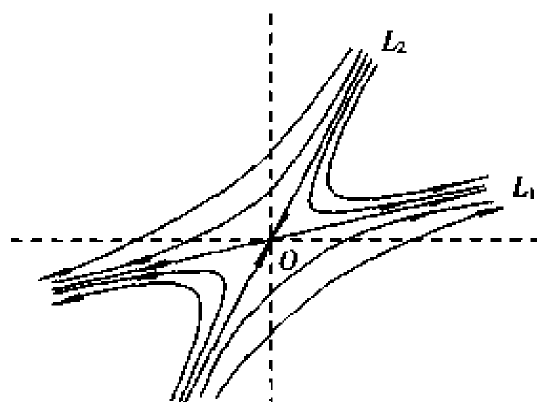


图 2-3

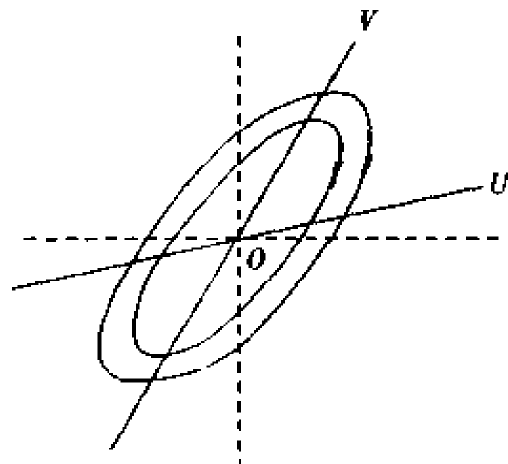


图 2-4

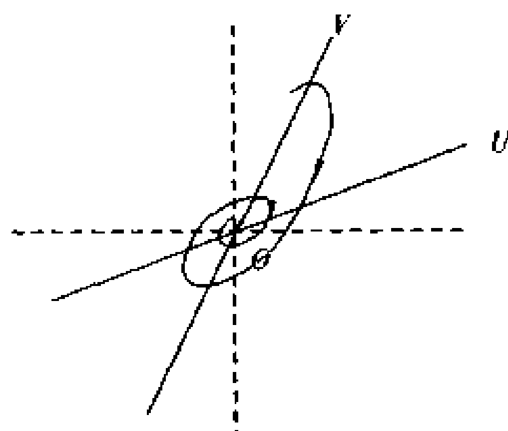


图 2-5

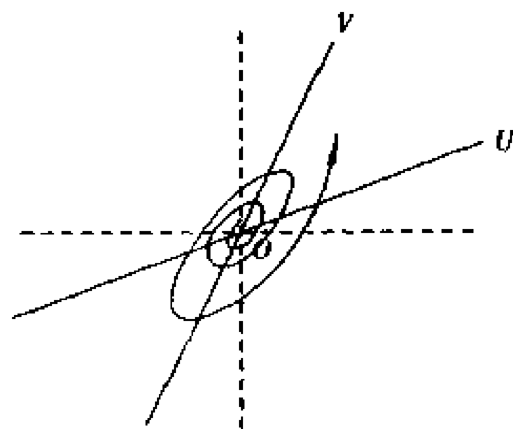


图 2-6

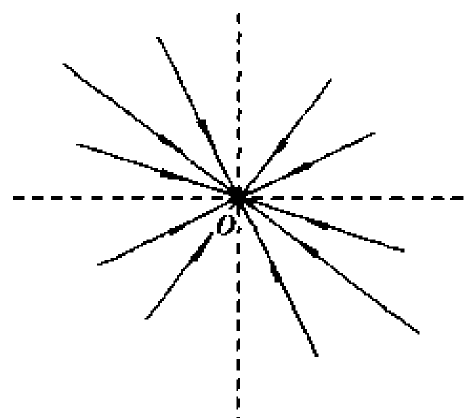


图 2-7

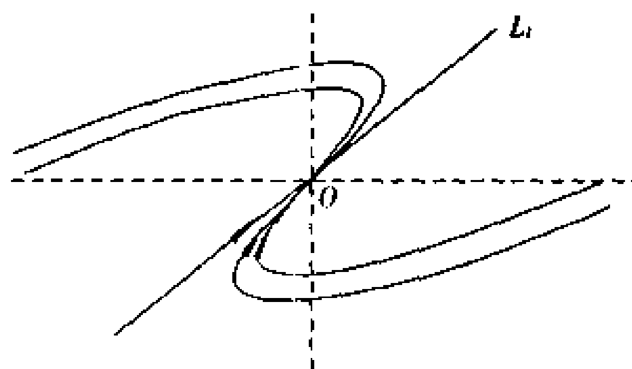


图 2-8

可以根据(2-1)式的系数(A 的元素)直接判别奇点 O 的类型. A 的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

其中 $p = -(a+d)$, $q = |A|$. 奇点 O 的性质可用参数 p, q(见图 2-9)表示如下:

1° $q < 0$, 0 为鞍点;

2° $q > 0, p^2 - 4q > 0\begin{cases} p > 0, 0 \text{ 为稳定结点,} \\ p < 0, 0 \text{ 为不稳定结点;} \end{cases}$

3° $q > 0, p^2 - 4q < 0\begin{cases} p > 0, 0 \text{ 为稳定焦点,} \\ p < 0, 0 \text{ 为不稳定焦点,} \\ p = 0, 0 \text{ 为中心;} \end{cases}$

4° $q > 0, p^2 - 4q = 0\begin{cases} p > 0, 0 \text{ 为稳定临界或退化结点,} \\ p < 0, 0 \text{ 为不稳定临界或退化结点;} \end{cases}$

5° $q = 0$, (2-1)式至少有一条奇线(由奇点组成的直线).

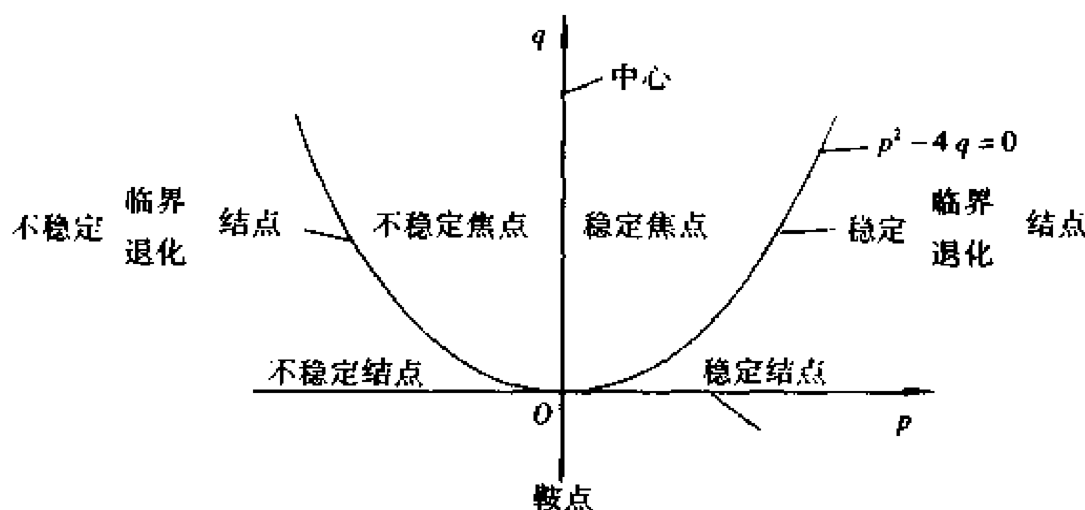


图 2-9

2.2 非线性系统的粗奇点

给定系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y); \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{2-2}$$

其中 P, Q 在 $G \subset \mathbb{R}^2$ 中定义. 不妨设系统(2-2)的奇点为 $O(0,0)$, 且 P, Q 在点 O 邻近连续可微.

将系统(2-2)写成

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + \Phi(x, y); \\ \dot{y} = cx + dy + \Psi(x, y), \end{cases}$$

其中 $a = P_x(0,0)$, $b = P_y(0,0)$, $c = Q_x(0,0)$, $d = Q_y(0,0)$. 称系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by; \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \tag{2-3}$$

为系统(2-2)的一次近似.记

$$p = -(a+d), \quad q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

对系统(2-2)来说,如果相应于奇点 O 的 $q \neq 0$,则称奇点 O 为**初等奇点**(或**简单奇点**),否则称为**高阶奇点**(或**复杂奇点**);如果奇点 O 相应的一次近似方程的特征根有非零的实部,则称奇点 O 为**粗奇点**,否则称为细(非粗)奇点.

定理 1 如果 $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ 在系统(2-2)的奇点 O 的邻近连续可微,系统(2-3)以点 O 为鞍点、焦点、或结点(不包括非正常结点),且一致地有

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{\Phi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{\Psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

则在奇点 O 的邻近,系统(2-2)与系统(2-3)的轨线有相同的拓扑结构.

定理 2 如果 $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ 在系统(2-2)的奇点 O 的邻近连续可微,并存在一个 $\delta > 0$,使当 $x^2+y^2 \to 0$ 时,一致地有

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{|\Phi_x| + |\Phi_y| + |\Psi_x| + |\Psi_y|}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\delta}} = 0,$$

则除两种($q>0, p=0$ 及 $q=0$)情形外,在其余各情形下,系统(2-2)与系统(2-3)在奇点 O 的邻近的定性特性相同.

2.3 中心和焦点的判别

给定系统(2-2)

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y); \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases}$$

其中 P, Q 为解析函数.设系统(2-2)的奇点为 $O(0,0)$,且相应的特征根是 $\pm \mathrm{i}b$, $b > 0$,则奇点 O 是系统(2-2)对应的一次近似方程的中心,称为**线性中心**.

关于奇点 O 是系统(2-2)的中心还是焦点的判别问题,有以下几种方法.

2.3.1 后继函数判别法

将系统(2-2)写成

$$\begin{cases} \dot{x} = -by + \Phi(x,y); \\ \dot{y} = bx + \Psi(x,y), \end{cases} \tag{2-4}$$

其中 Φ, Ψ 是关于 x, y 的不低于二次的级数,且在原点的某个邻域内收敛.

令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,将系统(2-4)化为极坐标方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\Phi\cos\theta + \Psi\sin\theta}{b + \frac{1}{r}(\Psi\cos\theta - \Phi\sin\theta)} = R(r,\theta), \tag{2-5}$$

其中 $R(r,\theta)$对所有 θ 及所有充分小的 r 为解析函数,且关于 θ 是周期为 2π 的周期函数.

将 $R(r,\theta)$展为 r 的幂级数,得

$$\frac{dr}{d\theta}=rR_1(\theta)+r^2R_2(\theta)+\cdots, \tag{2-6}$$

其中右端对所有 θ 和充分小的 r 收敛,且 $R_1(\theta)=0$, $R_i(\theta)(i=2,3,\cdots)$都是周期为 2π 的周期函数.

设系统(2-6)满足 $\theta=\theta_0$ 时 $r=r_0$ 的解为

$$r=f(\theta;\theta_0,r_0),$$

则 $f(\theta;\theta_0,r_0)$为解析函数,且 $f(\theta;\theta_0,0)=0$. 令 $\theta_0=0$,并记

$$r=f(\theta;r_0)=f(\theta;0,r_0).$$

展开 $f(\theta;r_0)$为 r_0 的幂级数,得

$$r=f(\theta;r_0)=u_1(\theta)r_0+u_2(\theta)r_0^2+\cdots. \tag{2-7}$$

对所有 $\theta\in[0,2\pi]$, $|r_0|<r^*$ ($r^*>0$ 为某一充分小量),此级数收敛. 代入系统(2-6),得

$$\begin{cases}\dot{u}_1=0,\\ \dot{u}_2=R_2u_1^2,\\ \dot{u}_3=R_3u_1^3+2R_2u_1u_2,\\ \cdots,\end{cases} \tag{2-8}$$

其中 $u_1(0)=1$, $u_i(0)=0(i=2,3,\cdots)$.

由系统(2-8)递推地确定 $u_i(\theta)$. 特别, $u_1(\theta)=1$. 称函数

$$r=f(2\pi;r_0)=\alpha_1r_0+\alpha_2r_0^2+\cdots$$

为正半 x 轴(半直线 $\theta=0$)上的对应于值 $|r_0|<r^*$ 的后继函数,而系数 $\alpha_i=u_i(2\pi)$ $(i=1,2,\cdots)$称为**焦点量**.

令

$$\psi(r_0)=f(2\pi;r_0)-r_0=\alpha_2r_0^2+\alpha_3r_0^3+\cdots, \tag{2-9}$$

则有

定理 3　在 $\psi(r_0)$的展开式中第一个不为零的系数必具有奇数下标.

在奇点 O 的邻域中系统(2-2)的轨线有如下特性.

(1) 如果系数 $\alpha_i(i\geqslant2)$至少有一个不为零,不妨设 α_{i_0}是第一个不为零的系数,这时,在奇点 O 的邻域中所有轨线均为趋于奇点 O 的螺线.

1° 当 $\alpha_{i_0}<0$ 时,螺线在 $t\to+\infty$ 时趋于奇点 O,即 O 为稳定焦点;

2° 当 $\alpha_{i_0}>0$ 时,螺线在 $t\to-\infty$ 时趋于奇点 O,即奇点 O 为不稳定焦点.

(2) 如 $\alpha_i=0(\forall i\geqslant2)$,则在奇点 O 的邻域中所有轨线均为闭的,即奇点 O 为中心.

当 $\alpha_{i_0}\neq0$, $i_0=2k+1$ 时,奇点 O 称为 **k 阶细焦点**.

例 1　考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y;\\ \dot{y}=x-\beta x^2+rxy^2+\alpha y^2,\end{cases}$$

其中 α,β,r 为常数.原点 O 是唯一的奇点,且为线性中心.这里 $a=1$.作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,得

$$\dot{r}=-\beta\cos^2\theta\sin\theta r^2+(\alpha\sin^4\theta-r\cos\theta\sin^3\theta)r^3,$$

$$\dot{\theta}=1-\beta\cos^3\theta r+(\alpha\sin^3\theta\cos\theta-r\cos^2\theta\sin^2\theta)r^2.$$

消去 t,得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R_2r^2+R_3r^3+\cdots,$$

其中 $R_2=-\beta\cos^2\theta\sin\theta, R_3=\alpha\sin^4\theta-r\cos\theta\sin^3\theta-\beta^2\cos^5\theta\sin\theta$.

由 $R_1\equiv0, u_1(\theta)=1, u_2(0)=0$ 及(2-8)式的第二式,解得

$$u_2(\theta)=\frac{1}{3}\beta\cos^3\theta-\frac{1}{3}\beta.$$

显然,$u_2(2\pi)=\alpha_2=0, u_3(0)=0$.又由(2-8)式的第三式,解得

$$\alpha_3=u_3(2\pi)=\int_0^{2\pi}(2R_2u_1u_2+R_3u_1^3)\mathrm{d}\theta$$

$$=\alpha\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\pi\alpha\neq0.$$

据定理 3,奇点 $O(0,0)$ 为一阶细焦点;当 $\alpha>0$ 时,O 为不稳定焦点,当 $\alpha<0$ 时,O 为稳定焦点.

2.3.2 形式级数判别法

不失一般性,设 $b=1$(否则作变换 $\tau=bt$).将系统(2-2)写成如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+P_2(x,y)+P_3(x,y)+\cdots;\\ \dot{y}=x+Q_2(x,y)+Q_3(x,y)+\cdots.\end{cases}\tag{2-10}$$

其中 P_k,Q_k 为 x,y 的 k 次齐次式.

取形式级数

$$F(x,y)=x^2+y^2+\sum_{k=3}^{\infty}F_k(x,y).$$

其中 F_k 为 x,y 的 k 次齐次式,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}=(2x+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial x})\cdot(-y+\sum_{k=2}^{\infty}P_k)+(2y+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\partial F_k}{\partial y})(x+\sum_{k=2}^{\infty}Q_k).$$

合并同次项,则二次项为零;三次项为

$$\left(x\frac{\partial F_3}{\partial y}-y\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+2(xP_2+yQ_2);$$

四次项为

$$\left(x\frac{\partial F_4}{\partial y}-y\frac{\partial F_4}{\partial x}\right)+2(xP_3+yQ_3)+\left(P_2\frac{\partial F_3}{\partial x}+Q_2\frac{\partial F_3}{\partial y}\right);$$

一般地，n 次项为

$$\left(x\frac{\partial F_n}{\partial y}-y\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)+2(xP_{n-1}+yQ_{n-1})+\left(P_2\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x}+Q_2\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}\right)+$$
$$\cdots+\left(P_{n-2}\frac{\partial F_3}{\partial x}+Q_{n-2}\frac{\partial F_3}{\partial y}\right).$$

将 n 次项中第一个括号以外的齐次式记为 $H_n(x,y)$.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 n 次项的第一个括号化为

$$x\frac{\partial F_n}{\partial y}-y\frac{\partial F_n}{\partial x}=r^n\frac{\mathrm{d}F_n(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta},$$

其余各项化为
$$H_n(x,y)=r^nH_n(\cos\theta,\sin\theta).$$

如

$$\int_0^{2\pi}H_3(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0,$$

则可找到三次齐次式 $F_3(x,y)$，使 $F_3(\cos\theta,\sin\theta)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta)=-H_3(\cos\theta,\sin\theta).$$

从而，上面的三次项为零.

求出 $F_3(x,y)$，则 $H_4(x,y)$ 为已知函数. 如

$$\int_0^{2\pi}H_4(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0,$$

又可找到 $F_4(x,y)$，使 $F_4(\cos\theta,\sin\theta)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta)=-H_4(\cos\theta,\sin\theta).$$

从而，四次项为零.

继续进行下去. 显然，对一切奇数 $2m-1$，有

$$\int_0^{2\pi}H_{2m-1}(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

如存在某个偶数 $2m$，使

$$\int_0^{2\pi}H_{2m}(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta\neq 0,$$

则取 $2m$ 次齐次式 $F_{2m}(x,y)$，使 $F_{2m}(\cos\theta,\sin\theta)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_{2m}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta)=-H_{2m}(\cos\theta,\sin\theta)+C_{2m},$$

其中
$$C_{2m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_{2m}\mathrm{d}\theta.$$

用上面得到的函数 $F_3,F_4,\cdots,F_{2m}$，构作函数 $\Phi(x,y)$：

$$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots+F_{2m}.$$

$\Phi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的一邻域内连续、可微、正定. 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{(2\cdot 10)} = C_{2m}(x^2+y^2)^m + (x,y\text{ 次数大于 }2m\text{ 的项}).$$

从而,有下述结论:

如 $C_{2m}<0$,(0,0)为(2-10)式的稳定焦点;如 $C_{2m}>0$,(0,0)为(2-10)式的不稳定焦点.

如对一切 n,有

$$\int_0^{2\pi} H_n(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0,$$

则(0,0)为(2-10)式的中心.

例 2 仍然考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y;\\ \dot{y} = x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3.\end{cases}$$

令

$$F = x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots,$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(*)} = \dot{x}\frac{\partial F}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial F}{\partial y} = -\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)y+$$

$$\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)(x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3).$$

令三次项为零,得

$$x\frac{\partial F_3}{\partial y}-y\frac{\partial F_3}{\partial x}-2\beta x^2y=0.$$

取极坐标,上式化为

$$\frac{\mathrm{d}F_3}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta) = 2\beta\cos^2\theta\sin\theta.$$

因

$$\int_0^{2\pi} 2\beta\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0,$$

故

$$F_3(\cos\theta,\sin\theta) = -\frac{2}{3}\beta\cos^3\theta.$$

由此得三次齐次函数 $F_3(x,y) = -\frac{2}{3}\beta x^3$.

令四次项为零,得

$$x\frac{\partial F_4}{\partial y}-y\frac{\partial F_4}{\partial x}-\beta x^2\frac{\partial F_3}{\partial y}-2\gamma xy^3+2\alpha y^4=0.$$

取极坐标,得

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta) = 2r\cos\theta\sin^3\theta-2\alpha\sin^4\theta.$$

但

$$\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta\sin^3\theta-2\alpha\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta = -2\alpha\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\neq 0,$$

改取 F_4 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta,\sin\theta)=2r\cos\theta\sin^3\theta-2\alpha\sin^4\theta+C_4,$$

其中 $C_4=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$，$C_4$ 与 α 同号.

令 $\Phi=x^2+y^2+F_3+F_4$，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{(*)}=C_4r^4+o(r^4).$$

故，(0,0)为(＊)的焦点；$\alpha<0$ 时稳定，$\alpha>0$ 时不稳定.

2.4　两类高阶奇点邻域的轨线结构

给定系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y);\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y),\end{cases}\tag{2-11}$$

其中 P 和 Q 为解析函数. 设 $O(0,0)$是系统(2-11)孤立的高阶奇点，则在 O 邻近系统(2-10)可写成如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by+P_2(x,y);\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy+Q_2(x,y),\end{cases}\tag{2-12}$$

其中 $a=P_x(0,0)$，$b=P_y(0,0)$，$c=Q_x(0,0)$，$d=Q_y(0,0)$，P_2 和 Q_2 解析，其级数展开式中只含不低于 2 次的项. 此外，奇点 $O(0,0)$的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 至少有一个零根，其中 $p=-(a+d)$，$q=ad-bc=0$.

2.4.1　$q=0,p\neq0$

在这情形下，对应的特征根有一个为零，另一个不为零. 此时，可作下列非奇异线性变换：

1° 如 $b\neq0$，令 $\tilde{x}=-dx+by$，$\tilde{y}=ax+by$；

2° 如 $b=0$ 且 $a=0$，令 $\tilde{x}=x$，$\tilde{y}=\frac{c}{d}x+y$；

3° 如 $b=0$ 且 $d=0$，令 $\tilde{x}=-\frac{c}{a}x+y$，$\tilde{y}=x$.

把系统(2-12)化为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{P}_2(\tilde{x},\tilde{y});\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tau}=\tilde{y}+\tilde{Q}_2(\tilde{x},\tilde{y}),\end{cases}$$

其中 $\tau=\sigma t$（σ 为常数），且函数 $\widetilde{P}_2$ 和 $\widetilde{Q}_2$ 满足如 P_2 和 Q_2 同样的条件.

因而，不失一般性，设系统(2-11)已化为下列形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P_2(x,y);\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y+Q_2(x,y),\end{cases}\tag{2-13}$$

其中 P_2 和 Q_2 在原点邻域中解析，其级数展开式只含不低于 2 次的项.

研究系统(2-13)在奇点 $O(0,0)$ 邻近轨线的拓扑结构可采用下述方法.

1° 求方程

$$y+Q_2(x,y)=0$$

在 $O(0,0)$ 邻近所确定的显函数 $y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 解析且满足 $\varphi(0)=0$ 和 $\varphi'(0)=0$.

2° 把 $y=\varphi(x)$ 代入函数 $P_2(x,y)$，并记

$$\psi(x)=P_2(x,\varphi(x)).$$

3° 把 $\psi(x)$ 表为下列形式

$$\psi(x)=a_mx^m+[x]_{m+1},$$

其中 $a_m\neq0$，$m\geqslant2$，则成立下列结论.

定理 4 1° 当 m 为奇数且 $a_m>0$ 时，奇点 $O(0,0)$ 是不稳定结点；

2° 当 m 为奇数且 $a_m<0$ 时，$O(0,0)$ 是鞍点，其四条分界线分别沿方向 $\theta=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，π 和 $\dfrac{3}{2}\pi$ 进入 $O(0,0)$；

3° 当 m 为偶数时，$O(0,0)$ 是鞍结点，即它的 δ 邻域 $U_\delta(0)$ 由奇点 O 以及分别沿正半 y 轴和负半 y 轴进入 $O(0,0)$ 的两条分界线组成的曲线分成两部分：一部分是**抛物扇形**（不稳定结点区），一部分是两个**双曲扇形**（鞍点区）. 另外，当 $a_m>0$（<0）时，两个双曲扇形的公共边界线沿负（正）x 轴进入 $O(0,0)$. 如图 2-10 与图 2-11 所示.

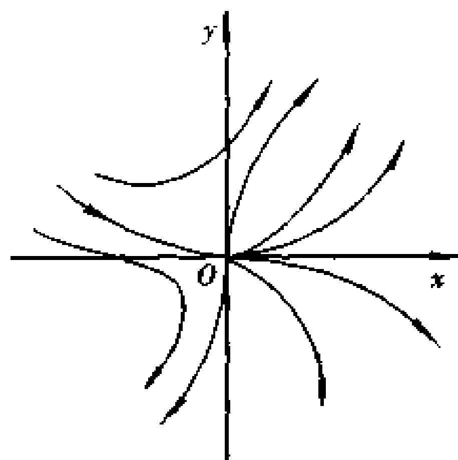


图 2-10

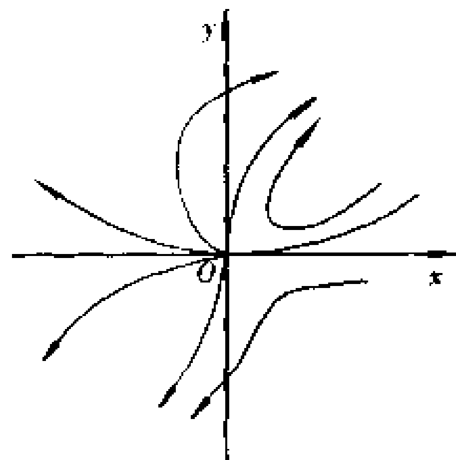


图 2-11

2.4.2 $q=p=0$,但 a,b,c,d 不全为零

在这情形下,两个特征根均为零,但线性项的系数不全为零.此时,可作下列非奇异线性变换:

1° 如 $a\neq 0$,令 $\tilde{x}=-y,\tilde{y}=-cx+ay$;

2° 如 $a=0,b\neq 0$,令 $\tau=bt$;

3° 如 $a=b=0$,令 $\tilde{x}=y,\tilde{y}=cx$.

把系统(2-12)化为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{d\tau}=\tilde{y}+\tilde{P}_2(\tilde{x},\tilde{y});\\ \dfrac{d\tilde{y}}{d\tau}=\tilde{Q}_2(\tilde{x},\tilde{y}),\end{cases}$$

其中 $\tilde{P}_2$ 和 $\tilde{Q}_2$ 满足如 P_2 和 Q_2 同样的条件.

因而,不失一般性,设系统(2-12)已化为下列形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+P_2(x,y);\\ \dfrac{dy}{dt}=Q_2(x,y),\end{cases}\tag{2-14}$$

其中 P_2 和 Q_2 在 O 邻近解析,其级数展开式中只含不低于 2 次的项.

再作变换

$$\xi=x,\quad \eta=y+P_2(x,y),$$

将系统(2-14)化为如下形式(仍以 x,y 为相变量)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y;\\ \dfrac{dy}{dt}=Q_2(x,y),\end{cases}\tag{2-15}$$

其中 Q_2 解析,其级数展式中只含不低于 2 次的项.

将系统(2-15)写成如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y;\\ \dfrac{dy}{dt}=a_kx^k[1+h(x)]+b_nx^ny[1+g(x)]+y^2f(x,y),\end{cases}\tag{2-15$'$}$$

其中函数 $h(x),g(x),f(x,y)$ 在 O 邻近解析,$h(0)=0,g(0)=0,k\geq 2,a_k\neq 0,b_n$ 可能为零,但如 $b_n\neq 0$ 则有 $n\geq 1$.

系统(2-15)′在奇点 $O(0,0)$ 邻近轨线的拓扑结构由下面两个定理给出.

定理 5 设在系统(2-15)′中,$k=2m+1(m\geq 1)$,且令 $\lambda=b_n^2+4(m+1)\cdot a_{2m+1}$,则奇点 O 的性态由表 2-1 确定.

表 2-1

<table>
<tr><th colspan="3">a_{2m+1},b_n,λ,m,n 的各种可能的关系</th><th>奇点 O 的性态</th></tr>
<tr><td colspan="3">$a_{2m+1}>0$</td><td>鞍点(图 2-12)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a_{2m+1}<0$</td><td colspan="2">$b_n=0$</td><td>中心或焦点</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$b_n\neq 0$</td><td>$n>m$ 或 $m=n$ 且 $\lambda<0$</td><td>中心或焦点</td></tr>
<tr><td>n 为偶数$\begin{cases}n<m \text{ 或} \\ n=m \text{ 且 } \lambda\geqslant 0\end{cases}$</td><td>结点</td></tr>
<tr><td>n 为奇数$\begin{cases}n<m \text{ 或} \\ n=m \text{ 且 } \lambda\geqslant 0\end{cases}$</td><td>$S_\delta(O)$由一个双曲扇形和一个椭圆扇形组成(图 2-13)</td></tr>
</table>

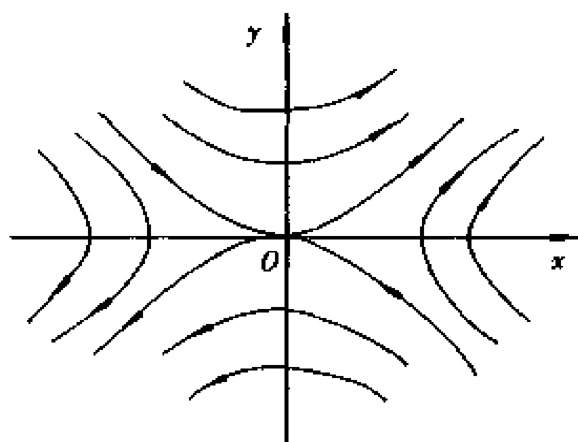


图 2-12

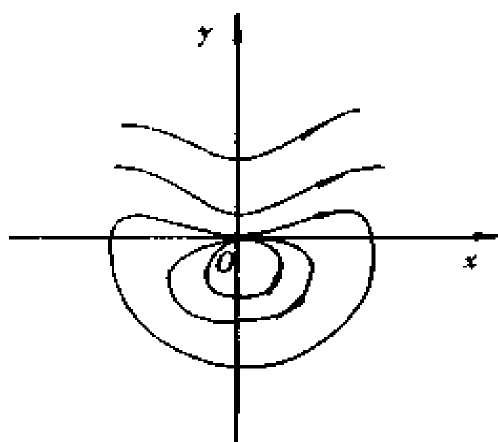


图 2-13

注:图 2-13 中 $b_n>0$;如 $b_n<0$,图形可由图 2-13 通过对 x 轴反射变换而得到.

定理 6 设在系统(2-15)′中,$k=2m(m\geqslant 1)$,则奇点 O 的性态由下表确定.

表 2-2

<table>
<tr><th colspan="2">b_n,n,m 的各种可能的关系</th><th>奇点 O 的性态</th></tr>
<tr><td colspan="2">$b_n=0$</td><td rowspan="2">退化奇点(图 2-14)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b_n\neq 0$</td><td>$n\geqslant m$</td></tr>
<tr><td>$n<m$</td><td>鞍结点(图 2-15)</td></tr>
</table>

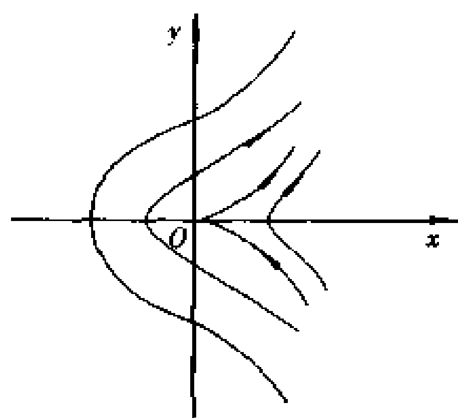
注:在应用定理 5 和定理 6 时,可从系统(2-14)出发,用下述步骤求出 k,a_k,N,B_N,并用 N,B_N 分别代替 n,b_n.

1° 求方程 $y+P_2(x,y)=0$ 的解 $y=\varphi(x)$,且 $\varphi(0)=0$.为此,可令

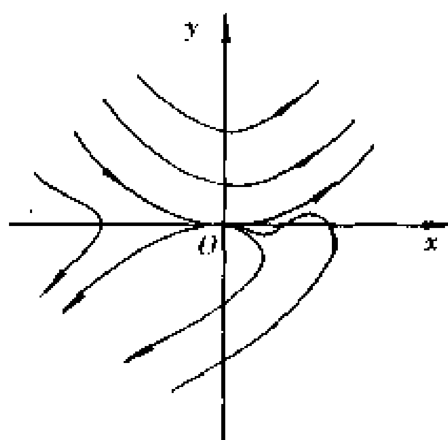
$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n,$$

代入 $y+P_2(x,y)=0$.比较同次项系数逐次求出 α_n,$n=1,2,\cdots$.

2° 令 $\psi(x)=Q_2(x,\varphi(x))$，并展开之：



$(a_{2m}>0)$
图 2-14



$(b_n>0, a_{2m}<0)$
图 2-15

$$\psi(x)=a_k x^k+[x]_{k+1},\quad a_k\neq 0.$$

3° 作函数

$$\sigma(x,y)=\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y},$$

将 $y=\varphi(x)$ 代入，并展开之：

$$\sigma_1(x)\equiv\sigma(x,\varphi(x))=B_N x^N+[x]_{N+1}$$

（如 $\sigma_1(x)\equiv 0$，则 $B_N\equiv 0$）.

例 3

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(\beta x-y);\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{\alpha}y-y^2+\alpha x^2,\end{cases}\tag{2-16}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$.

对应于系统(2-12)，有 $a=b=c=0, d=-\dfrac{1}{\alpha}$，而 $q=0, p=\dfrac{1}{\alpha}\neq 0$. 属于定理 4 考虑的类型.

为把(2-16)式化成(2-13)式的形式，只要令 $\tau=-\dfrac{1}{\alpha}t$，得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-\alpha\beta x^2+\alpha xy;\\ \dfrac{dy}{d\tau}=y+\alpha y^2-\alpha^2x^2.\end{cases}\tag{2-17}$$

现求 $y+\alpha y^2-\alpha^2x^2=0$ 的解 $y=\varphi(x)$. 为此，令

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i x^i,$$

易得，$C_1=C_3=0,C_2=\alpha^2,C_4=-\alpha^5,\cdots$.于是，

$$\varphi(x)=\alpha^2x^2-\alpha^5x^4+\cdots;$$

$$\psi(x)=P_2(x,\varphi(x))=-\alpha\beta x^2+\alpha^3x^3+\cdots,$$

从而 $m=2,a_m=-\alpha\beta<0$.由定理 4 知，系统(2-17)的奇点 O 为鞍结点.

因 $x=0,y>0$ 和 $x=0,y<0$ 为轨线，又考虑到时间变换 $\tau=-\frac{1}{\alpha}t$，所以，系统(2-16)在奇点 O 邻近的轨线拓扑结构如图 2-16.

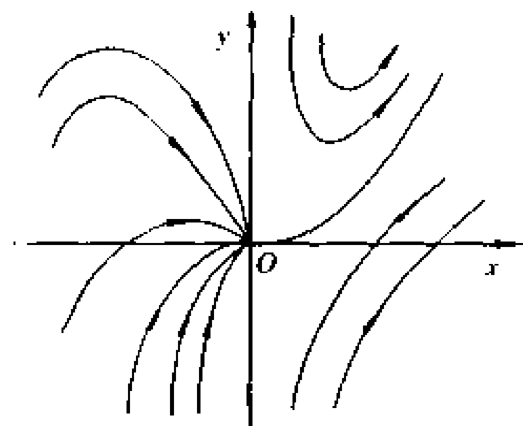


图 2-16

例 4　方程

$$\begin{cases}\dot{x}=x(-y+y^2+3xy);\\ \dot{y}=3x+y-x^2+y^3+3xy^2\end{cases}\qquad(2\text{-}18)$$

与(2-12)式比较，这里 $a=b=0,c=3,d=1$，故 $q=0,p=-1$.属于定理 4 的类型.为把方程(2-18)化为形如(2-13)式，令

$$x_1=x,\quad y_1=3x+y,$$

得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1y_1+3x_1^2-3x_1^2y_1+x_1y_1^2=\overline{P}_2(x_1,y_1);\\ \dot{y}_1=y_1+8x_1^2-3x_1y_1-3x_1y_1^2+y_1^3=y_1+\overline{Q}_2(x_1,y_1).\end{cases}\qquad(2\text{-}19)$$

解方程

$$y_1+\overline{Q}_2(x_1,y_1)=0$$

得

$$\varphi(x_1)=-8x_1^2-24x_1^3+\cdots;$$

$$\psi(x_1)=\overline{P}_2(x_1,\varphi(x_1))=3x_1^2+\cdots,$$

因而 $m=2,a_m=3>0$.由定理 4 知，(2-19)式的奇点 $O(0,0)$为鞍结点；从而(2-18)式的奇点 $O(0,0)$也是鞍结点.见图 2-17.

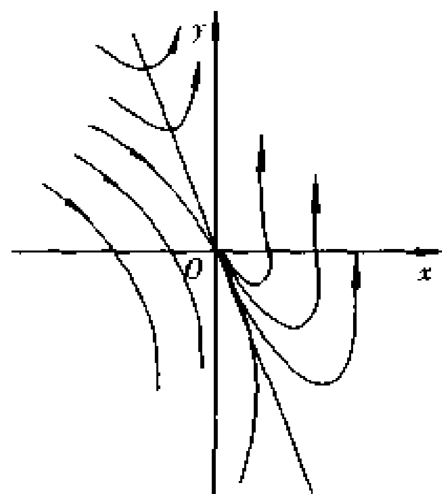


图 2-17

例 5　考虑方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y-\frac{1}{2}xy-3x^2;\\ \dot{y}=-y(x+\frac{3}{2}y).\end{cases}\qquad(2\text{-}20)$$

这里 $a=c=d=0,b=1$.故 $q=0,p=0$.属于定理 5 或定理 6 的类型.

易见，(2-20)式已为(2-14)式的形式，其中

$$P_2(x,y)=-\frac{1}{2}xy-3x^2.$$

$$Q_2(x,y) = -xy - \frac{3}{2}y^2.$$

方程 $y + P_2(x,y) = 0$ 的解是

$$y = \varphi(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \cdots.$$

于是,

$$\psi(x) = Q_2(x,\varphi(x)) = -3x^3 - 15x^4 + \cdots;$$

$$\sigma_1(x) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial Q_2}{\partial y}(x,\varphi(x))$$

$$= -7x - \frac{21}{2}x^2 + \cdots$$

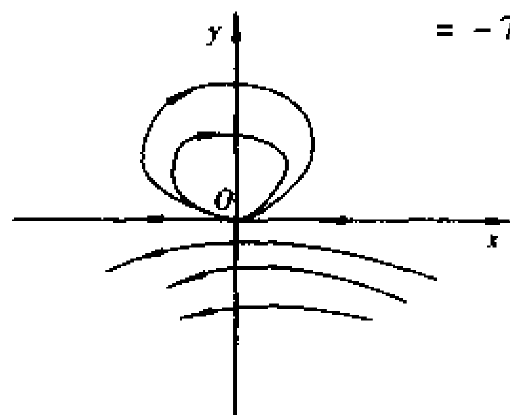


图 2-18

故 $k = 2m+1 = 3, m = 1, a_k = -3 < 0, n = 1, b_n = -7 < 0$, 且 $\lambda = b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1} = 25 > 0$. 因 k 为奇数, $a_k < 0, m = n, \lambda > 0$ 且 n 为奇数, 由定理 5 知, (2-20) 式的奇点 $O(0,0)$ 的邻域由一个椭圆扇形和一个双曲扇形组成. 注意到, $y = 0, x < 0$ 和 $y = 0, x > 0$ 为轨线. 奇点 $O(0,0)$ 邻近的轨线结构如图 2-18.

例 6　考虑方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^2 - x^3; \\ \dot{y} = 3x^2y + y^3 - 3x^5. \end{cases} \tag{2-21}$$

易见, (2-21) 式有 (2-14) 式的形式, 且有

$$\begin{cases} \varphi(x) = x^3 - x^6 + 2x^9 + \cdots; \\ \psi(x) = -3x^8 + x^9 + \cdots; \\ \sigma_1(x) = 3x^6 - 18x^9 + \cdots. \end{cases}$$

因而, $k = 2m, m = 4, n = 6, n > m, b_n = 3 \neq 0$. 由定理 6 知, $O(0,0)$ 为退化奇点. 见图 2-19.

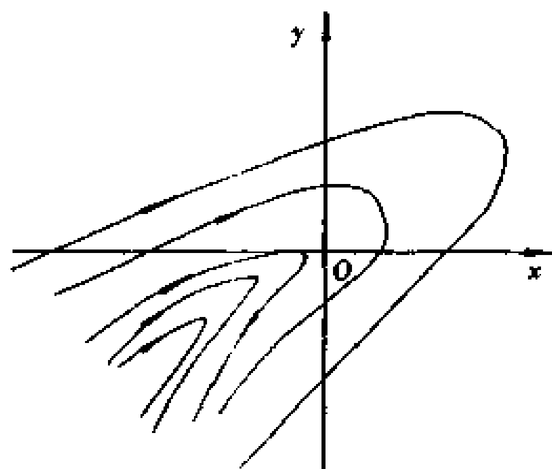


图 2-19

例 7　考虑方程

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x+2y); \\ \dot{y} = x + (2+\beta)xy + y^2. \end{cases} \tag{2-22}$$

易见, $a = b = d = 1, c = 1$. 从而, $q = p = 0$.

为把 (2-22) 式化为 (2-14) 式的形式, 令 $x_1 = y, y_1 = x$, 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + (2+\beta)x_1y_1 + y_1^2; \\ \dot{y}_1 = x_1^2 + 2x_1y_1. \end{cases} \tag{2-23}$$

易得,

$$\begin{cases}\varphi(x_1) = -x_1^2+\cdots;\\ \psi(x_1) = -2x_1^3+\cdots;\\ \sigma_1(x_1) = 4x_1+\cdots.\end{cases}$$

故 $k=2m+1=3, m=1, a_k=-2<0, n=1, b_n=4>0, n$ 为奇数，$\lambda=0$. 由定理5知，(2-23)式的奇点 $O(0,0)$ 是具有椭圆扇形的奇点.

2.5 无穷远奇点

2.5.1 庞加莱变换

过相平面 α 的坐标原点作一个与之相切的单位球面 $\Sigma: X^2+Y^2+Z^2=1$，切点坐标为 $(0,0,-1)$. 见图 2-20.

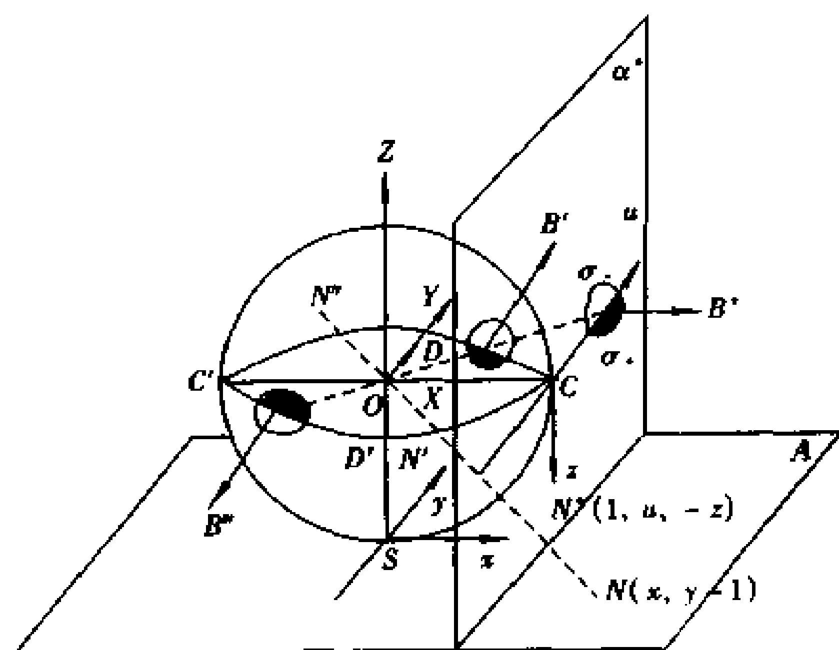


图 2-20

对 α 上任一点 $N(x,y)$，球心 O 与 N 的连线必交 Σ 于两对径点 N', N''；反之，对 Σ 上任意两个对径点，只要它们不落在大圆 $Z=0, X^2+Y^2=1$ 上，它们的连线延长后必交平面 α 于一点. $Z=0, X^2+Y^2\leqslant 1$ 称为赤道平面；而 $Z=0, X^2+Y^2=1$ 称为赤道，记作 W. 这样，除了赤道 W 上的点外，就建立了 Σ 上的对径点与相平面 α 上的点之间的对应关系. α 上的点 (x,y)，若 x^2+y^2 越大，它在 Σ 上的对应对径点就越接近赤道. 自然，也将赤道 W 上的对径点与 α 上和此对径点连线相平行的方向上的无穷远点相对应. 这样的单位球面称为庞加莱球面. 由于赤道将单位球面分成两半，因而上述对应也可看作，将相平面 α 映到下半球面，然后使无穷远点与赤

道上对径点相对应.

设 X 轴与 W 交于 C,C' 两点,Y 轴与 W 交于 D,D' 两点. 作平面 $\alpha^*:X=1$,与 Σ 相切于点 C. 在 α^* 上以 C 为坐标原点引进坐标系(u,z),u 轴与 Y 轴平行且同向,z 轴与 Z 轴平行但反向. 这样,Σ 上任两个不在 $z=0,Y^2+Z^2=1$ 大圆上的对径点 N',N'',经过以 Σ 球心 O 为中心的投影,必映射到 α^* 上的一点 N^*;W 上的对径点(除 D,D' 外),也映射到 α^* 的 u 轴上. 这样相平面 α 上的点 N(只要不在 y 轴上),便与 α^* 上的点 N^* 相对应. 对应关系为

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z}. \tag{2-24}$$

作平面 $\hat{\alpha}:Y=1$,与 Σ 相切于点 D. 在 $\hat{\alpha}$ 上以 D 为坐标原点引进坐标系(v,z). 类似可得 α 平面上(除 x 轴外)的点与 $\hat{\alpha}$ 平面上的点的对应关系:

$$x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z}. \tag{2-25}$$

变换(2-24)式、(2-25)式均称为**庞加莱变换**.

再将 Σ 的下半开球垂直投影到相平面 α 上以 O 为中心的单位圆周 Γ 的内部(记作 K). 这样就把相平面 α 映射到 K,α 上的无穷远点对应于 Γ 上的对应点.

设 B',B'' 为 W 上(异于 D,D')的两个对径点,其中 $z_{B'}>0,z_{B''}<0$,它们与 α^* 上的点 B^* 相对应,而 B',B'' 又分别与 Γ 上的对径点 $\tilde{B}$,$\tilde{\tilde{B}}$ 相对应,B^* 的任何邻域 σ 被 $z=0$ 分成两部分 $\sigma_+(z\geqslant 0)$和 $\sigma_-(z\leqslant 0)$. 在庞加莱变换下,σ_+ 和 σ_- 分别对应于 $\overline{K}$ 上 $\tilde{B}$ 和 $\tilde{\tilde{B}}$ 的半邻域 $\tilde{\sigma}_+$ 和 $\tilde{\sigma}_-$(见图 2-21). 如果 B^* 在 α^* 上的坐标是$(u^*,0)$,则 $\tilde{B}$,$\tilde{\tilde{B}}$ 是直线 $y=u^*x$ 与 Γ 的交点. 同样 $\hat{\alpha}$ 平面上 D 点的邻域 $\hat{\sigma}$ 被 $z=0$ 分成两部分 $\hat{\sigma}_+(z\geqslant 0)$和 $\hat{\sigma}_-(z\leqslant 0)$,它们分别对应于 Γ 上 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{\tilde{D}}$ 的半邻域 $\tilde{\sigma}_+$ 和 $\tilde{\sigma}_-$(见图 2-22).

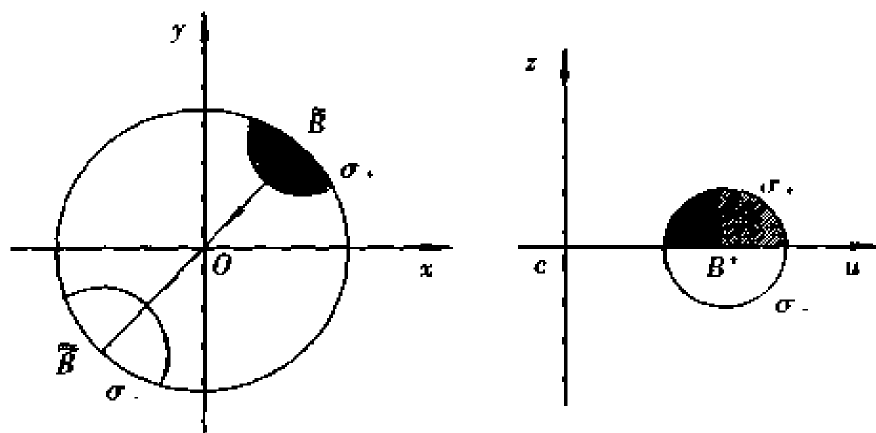


图 2-21

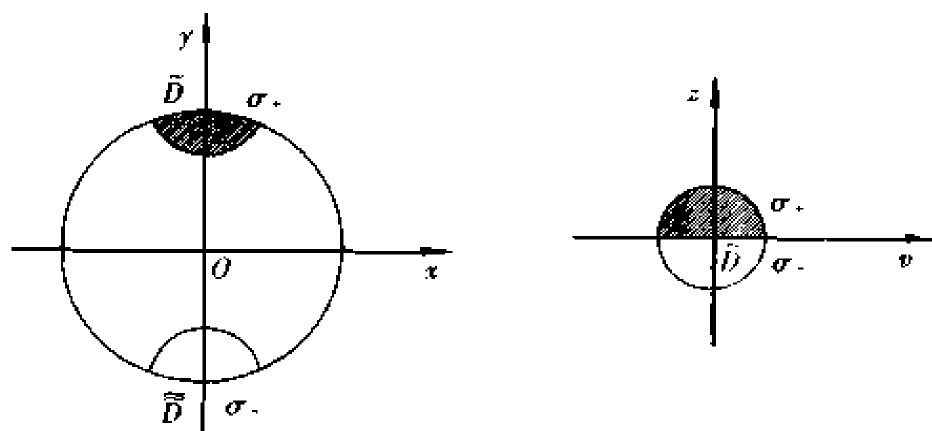


图 2-22

2.5.2 无穷远奇点的研究方法

给定平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y);\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y),\end{cases}\tag{2-26}$$

其中 P,Q 均为 x,y 的不可约多项式,最高次数为 n. 为研究系统(2-26)的无穷远奇点,可按下列步骤进行.

(1)作庞加莱变换

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z},$$

则系统(2-26)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-uzP\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{u}{z}\right)+zQ\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{u}{z}\right)=\dfrac{P^*(u,z)}{z^n};\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^2P\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{u}{z}\right)=\dfrac{Q^*(u,z)}{z^n},\end{cases}$$

其中 n 为非负整数,P^*,Q^* 为不可约多项式.

(2)令 $\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mathrm{d}t}{z^n}$,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=P^*(u,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=Q^*(u,z).$$

求出它在 $z=0$ 轴上的所有奇点,即解方程

$$P^*(u,0)=0,\quad Q^*(u,0)=0.$$

讨论每个奇点 $B(u,0)$的性质.

(3)求出 $B(u,0)$在 $\overline{K}$ 上的对应点 $\tilde{B}$,$\tilde{\tilde{B}}$. 它们是直线 $y=ux$ 与Γ 的交点 $\tilde{B}$ ($x>0$), $\tilde{\tilde{B}}$ ($x<0$). 将 B 的半邻域σ_+ ($z\geqslant 0$)和 σ_- ($z\leqslant 0$)分别映到 $\tilde{B}$ 和 $\tilde{\tilde{B}}$ 的半邻域

$\tilde{\sigma}_+$和$\tilde{\sigma}_-$.

(4)若 n 为奇数,将 σ_-映到 $\tilde{\sigma}_-$时轨线的走向要翻转.

(5)作庞加莱变换

$$x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z},$$

则系统(2-26)式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=zP\left(\dfrac{v}{z},\dfrac{1}{z}\right)-vzQ\left(\dfrac{v}{z},\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\widehat{P}(v,z)}{z^m};\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^2Q\left(\dfrac{v}{z},\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{\widehat{Q}(v,z)}{z^m},\end{cases}$$

其中 m 是非负整数,$\widehat{P}$,$\widehat{Q}$为不可约多项式.

(6)令 $\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mathrm{d}t}{z^m}$,试问 $D(0,0)$是否为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=\widehat{P}(v,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\widehat{Q}(v,z)$$

的奇点,且讨论 $D(0,0)$的性质.将 D 的半邻域$\widehat{\sigma}_+$($z\geqslant 0$)和 $\widehat{\sigma}_-$($z\leqslant 0$)分别映到 D 在$\overline{K}$上的对应点 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{\tilde{D}}$ 的半邻域 $\tilde{\sigma}_+$和 $\tilde{\sigma}_-$.

(7)若 m 为奇数,则当 $\widehat{\sigma}_-$映到 $\tilde{\sigma}_-$时轨线的走向要翻转.

例 8　研究下列系统的无穷远奇点

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(3-x-ny);\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-1+x+y),\quad n>3.\end{cases}\tag{2-27}$$

解　作庞加莱变换 $x=\dfrac{1}{z}$,$y=\dfrac{u}{z}$.系统(2-27)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2u-4uz+(n+1)u^2}{z};\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{z+nuz-3z^2}{z}.\end{cases}$$

令 $\mathrm{d}\tau=\dfrac{\mathrm{d}t}{z}$,得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=2u-4uz+(n+1)u^2;\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=z+nuz-3z^2.\end{cases}\tag{2-28}$$

在 α^* 平面上解出 $z=0$ 时的奇点是 $C(0,0)$,$B\left(\dfrac{-2}{n+1},0\right)$.$C$ 为不稳定结点,B 为稳定结点.

再作庞加莱变换 $x=\frac{v}{z}$，$y=\frac{1}{z}$. 系统(2-27)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-(n+1)v+4vz-2v^2}{z};\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-z-vz+z^2}{z}.\end{cases}$$

令 $\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{z}$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-(n+1)v+4vz-2v^2;\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-z-vz+z^2.\end{cases}$$

在 $\widehat{a}$ 平面上的奇点 $D(0,0)$ 为稳定结点. 因 $z=0$ 是系统(2-28)的解，故赤道由奇点和轨线组成. 又因 $\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{z}$，故在 $\overline{K}$ 上，奇点 $\tilde{C}$，$\tilde{D}$，$\tilde{B}$ 在半邻域内的稳定性分别与奇点 C,D,B 的稳定性相同；而奇点 $\tilde{\tilde{C}}$，$\tilde{\tilde{D}}$，$\tilde{\tilde{B}}$ 在半邻域内的稳定性分别与奇点 C,D,B 的相反. 因而，$\tilde{B}$，$\tilde{D}$，$\tilde{\tilde{C}}$ 为稳定结点，$\tilde{\tilde{B}}$，$\tilde{\tilde{D}}$，$\tilde{C}$ 为不稳定结点，见图 2-23.

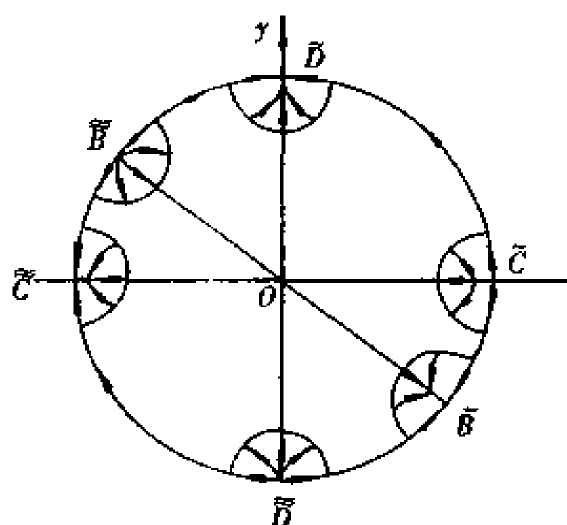


图 2-23

例 9 研究下列系统的无穷远奇点：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x(1+x^2-2y^2);\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(1-4x^2+3y^2).\end{cases}\tag{2-29}$$

解 作庞加莱变换 $x=\frac{1}{z}$，$y=\frac{u}{z}$，及变换 $\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{z}$，(2-29)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=2u-3uz^2+u^3;\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=-2z+4u^2z-2z^3.\end{cases}$$

它在 $z=0$ 上有唯一奇点 $C(0,0)$，为鞍点.

再作变换 $x=\frac{v}{z}$，$y=\frac{1}{z}$，$\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{z}$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-v+3vz^2-3v^3;\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=3z-4zv^2+z^3.\end{cases}$$

$D(0,0)$为奇点，且为鞍点.

不难得到，无穷远奇点邻近的轨线分布，如图2-24.

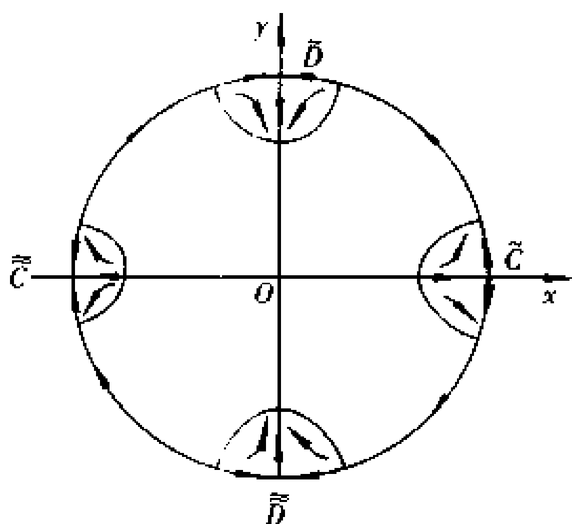


图2-24

例10 求下列系统的无穷远奇点：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(x+2y-1);\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y(x+2y-2).\end{cases}\tag{2-30}$$

解 作变换 $x=\dfrac{1}{z}$，$y=\dfrac{u}{z}$，$d\tau=\dfrac{dt}{z}$，系统(2-30)化为

$$\begin{cases}\dfrac{du}{d\tau}=-3u;\\[2mm]\dfrac{dz}{d\tau}=-1-2u-z.\end{cases}$$

再作变换 $x=\dfrac{v}{z}$，$y=\dfrac{1}{z}$，$d\tau=\dfrac{dt}{z}$，系统(2-30)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{d\tau}=3v;\\[2mm]\dfrac{dz}{d\tau}=-2-v+2z.\end{cases}$$

上述两系统在 $z=0$ 上均无奇点，故系统(2-30)没有无穷远奇点.

2.6 奇点指数

2.6.1 奇点指数的概念

给定一个平面连续向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)=(\boldsymbol{X}(x,y),\boldsymbol{Y}(x,y))$. 如果点 $M_0(x_0,y_0)$ 使得 $\boldsymbol{A}(x_0,y_0)=0$，则称 M_0 为向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)$的**奇点**.

由向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)$可确定平面微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=X(x,y);\\ \dot{y}=Y(x,y).\end{cases}\tag{2-31}$$

显然，M_0 为向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)$的奇点等价于 M_0 为系统(2-31)的奇点.

设 $L\subset\mathbf{R}^2$ 为逐段光滑的定向封闭曲线，且其上无 $\boldsymbol{A}(x,y)$的奇点. 当动点 $M(x,y)$在 L 上逆时针方向绕 L 一周时，向量 $\boldsymbol{A}(x,y)$，就其方向来说，一定旋转整数圈，所旋转的圈数的代数和（逆时针方向为正，顺时针方向为负）称为向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)$沿 L 的**旋转数**，记为 $I(\boldsymbol{A},L)$. 围绕系统(2-31)的奇点 $M_0(x_0,y_0)$，而不围绕其他奇点的闭曲线 L 关于向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)=(X,Y)$的旋转数称为系统(2-31)的**奇点** $M_0(x_0,y_0)$**的指数**，或**指标**，记作 $J_{M_0}(\boldsymbol{A})$，或 $J_{M_0}(X,Y)$.

2.6.2 性质

(1)若 $X,Y\in C^1$,则

$$I(A,L)=\frac{1}{2\pi}\oint_L \mathrm{d}\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}.$$

(2)若有界域 D 的内部仅含方程(2-31)的有限个奇点 $M_i(i=1,\overline{R})$,且在∂D 上无奇点,则

$$I(A,\partial D)=\sum_{i=1}^{k} J_{M_i}(A).$$

(3)若方程(2-31)仅有孤立奇点,则方程(2-31)的任何闭轨 L 所围的区域 D 内部所有奇点的指数和为 1.

(4)方程(2-31)的闭轨 L 所围成的区域 D 内部一定包含奇点.

(5)$J_{M_0}(aX,Y)=\operatorname{sgn}a\cdot J_{M_0}(X,Y),a\neq 0$.

(6)$J_{M_0}(X,Y)=-J_{M_0}(Y,X)$.

(7)$J_{M_0}(X+Y,Y)=J_{M_0}(X,Y)$.

(8)结点、焦点和中心的指数为 1,鞍点的指数为 −1.

3 极 限 环

3.1 基本概念,闭轨线不存在的准则

3.1.1 基本概念

给定平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y);\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y),\end{cases}\tag{3-1}$$

其中 x,y,t 为实变量,P、Q 为 x,y 的连续单值实函数,且能保证解的唯一性.

(1) 若系统(3-1)的解 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$是 t 的非常数的周期函数,则称此解在(x,y)相平面上的轨迹为系统(3-1)的**闭轨线**.由若干奇点以及两端进入奇点的轨线所构成的单闭曲线称为系统(3-1)的**奇闭轨线**.

(2) 如在系统(3-1)的闭轨线 Γ 的任意小的外(内)邻域中都存在非闭轨线,则称 Γ 为**外侧(内侧)极限环**.

(3) 如 Γ 是系统(3-1)的闭轨线,且存在 Γ 的一个外(内)邻域,它全部由闭轨线所充满,则称 Γ 为**外(内)侧周期环**.

(4) 如存在闭轨线 Γ 的足够小的外(内)邻域,使其中一切轨线皆为非闭,且以

Γ 为 ω 极限集,则称 Γ 为外(内)稳定极限环.

(5) 如存在闭轨线 Γ 的足够小的外(内)邻域,使其中一切轨线皆为非闭,且以 Γ 为 α 极限集,则称 Γ 为外(内)不稳定极限环.

(6) 如闭轨线 Γ 既为外(不)稳定环,又为内(不)稳定环,则称 Γ 为(不)稳定环.如在 Γ 的内、外侧具有不同的稳定性,则称 Γ 为半稳定极限环.

(7) 如在闭轨线 Γ 的任意小的外(内)邻域中,既存在闭轨线又存在非闭轨线,则称 Γ 为外(内)复合极限环.

(8) 如果当 t 增加时 Γ 上的动点沿着 Γ 以逆时针(顺时针)方向运动,则称闭轨线 Γ 为正(负)定向的.

3.1.2 判别闭轨线不存在的准则

(1) **庞加莱线性曲线法** 设 $F(x,y)=c$ 为一曲线簇,其中 $F\in C^1$.如果在区域 G 中

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}1)}=P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}$$

保持常号,且曲线

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

不含系统(3-1)的整条闭轨线或不含闭分支,则系统(3-1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与只含一个奇点的奇闭轨线.

(2) **本迪克松(Bendixson)准则** 若在单连通域 G 中系统(3-1)的发散量 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 保持常号.且不在 G 的任何子区域中恒等于零,则系统(3-1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线(这里假设 $P,Q\in C^1$).

(3) **杜拉克(Dulac)函数法** 若在单连通域 G 中存在函数 $B(x,y)\in C^1$,使 $\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ 保持常号,且不在任何子区域中恒等于零,则系统(3-1)不存在全部位于 G 中的闭轨线与奇闭轨线.

(4) **陈翔炎方法** 设存在单连通域 G 以及函数 $M(x,y),N(x,y)\in C^1$,使在 G 中有

$$E(x,y)=MP+NQ\geqslant 0,$$
$$F(x,y)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\geqslant 0\quad(\leqslant 0).$$

如在 G 的任何子区域中,$F(x,y)\not\equiv 0$,那么,

1° 若在 G 内 $E(x,y)\not\equiv 0$,则系统(3-1)在 G 中不存在闭轨线和奇闭轨线.

2° 若在 G 内 $E(x,y)\neq 0$,则系统(3-1)在 G 中不存在正(负)定向的闭轨线和奇闭轨线.

如在 G 内 $F(x,y)\equiv 0$,则系统(3-1)不存在闭轨线和奇闭轨线,除非它整个包含在使 $E(x,y)=0$ 的点集中.

(5) 若在单连通域 G 中，$P, Q \in C^1$，且存在函数 $B(x,y), F(x,y) \in C^1$，使得

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) + B\left(P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

在 G 中保持常号，且不在 G 的任何子区域内恒等于零，则系统(3-1)不存在全部位于 G 中的闭轨线和奇闭轨线.

对利纳德(Liénard)方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x); \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{*}$$

成立下列两个结论.

(6) 若曲线 $F(x_1) = F(x_2)$ 与曲线 $G(x_1) = G(x_2)$ 在区域 $D = \{(x_1, x_2) \mid x_{02} < x < 0, 0 < x_1 < x_{01}\}$ 内无交点，这里 $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，则(*)在带域 $x_{02} < x < x_{01}$ 中没有极限环.

(7) 设 $F(x)$ 分别在两区间 $(x_{02}, 0)$ 与 $(0, x_{01})$ 中严格单调，又曲线 $F(x_1) = F(x_2)$ 与曲线 $f(x_1)/g(x_1) = f(x_2)/g(x_2)$ 在区域 D 中无交点，则(*)在带域 $x_{02} < x < x_{01}$ 中没有极限环.

3.2 极限环的存在性

证明极限环存在性的主要方法是运用庞加莱-本迪克松环域定理，其关键是如何作出符合定理要求的内外境界线.

3.2.1 利纳德方程极限环的存在性

利纳德方程为

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

作利纳德变换

$$x = x, \quad y = \dot{x} + F(x),$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，则它等价于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x); \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{3-2}$$

定理 1 设系统(3-2)满足

1° $F(x), g(x)$ 连续，且保证解的存在唯一性；

2° 当 $x \neq 0$ 时，$xg(x) > 0$，$G(x) = \int_0^x g(x)\mathrm{d}x$，$G(\pm\infty) = +\infty$；

3° 当 $0 < x < x_1$ 时，$F(x) < 0$，

　当 $x_2 < x < 0$ 时，$F(x) > 0$；

4° 存在 $M > \max(x_1, |x_2|)$，$k_2 < k_1$，使

当 $x > M$ 时，$F(x) \geqslant k_1$，

当 $x < -M$ 时，$F(x) \leqslant k_2$，

则系统(3-2)至少存在一个极限环.

定理 2 设系统(3-2)中 $F(x)$，$g(x)$连续，且保证解的唯一性；当 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 充分小时，$xF(x) < 0\ (>0)$；又存在常数 $M > 0$，$x_1 > 0$ 及 $x_2 < 0$，使得

1° 当 $x_2 < x < 0$ 及 $0 < x < x_1$ 时，$xg(x) > 0$；

2° 当 $0 < x < x_1$ 时，$F(x) \geqslant -M\ (F(x) \leqslant M)$，

而 $F(x_1) \geqslant M + \sqrt{2l}\ (F(x_1) \leqslant -M - \sqrt{2l})$；

3° 当 $x_2 < x < 0$ 时，$F(x) \leqslant M\ (F(x) \geqslant -M)$，

而 $F(x_2) \leqslant -M - \sqrt{2l}\ (F(x_2) \geqslant M + \sqrt{2l})$，

其中 $l = \max(G(x_1), G(x_2))$，则系统(3-2)存在稳定(不稳定)极限环.

定理 3(菲利波夫(A.F.Filippov)定理) 设系统(3-2)中 $g(x)$满足

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时}, xg(x) > 0, G(\pm\infty) = +\infty;$$

又设经过变量代换

$$\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi = z_1(x), \int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(x) = F_1(z_1), \text{当 } x > 0;$$

$$\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi = z_2(x), \int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(x) = F_2(z_2), \text{当 } x < 0,$$

之后，函数 $F_1(z)$和 $F_2(z)$满足条件

1° 对于小的 $z(0 < z < \delta)$有 $F_1(z) \leqslant F_2(z)$，但不是 $F_1(z) \equiv F_2(z)$；又 $F_1(z) < a\sqrt{z}$，$F_2(z) > -a\sqrt{z}$，其中 $0 < a < \sqrt{8}$；

2° 存在一数 $z_0 > 0$，使

$$\int_0^{z_0} (F_1(z) - F_2(z))\mathrm{d}z > 0,$$

且当 $z > z_0$ 时，有 $F_1(z) \geqslant F_2(z)$，$F_1(z) > -a\sqrt{z}$，$F_2(z) < a\sqrt{z}$，则系统(3-2)存在稳定极限环.

3.2.2 广义利纳德方程极限环的存在性

广义利纳德方程为

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0.$$

它等价于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = v; \\ \dot{v} = -f(x, v)v - g(x), \end{cases} \tag{3-3}$$

其中 f，g 是连续函数.

定理 4 设系统(3-3)满足

1° 当 $x \neq 0$ 时，$xg(x) > 0$，$G(\pm\infty) = +\infty$；

2° $f(0,0) < 0$；

3° $\exists\, x_0 > 0$，使当 $|x| > x_0$ 时 $f(x, v) \geqslant 0$；

又$\exists M>0$,使当$|x|\leqslant x_0$时$f(x,v)>-M$;

4° $\exists x_1>x_0$,使对x的任一减少正函数$v(x)$,有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,v(x))\mathrm{d}x\geqslant 4Mx_0+\alpha \quad (\alpha>0),$$

则系统(3-3)存在稳定极限环.

定理 5 设系统(3-3)满足

1° 当$x\neq 0$时,$xg(x)>0$;

2° $f(0,0)<0$;

3° 记$F(x)=\inf\limits_{v} f(x,v)$,设$\int_0^x F(x)\operatorname{sgn}x\mathrm{d}x$存在且有下界,又

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\int_0^x [g(x)+F(x)\operatorname{sgn}x]\mathrm{d}x=+\infty;$$

4° 存在$c>0$及$M>0$,使

$$\int_0^x [cg(x)-F(x)\operatorname{sgn}x]\mathrm{d}x<M(x>0),$$

则系统(3-3)存在稳定极限环.

3.3 极限环的稳定性

定理 6 设Γ为系统(3-3)的闭轨线.如

$$\oint_\Gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}t<0(>0), \tag{3-4}$$

则Γ为稳定(不稳定)极限环.

注:闭轨线Γ为周期环、半稳定环或复合极限环的必要条件为

$$\oint_\Gamma\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}t=0. \tag{3-5}$$

如Γ满足条件(3-4),则称Γ为**单重环或双曲环**;如Γ满足条件(3-5),称Γ为**多重环或非双曲环**.

3.4 极限环随参数变化的规律

考虑含参数α的平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y,\alpha);\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y,\alpha).\end{cases} \tag{3-6}$$

3.4.1 焦点产生极限环(霍普夫(Hopf)分支)

设系统(3-6)中$P(x,y,\alpha)$,$Q(x,y,\alpha)$关于x,y,α一次连续可微,且$P(0,0,\alpha)=Q(0,0,\alpha)=0$,则在奇点$O(0,0)$邻近可将系统(3-6)写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(\alpha)x+b(\alpha)y+P_2(x,y,\alpha);\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=c(\alpha)x+d(\alpha)y+Q_2(x,y,\alpha),\end{cases}\tag{3-7}$$

其中 $P_2,Q_2=o(r),r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.

定理7　设系统(3-7)中 $q(\alpha_0)=a(\alpha_0)d(\alpha_0)-b(\alpha_0)c(\alpha_0)>0,a(\alpha_0)+d(\alpha_0)=0$,又原点 O 是系统(3-7)的稳定焦点;当 $\alpha>\alpha_0$ 时,$p(\alpha)=-(a(\alpha)+d(\alpha))<0$,则当 α 从 α_0 增加时,在奇点 O 的邻域内,系统(3-7)至少存在一个外稳定环和一个内稳定环(可能重合为一个稳定环).

3.4.2　旋转向量场中极限环的变化

若当 α 变动时,向量场$(P(x,y,\alpha),Q(x,y,\alpha))$的奇点不变,$P,Q$ 是 x,y,α 的连续函数,P'_α,Q'_α 存在且连续,并且在一切常号处恒有

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}\geqslant 0$,并沿任一闭曲线$\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}\neq 0$,其中 $Q=\operatorname{arctg}\dfrac{Q}{P}$;

(2) 对任意 $\alpha_1,\alpha_2(\alpha_1<\alpha_2)$,有

$$0\leqslant\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha\leqslant\pi,$$

则称由系统(3-6)所确定的向量场构成**广义旋转向量场**.

定理8　设系统(3-7)构成广义旋转向量场,则系统(3-7)的单重环(稳定或不稳定)的位置是 α 的连续函数;当 α 单调增加时,这个位置不断扩张或不断收缩.对半稳定环来说,当 α 向某一方向变化时,至少分裂为两个极限环,其中一个稳定,另一个不稳定;而当 α 向另一方向变化时,这个半稳定环消失.

注　在广义旋转向量场中,当参数单调变动时,单重环并不消失,而是扩大或缩小.根据单重环的定向和稳定性,当 α 增加时它的变动情况如表3-1所示.

表3-1

定　向	正	正	负	负
稳定性	稳定	不稳定	稳定	不稳定
变动情况	缩小	扩大	扩大	缩小

而半稳定环可能分裂或消失.根据半稳定环的定向和内外稳定性,它的变动情况如表3-2所示.

表3-2

定　向	正	正	负	负
稳定性	外稳内不稳	外不稳内稳	外稳内不稳	外不稳内稳
α 增加时	消失	分解成两个以上环	分解成两个以上环	消失
α 减小时	分解成两个以上环	消失	消失	分解成两个以上环

3.5 极限环的唯一性

关于极限环的唯一性,只有对利纳德方程的结果还多一些,还有些可行的判定方法.对一般平面系统至今还缺少办法,还有待人们去研究.

3.5.1 利纳德方程极限环的唯一性

考虑利纳德系统(3-2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x); \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases}$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

定理 9 设系统(3-2)满足

$1°$ $f(x)$和 $g(x)$在任何有界区间上满足利普希茨条件;

$2°$ $g(x)$为奇函数;当 $x \neq 0$ 时,$xg(x) > 0$;

$3°$ $F(x)$为奇函数;并存在 $x_0 > 0$,当 $0 < x < x_0$ 时,$F(x) < 0$;当 $x > x_0$ 时,$F(x) \geqslant 0$ 且单调递增;

$4°$ $F(\infty) = G(\infty) = \int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x = +\infty$,

则系统(3-2)有唯一的极限环,且为稳定的.

定理 10 设系统(3-2)中 $g(x) = x$,并且满足

$1°$ $f(x) \in C^0(\mathbf{R})$;$\exists \delta_{-1} < 0 < \delta_1$,当 $\delta_{-1} < x < \delta_1$ 时,$f(x) < 0$;当 $x > \delta_1$ 及 $x < \delta_{-1}$ 时,$f(x) > 0$;

$2°$ $\exists \Delta > 0, F(\Delta) = F(-\Delta) = 0$;

$3°$ $F(+\infty) = +\infty$,或 $F(-\infty) = -\infty$,

则系统(3-2)有唯一的极限环,且为稳定的.

定理 11 设系统(3-2)中 $g(x) = x$,并且满足

$1°$ $f(x) \in C^0(\mathbf{R})$;$f(x) < 0, |x| < \delta$;$f(x) > 0, |x| > \delta$;

$2°$ $F(+\infty) = +\infty$,或 $F(-\infty) = -\infty$,

则系统(3-2)有唯一的极限环,且为稳定的.

定理 12 设系统(3-2)中 $g(x) = x$,并且满足

$1°$ $f(x) \in C^0(\mathbf{R})$;$f(x) < 0, \delta_{-1} < x < \delta_1$;$f(x) > 0, x > \delta_1 > 0, x < \delta_{-1} < 0$;

$2°$ 当 $|x|$ 增加时,$f(x)$不下降,

则系统(3-2)有唯一的极限环,且为稳定的.

定理 13 设系统(3-2)满足

$1°$ $g(x)$连续且在任何有限区间上满足利普希茨条件;$xg(x) > 0, x \neq 0$;$G(\pm\infty) = +\infty$,其中 $G(x) = \int_0^x g(x)\mathrm{d}x$;

$2°$ $f(x)$连续,且当 $|u|$ 增加时,$\dfrac{F(x(u))}{u}$ 不下降,其中 $F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x$, $x =$

$x(u)$是 $u=u(x)=\sqrt{2G(x)}\operatorname{sgn}x$ 的反函数，
则系统(3-2)至多有一个极限环.

定理 14(张芷芬定理)　设系统(3-2)满足

1° $g(x)$连续，且在任何有限区间上满足利普希茨条件；$xg(x)>0,\ x\neq 0$；$G(\pm\infty)=+\infty$，其中 $G(x)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$；

2° $f(x)$连续；当 x 增加时，$\frac{f(x)}{g(x)}$不下降，$x\in\mathbf{R}_-\{0\}$；在 $x=0$ 的邻域内，$\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$，
则(3-2)式至多有一个极限环；如存在，为稳定环.

定理 15(曾宪武定理)　设系统(3-2)中的 $f(x)$，$g(x)$在(x_{02},x_{01})内连续，当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)>0$，并且满足(其中 $F_1(z)$，$F_2(z)$见定理 3)：

1° 存在 a，$0\leqslant a\leqslant z_0=\min(z_{01},z_{02})$，这里 $z_{0i}=G(x_{0i})$，$i=1,2$，使得当 $0<z<a$ 时，$F_1(z)\leqslant 0\leqslant F_2(z)$，但当 $0<z\ll 1$ 时，$F_1(z)\neq F_2(z)$；当 $a<z<z_{01}$时，$F_1(z)\geqslant 0$ 且 $F'_1(z)\geqslant 0$；

2° 当 $F_2(z)<0$，$0<z<z_{02}$时，$F'_2(z)\leqslant 0$；

3° 对任何常数 $k\geqslant 1$，当 $H_k(z)=F_2(u)$，$u\geqslant z>a$ 时，有 $H'_k(z)\geqslant F'_2(u)$，其中 $H_k(z)$为

$$H_k(z)=k^{-1}F_1(k^2(z-a)+a),$$
$$a\leqslant z<h_{0k}=k^{-2}(z_{01}-a)+a,$$

则系统(3-2)在带域 $x_{02}<x<x_{01}$内至多有一个极限环；如存在，为稳定环.

定理 16　设系统(3-2)中 $f(x)$，$g(x)$在 $x_{02}<x<x_{01}$内连续，当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)>0$，并满足(记号同定理 15).

1° 存在 a，$0\leqslant a<z_0$，当 $0<z<a$ 时 $F_1(z)\leqslant 0\leqslant F_2(z)$，但当 $0<z\ll 1$ 时 $F_1(z)\neq F_2(z)$，当 $a<z<z_{01}$时，$F_1(z)>0$；

2° 当 $F_2(z)<0$，$0<z<z_{02}$时，$F'_2(z)\leqslant 0$；

3° $F_1(z)F'_1(z)$在 $z>a$ 上不减(或 $F_2(z)F'_2(z)$在 $z>0$ 上不减且 $F_1(z_{01}-0)\leqslant F_2(z_{02}-0)$)；

4° 当 $F_1(z)=F_2(u)$，$u\geqslant z>a$ 时，$F'_1(z)\geqslant F'_2(u)$，
则系统(3-2)在带域 $x_{02}<x<x_{01}$内至多有一个极限环；如存在，为稳定环.

3.5.2　证明极限环唯一性的方法

证明极限环唯一性的现有方法大体上可归纳为以下几种.

(1) 点变换　如果在相平面上存在一闭的无切线段$\overline{AB}$，且从$\overline{AB}$出发的轨线必再次与$\overline{AB}$相交，则由解对初值的连续性，可以定义一个$\overline{AB}$到自身的连续映射 T. 由布劳威尔(Brouwer)不动点定理，如果映射 T 存在不动点 $P\in\overline{AB}$，则过 P 点的轨线 $f(p,t)$就是闭轨. 如果 T 为压缩映射，即对任何 $A_1,B_1\in\overline{AB}$，有 $P(T(A_1),T(B_1))<P(A_1,B_1)$，则映射 T 存在唯一不动点. 即 $f(p,t)$为唯一的闭轨.

(2) 比较全微分的积分　对任何单值连续可微函数 $V(x,y)$，它的全微分沿闭

轨线 Γ 一周的积分值为零,即 $\oint_{\Gamma} \mathrm{d}V = 0$. 如果对于互相包含的闭轨线 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$,能证明 $\oint_{\Gamma_i} \mathrm{d}V$ 是单调的,则这样的闭轨线只能有一条.

(3) 计算发散量的积分　当 $\oint_{\Gamma} \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t \langle 0 \rangle 0$ 时,Γ 稳定(不稳定). 而两个相邻极限环 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$,如其围成的环域中无奇点,则它们不能具有相同的稳定性. 故若能证明 $\oint_{\Gamma_i} \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t$ 同号,$i = 1,2$,则就证明了极限环唯一.

(4) 地形系法　在闭轨线 Γ 附近构造一族无接触闭曲线,称为地形系. 这样在闭轨线 Γ 附近就不可能有别的闭轨线.

4 多项式系统的几何理论

形如

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x,y); \\ \dot{y} = Q_n(x,y), \end{cases} \tag{4-1}$$

的系统称为 **n 次多项式系统**,其中 P_n, Q_n 为 x, y 的 n 次多项式.

确定一个平面动力系统轨线的全局几何结构,关键是研究其奇点,极限环(个数及分布),分界线(相对位置及走向)以及轨线在"无穷远"的性态等。

4.1 多项式系统轨线的几何与动力学性质

4.1.1 二次系统

(1) 有一积分直线和一细焦点的二次多项式系统没有极限环.

(2) 有一积分直线的二次系统最多有一个极限环.

(3) 若二次系统的发散量不恒等于零,则发散量为零的点的轨迹是一直线(称为**发散量直线**). 闭轨 Γ 若存在,必与此直线相交,且发散量直线 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ 必通过 Γ 的内部区域的重心.

(4) 若二次系统的发散量直线通过两奇点,则不存在闭轨线. 又若发散量直线是积分直线,亦不存在闭轨线.

(5) 具有两个焦点的二次系统若其中之一为细焦点,并且还存在第三个有限远奇点,则极限环必集中分布;若细焦点为二阶的,则不存在极限环.

(6) 二次系统的闭轨线内部只能有一个焦点或中心.

(7) 二次系统的奇闭轨线若过两个有限远奇点 P 和 Q,则直线段 $\overline{PQ}$ 必定是它的一部分.

(8) 一次或二次系统的闭轨以及过有限远或无限远奇点的奇闭轨必为严格凸

闭曲线，即它在任何一方向最多只有两个极值点.

(9) 二次系统不存在 (○○) 和 ○○○ 型的闭轨分布.

(10) 有对称中心的二次系统最多只能有两个单重极限环；若存在，则必为(1,1)分布.一般二次系统的极限环，据猜想，有(1,0)，(2,0)，(3,0)，(1,1)，(1,2)，(1,3)等分布，但不能有(2,2)分布.它的闭轨或集中分布在一焦点型奇点外围，或分别出现于两个焦点型奇点的外围.

(11) 二次系统最多可以有三个指标为 +1 的初等奇点，但其中最多只能有两个是焦点型的.

(12) 二次系统不可能既有中心又有极限环，或既有中心又有细焦点.

(13) 线性部分以原点为星形结点的二次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x+a_0x^2+a_1xy+a_2y^2,\\ \dot{y}=y+b_0x^2+b_1xy+b_2y^2\end{cases}\tag{4-2}$$

没有极限环，且可积.

(14) 若二次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2,\\ \dot{y}=b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2\end{cases}\tag{4-3}$$

被化成$(1,y,z)$或$(x,1,z)$坐标下的方程中不含常数项与一次项，则上述系统可积.

(15) 二次系统的焦点的最高阶数为 3；具有三阶细焦点的二次系统，没有极限环与分界线环；有二阶及三阶细焦点的二次系统没有直线解.

(16) 二次系统的奇闭轨线上若有三个有限远鞍点，则它必是以这些鞍点为顶点的三角形，内部为中心区域.

(17) 若 Γ_1、Γ_2 都是上面只有一个鞍点的奇闭轨，则它们不能共有一个鞍点. Γ_1 和 Γ_2 的内部可能都是中心，也可能都是焦点.又若 Γ_1 与 Γ_2 都过两个鞍点，则它们必有一公共直线段，且它们的内部都是中心.

(18) 任一直线与二次系统的轨线最多只能有两个切点(包括奇点，有限远或无限远)，否则，该直线本身便是轨线.反之，任一积分直线若不是充满了奇点，则其上有限远奇点最多只能有两个，至于无限远奇点，则可有可无.

(19) 任一直线 L 与一线性系统或二次系统的任一轨线 $\gamma(\gamma\neq L)$最多只能有一个切点.

(20) 若一曲线 $y=f(x)$是一线性系统或二次系统的轨线，则它上面最多只有 y 的两个极值点.

(21) 二次系统若有两个焦点，其一为三阶细焦点，则另一必为粗焦点，二焦点必有相同的稳定性，且无其他实的有限奇点.

(22) 二次系统不存在图 4 - 1 所示的三种无界分界线环.

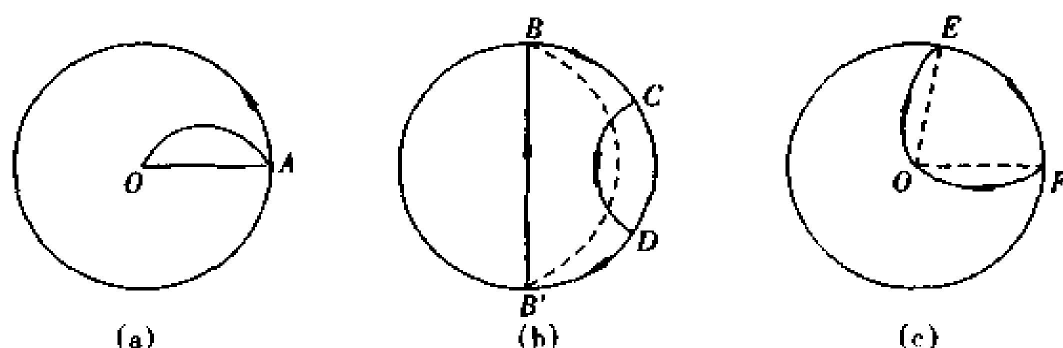


图 4-1

(23) 二次系统的有界奇闭轨只有 3 种(若细分可得 6 种),无界奇闭轨只有 5 种.

(24) 二次系统的一个中心区域不能充满全平面.

(25) 若二次系统在有限远奇点 P 有两个实特征根,则或是过 P 至少有一积分直线,或是存在一过 P 的直线 l,使对 l 上的一切异于 P 的点,轨线都从同一方向穿过 l. 在后一情形,至少存在一进入 P 的轨线,它在 P 点与 l 相切.

(26) 若一非齐二次系统在一有限奇点 P 有一椭圆区域,则它在 P 只有一个椭圆域和一个双曲域. P 应是三重奇点,即它是 $P_2(x,y)=0$ 与 $Q_2(x,y)=0$ 的三重交点. 这时过 P 有一积分直线 l,使椭圆域中一切轨线都与 l 切于 P 点. 又系统除 P 外,最多只能有一个有限远奇点 q,q 必不在 l 上.

(27) (Ⅰ)类二次系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x\end{cases}\tag{4-4}$$

最多有一个极限环,焦点 $O(0,0)$ 最多只能是一阶的. 否则,便是中心. (Ⅰ)的无限远奇点中最多只能有一个是初等奇点.

(Ⅱ)类二次系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x(1+ax),\ na\neq 0\end{cases}\tag{4-5}$$

的有限远奇点的指标之和为零或 2,它不可能有两个无穷远初等鞍点. $(\text{Ⅱ})_{m=0}$ 的极限环必集中分布. $(\text{Ⅱ})_{l=0}$ 若在一奇点外围有奇数个极限环,则必为唯一.

(28) 有一条积分直线的二次系统必可化为

$$\begin{cases}\dot{x} = -y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x(1+by),\ b\neq 0.\end{cases}\tag{4-6}$$

它最多有一个极限环;焦点 $O(0,0)$ 最多只能是一阶的. 否则,便是中心.

(29) 有界二次系统最多有三个有限远奇点;它的细焦点最多只能是二阶的;若有一阶细焦点和极限环,则环是唯一的. 只有一个或两个奇点的有界二次系统最多能有一个极限环. 有界系统可以有(1,1)分布的极限环,但(1,2)分布是不可能的.

(30) 有细鞍点 s 的二次系统其极限环若存在，必为唯一的. 若还有积分直线 l，则当 l 不通过 s 时，二次系统没有环.

(31) 二次系统的细焦点和细鞍点的最高阶数均为3. 有一阶数大于1的细鞍点的二次系统或为可积，或无极限环与分界线环.

(32) 过二次系统的每一无穷远奇点必有一条无切直线.

(33) 有一个有限远奇点和一个无限远奇点的二次系统最多有一个极限环.

(34) 齐二次系统可积，无极限环. 相图有7种不同的拓扑结构.

(35) 二次系统过一鞍点的分界线环经微扰动后，至多能产生三个极限环，而且确实可以产生三个极限环.

(36) 当二次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=P_1(x,y)+P_2(x,y);\\ \dot{y}=Q_1(x,y)+Q_2(x,y)\end{cases}\tag{4-7}$$

的 P_2,Q_2 可被 $\operatorname{div}(P,Q)$ 的一次项 $\dfrac{\partial P_2}{\partial x}+\dfrac{\partial Q_2}{\partial y}$ 整除时，它或是没有极限环，或是有唯一的单重环.

(37) 二次系统若有有限远或无限远退化奇点(在此奇点有两个零特征根，但系统的线性部分不全为零)时，或无极限环，或有唯一的极限环.

(38) 有重数大于2的半初等有限奇点(即只有一个零特征根的奇点)的二次系统或无极限环，或有唯一的单重环.

(39) 若二次系统只有有限条积分直线，则它最多只能有5条.

(40) 若二次系统有4个有限远奇点，则其中最多有3个指标为 $+1(-1)$，至少有一个指标为 $-1(+1)$.

(41) 特殊(Ⅲ)类方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+ny^2;\\ \dot{y}=x(1+ax-y),0<n<1\end{cases}\tag{4-8}$$

最多只有一个极限环，若设 $a<0$，则当 $\delta>0(<0)$ 时，它只能出现在 $O(0,0)$($N(0,\frac{1}{n})$)外围.

(42) 特殊(Ⅲ)类方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2;\\ \dot{y}=x(1+ax+by)\end{cases}\tag{4-9}$$

最多只能有一个极限环.

(43) 二次系统的任一条积分线最多有三个无界分支.

(44) 有界二次系统的无穷远奇点只能有一个，除非有过非鞍点的积分直线.

(45) 如有界二次系统有三个有限远奇点，则必有一个为鞍点，另两个为非鞍点.

(46) 如二次系统有两个细焦点，或一个细焦点和一个细鞍点，则必不存在分界线环.

(47) 二次系统的有返回映射的有界分界线环，若其上只有一个或两个奇点，且其内部不是中心，则只可能有下列五种(见图 4-2)：

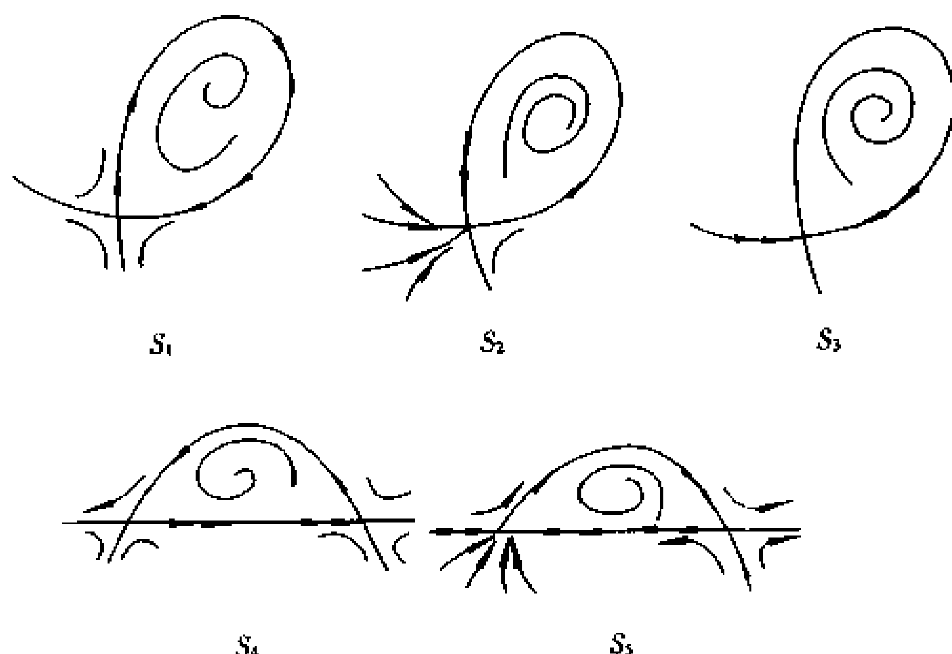


图 4-2

S_1　其上有一个一阶鞍点的同宿环；

S_2　其上有一个二阶鞍点的同宿环；

S_3　其上有一个三阶鞍点(在该点发散量不为零)的同宿环；

S_4　其上有两个一阶鞍点的异宿环；

S_5　其上有一个一阶鞍点，一个二阶鞍点的异宿环.

(48) 若二次系统有分界线环 S_1，则 S_1 内部的奇点可能为粗焦点、一阶细焦点或二阶细焦点；若设焦点外围最多只能存在三个极限环，则 S_1 内部至多(而且能)有两个极限环. 当发散量在鞍点不为零时，S_1 的内稳定性可由发散量在鞍点的符号决定.

(49) 若二次系统有分界线环 S_2，则 S_2 内部的奇点可能为粗焦点或一阶细焦点. S_2 内部最多只能有一个极限环. S_2 的内稳定性可由发散量($\neq 0$)在 S_2 上的鞍结点的符号决定.

(50) 若二次系统有分界线环 S_3，当发散量在鞍点不为零时，S_3 内部的奇点只能是粗焦点，S_3 内部不含极限环. S_3 的内稳定性由发散量在鞍点的符号决定.

(51) 若二次系统有分界线环 S_4 和 S_5，则它们内部都不包含极限环，其中的奇点若不是中心，则必为粗焦点. S_5 的内稳定性由发散量在鞍结点的符号决定.

(52) 二次系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \delta_2 x - 3x^2 + (1-\delta_1)xy + y^2; \\ \dot{y} = x\left(1 + \dfrac{2}{9}x - 3y\right) \end{cases} \tag{4-10}$$

当 $0<\delta_2\ll\delta_1\ll1$ 时出现(1,3)分布.

4.1.2 n 次($n\geqslant3$)系统

以上所列的二次系统轨线的几何与动力学性质大多数不能推广到 n 次($n\geqslant$ 3)系统.但 n 次系统具有下列几条相应性质.

(18′) 任一直线 L 与 n 次多项式系统的轨线最多只能有 n 个切点(包括奇点).否则,L 本身便是轨线.一般地,任一 m 次代数曲线与 n 次系统的轨线最多只能有 $m(m-1+n)$ 个切点.

(19′) 任一直线 L 与 $2n-1$ 次或 $2n$ 次多项式系统的任一确定的轨线最多只能有 n 个切点.

(20′) 若一开曲线 $y=f(x)$ 是 $2n-1$ 次或 $2n$ 次系统的轨线,则它最多只能有 $2n$ 个极值点.

(24′) 奇次多项式系统的一个中心区域有可能充满全平面;偶次多项式系统的一个中心区域决不能充满全平面.

(40′) 若 n 次系统有 n^2 个奇点,则其中最多有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个指标为 $+1$(或 -1)的奇点,至少有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个指标为 -1(或 $+1$)的奇点.

(43′) n 次多项式系统的任一积分线最多有 $n+1$ 个无界分支和 n^2 个有界分支.

4.2 多项式系统奇点的一般性质

4.2.1 奇点性质的相互影响

(1) 设 n 次系统(4-1)只有有限个奇点,则在庞加莱半球面上一切奇点(即包括赤道上的奇点在内,但直径相对的两奇点只取其中之一)的指标之和为 1.

(2) 若 n 次系统(4-1)的奇点都是初等的,则有限远奇点最多为 n^2 个,无限远奇点最多有 $n+1$ 个;以上这两个上界均可以达到(这里指实奇点).

(3) 二次系统若有两个细焦点,则它们都只能是一阶的,且有不同的稳定性;若有一中心点,还有一焦点,则焦点必为粗的.又当 n 次系统(4-1)有三个指标 $+1$ 的初等奇点时,其中最多只能有两个是焦点或中心.

(4) 对二次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=a_{10}x+a_{20}y+a_{11}x^2+b_{22}xy;\\ \dot{y}=b_{10}x+b_{20}y+a_{11}xy+b_{22}y^2\end{cases}\tag{4-11}$$

当 $O(0,0)$ 为正常结点时,除了 O 以外,还可以有两实奇点 A_1 与 A_2,一个为结点,另一为鞍点.这里有两种情形:

1° $A_1\neq A_2$ 都是有限远奇点;

2° $A_1\neq A_2$,其一为有限远奇点,另一为无限远奇点.

其次,当 $4b_{10}a_{20}+(b_{20}-a_{10})^2=0$ 时,若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}>0$,则 O 为单向结点,$A_1=A_2$ 为鞍结点,它可能在有限远,也可能在无限远.特别,当 $a_{20}a_{11}\neq 0$ 且 $b_{10}=a_{20}=b_{20}=0$ 时,$A_1=A_2=0$.

又若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}<0$,则 O 为鞍点,另两个奇点为结点,可能重合,也可能有一在无限远.

若 $a_{10}b_{20}-a_{20}b_{10}=0$, $a_{10}+b_{20}\neq 0$,则 O 为鞍结点,另外还有一个结点,它也可能在无限远.

当 O 为焦点或中心时,则 O 为唯一的实奇点.

若 O 为焦点,则必为粗焦点.

(5) 若二次系统有三个奇点,其中之一为中心,则只可能出现下列三种情况:

1° 一中心,两鞍点;

2° 一中心,一鞍结点,一单向结点;

3° 一中心,一鞍点,一退化鞍点(只有两条分界线).

(6) 若二次系统有三个鞍点和一个非鞍点,则无限远奇点必均为单奇点,且都为结点.

(7) 考虑二次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1+b_1x+c_1y+d_1x^2+e_1xy+f_1y^2;\\ \dot{y}=a_2+b_2x+c_2y+d_2x^2+e_2xy+f_2y^2,\end{cases}$$

记

$$f(u)=f_2u^2+e_2u+d_2-u(f_1u^2+e_1u+d_1);$$

$$A=\begin{vmatrix}e_2 & f_2\\ e_1 & f_1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}f_2 & d_2\\ f_1 & d_1\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}d_2 & e_2\\ d_1 & e_1\end{vmatrix},$$

$$D=B^2-AC,$$

则有表 4-1.

表 4-1

	无穷远奇点数	3	2	1
D	-	$A>0$:三个结点; $A<0$:一结点,两鞍点	一鞍点,一鞍结点	一鞍点
	+	两结点,一鞍点	一结点,一鞍结点	一结点
	0	$A+C>0$:两结点,一李氏奇点; $A+C<0$:一结点,一鞍点,一李氏奇点; $A+C=0$:一结点,二李氏奇点	$f(u)=0$ 的重根不是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$ 的根时:一鞍结点,一李氏奇点; $f(u)=0$ 的重根是 $f_1u^2+e_1u+d_1=0$ 的根时:一单奇点,一高阶奇点	$f(u)=0$ 只有一个单实根时: $A^2+C^2=0$:一结点; $A^2+C^2\neq 0$:一李氏奇点; $f(u)=0$ 有一三重根时:一高阶奇点

注　关于李雅普诺夫型奇点和其它高次奇点，均另有方法判别类型(是结点、鞍点还是鞍结点).

4.2.2　奇点分布的几何构形

设二次系统有四个有限远奇点.如果以它们为顶点的四边形是凸的，则两个对顶的奇点是鞍点，另两个对顶的奇点是非鞍点.如果四边形是凹的，则三个外顶点是鞍点(非鞍点)，而一个内顶点是非鞍点(鞍点).

4.2.3　奇点的指标

n 次系统(4-1)若有 n^2 个奇点 O_i, $i=1,2,\cdots,n^2$，则

$$\max\left|\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{ind}O_i\right| = n,\quad \min\left|\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{ind}O_i\right| = \begin{cases}0 & n \text{ 为偶数;}\\ 1 & n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

设多项式系统

$$\begin{cases}\dot{x} = P_n(x,y);\\ \dot{y} = Q_m(x,y),\end{cases}\tag{4-12}$$

其中 P_n, Q_m 分别为 n 与 m 次多项式，有最多个数的 nm 个初等奇点，则其中指标 $+1$(或 -1)的奇点的最多个数为

$$S_{n,m} = \frac{nm}{2} + \frac{1+(-1)^{n+m}}{4}\min(n,m).$$

设(4-12)式只有孤立奇点，则其有限远奇点的指标总和满足关系式

1° $|\sum i| \leqslant \min(n,m)$;

2° 当 $n \neq m \pmod 2$ 时，$\sum i = 0$;

3° $\sum |i| \leqslant nm$,

其中 i 表示任一奇点的指标.

4.2.4　二次系统(E_2)的焦点量

考虑二次系统

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2;\\ \dot{y} = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2.\end{cases}\tag{4-13}$$

引入判定量

$$W_1 = A\alpha - B\beta,$$

$$W_2 = \gamma[\beta(5A-\beta) + \alpha(5B-\alpha)],$$

$$W_3 = \gamma\delta(A\beta + B\alpha),$$

其中，

$$A = a_{20} + a_{02},\ B = b_{20} + b_{02},$$

$$\alpha = a_{11} + 2b_{02},\ \beta = b_{11} + 2a_{02},$$

$$\gamma = b_{20}A^3 - (a_{20} - b_{11})A^2B + (b_{02} - a_{11})AB^2 - a_{02}B^3,$$

$$\delta = a_{02}^2 + b_{20}^2 + a_{02}A + b_{20}B,$$

则当且仅当下列第 k 组条件成立时,原点是 $k(k=1,2,3)$ 阶细焦点.

1° $W_1\neq0$;

2° $W_1=0,W_2\neq0$;

3° $W_1=W_2=0,W_3\neq0$.

k 阶细焦点的稳定性由 $\operatorname{sgn}W_k$ 决定;$W_k<0$ 时稳定,$W_k>0$ 时不稳定.

当且仅当 $W_1=W_2=W_3=0$ 时,原点是中心点.

4.3　多项式系统的极限环

4.3.1　二次系统的极限环

(1)叶彦谦分类法　任一可能有极限环的二次系统必等价于下列三类方程之一.

1° $$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x.\end{cases}\tag{4-14}$$

2° $$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x(1+ax),a\neq0.\end{cases}\tag{4-15}$$

3° $$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2;\\ \dot{y}=x(1+ax+by),b\neq0.\end{cases}\tag{4-16}$$

(2)方程(4-14)当 $m(l+n)=0,\delta\neq0$ 或 $\delta m(l+n)>0$ 时无闭轨与奇闭轨;当 $\delta m(l+n)<0$ 且 $|\delta|\ll1$ 时存在唯一的极限环;对任意的 l,δ,n,方程(Ⅰ)至多有一个极限环.

(3)对方程(4-15)($a<0,m\neq0$)

1° 当 $m>-a>0$ 时,两指标 $+1$ 的奇点外围可同时存在极限环;

2° 当 $0<m<\frac{1}{a}-a$ 时,对 δ 在某一区间 (δ_1,δ_2),0 外围至少有两个极限环;对 δ 在另一区间 $(\overline{\delta_1},\overline{\delta_2})$,$R'$ 外围至少有两个极限环. 但只要 $0<m<-a,-a>1$,0 与 R' 外围不可能同时存在极限环;

3° 当 $a<m<0$ 时,0 与 R' 外围也不可能同时存在极限环;

4° 当 $m<a$ 时,R' 外围无极限环.

(4)对方程(4-15)($a<0$)

1° 若 $l\delta\geqslant0,|l|+|\delta|\neq0$,则全平面无闭轨;

2° 若 $l>0,a^2\geqslant2l+2\sqrt{l^2+4}$,或 $l>0,\delta-\frac{l}{a}\leqslant-\frac{a}{\delta}\left(1+\frac{l-4}{a^2+l}\right)$,则至多存在一个极限环(不稳定);

3° 若 $l<0,a^2+4l>4$,或 $l<0,\delta+\frac{a}{8}\leqslant\frac{l+\sqrt{l^2+4}}{4a}$,则至多存在一个极限环(稳定);

4° 当 $l\geqslant2a^2$ 时,如存在包围原点的极限环,则对某些 δ,它们至少有两个;

5° 在两指标 +1 的奇点外围不能同时存在极限环.

(5)对方程(4-15)($l>0,n=0$)

1° 若 $\delta\leqslant 0, 0\leqslant m<2$,或 $\delta\geqslant l$,或 $l(l+m\delta)\leqslant 0$,则全平面无环;

2° 若 $\delta=0, m\leqslant 0$,则原点外围无环;

3° 当 $\delta=0, m>2$ 且 $m-2\ll 1$ 时,或当 $m<2, 0<\delta\ll 1$ 时,在原点外围至少存在一个环;

4° 当 $\delta<0, m>2$ 且 $0<|\delta|\ll m-2\ll 1$ 时,在原点外围至少存在两个极限环;

5° 当 $\delta=0, m<-2$ 且 $|m+2|\ll 1$ 时,或当 $m=-2, 0<\delta\ll 1$ 时,在 R 外围至少存在一个环;

6° 当 $\delta\geqslant 0$ 或 $m<0$ 时,在原点外围至多存在一个环;

7° 当 $\delta=0$,或当 $0<m\leqslant 2$ 或当 $m>2, \frac{\delta}{l}>\frac{-1+\sqrt{4m-7}}{2m}$ 时,该方程至多存在一个环(稳定).

(6)如果方程(4-16)除了两个指标 +1 的焦点型奇点以外,还存在第三个有限远奇点,则极限环必集中分布;反之,如果方程(4-16)只有两个有限远的焦点型奇点,则极限环可能不是集中分布的.

(7)对方程(4-16)($a=0$).

1° 如 $n+l>0, m>0, l<0, 0<n\leqslant 1, m^2-4n(l+1)>0$,则当且仅当

$$0>\delta>\frac{l+n}{2n(l+1)}(-m+\sqrt{m^2-4n(l+1)})$$

时存在包围原点的极限环;

2° 如 $n+l<0, m>0, l>-1, 0<n<1, m^2-4n(l+1)>0$,则当且仅当

$$0<\delta<\frac{l+n}{2n(l+1)}(-m+\sqrt{m^2-4n(l+1)})$$

时存在包围原点的极限环;

3° 如 $n=0, m>0, -1\leqslant l<0, m^2+l>0$,则当且仅当

$$0<\delta<-\frac{l}{m}$$

时存在极限环;

4° 如 $n=0, m>0, -1\leqslant l<0, m^2+l\leqslant 0$,则当且仅当

$$0<\delta<-m+2\sqrt{-l}$$

时存在极限环.

(8)方程(4-16)($n=0$)至多存在一个极限环.

(9)有两条或三条积分直线的二次系统没有极限环,但可以有中心.

(10)有 $\geqslant 4$ 条积分直线的二次系统没有闭轨线.

(11)有一对共轭复积分直线的二次系统可能有极限环;若存在必为唯一.

(12)有椭圆解的二次系统若在椭圆上无奇点,则它是唯一的极限环.若椭圆上有奇点,则必有两个单奇点或一个鞍结点;这时二次系统无极限环,椭圆也不可能成为二次系统的有返回映射的分界线环.

(13)有双曲线解的二次系统无极限环.双曲线的一支或两支都可能成为二次系统的无限大分界线环的一部分.

(14)有抛物线解的二次系统可以有极限环,若存在必为唯一.

(15)有卵形三次曲线解的二次系统必可积,没有极限环.

注　其他性质参见 4.1.1 节.

4.3.2　n 次($n \geqslant 3$)系统的极限环

考虑 n 次多项式系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y + P_n(x,y); \\ \dot{y} = x + \alpha y + Q_n(x,y), \end{cases} \tag{4-17}$$

以及

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + P_n(x,y); \\ \dot{y} = \beta y + Q_n(x,y), \end{cases} \quad \alpha\beta > 0 \quad 或 \quad \alpha = \beta \neq 0, \tag{4-18}$$

其中 P_n, Q_n 为齐 $n \geqslant 2$ 次多项式.

把(4-17)和(4-18)化为极坐标方程

$$\begin{cases} \dot{r} = a(\theta) r + f(\theta) r^n; \\ \dot{\theta} = b(\theta) + g(\theta) r^{n-1}, \end{cases}$$

其中

$$f(\theta) = \cos\theta P_n(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta);$$
$$g(\theta) = \cos\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta Q_n(\cos\theta, \sin\theta),$$

而

$$a(\theta) = \alpha, b(\theta) = 1 \qquad (对于(4\text{-}17)式),$$
$$a(\theta) = \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta, b(\theta) = (\beta - \alpha)\cos\theta\sin\theta$$
$$(对于(4\text{-}18)式, \alpha\beta > 0, \alpha \neq \beta),$$
$$a(\theta) = \alpha, b(\theta) = 0$$
$$(对于(4\text{-}18)式, \alpha = \beta \neq 0).$$

令

$$F(\theta) = a(\theta)g(\theta) - b(\theta)f(\theta), A(\theta) = g(\theta)F(\theta),$$

则对于方程(4-17)和(4-18),成立下列四个结论.

(1)设在方程(4-17)和(4-18)中,$A(\theta)$不变号,则

1° 方程的任一闭轨必包围 $O(0,0)$.

2° 若 O 是非退化焦点或线性中心,则当 n 为偶数时方程最多有一个极限环;当 n 为奇数时最多有两个极限环.又若 $g(\theta)$不取零值,则方程至多一个极限环,且 n 必为奇数.

3° 若 O 是非退化结点,则当 n 为偶数时无环,当 n 为奇数时最多有两个环.

(2)设在方程(4-17)和(4-18)中 $F(\theta)$不变号,则 n 必为奇数,这时方程的任一闭轨必包围 O,且若 O 是非退化焦点或线性中心,则最多有一个极限环.

(3)设方程(4-17)和(4-18)在赤道上有无数多个奇点,若 O 是非退化焦点或线性中心,则当 n 为偶数时,方程不存在极限环;当 n 为奇数时,至多存在一个极限环.反之,若方程有一极限环,则 O 是唯一的有限远奇点,且赤道上充满了奇点.

(4)设方程(4-17)和(4-18)有唯一的有限远奇点和唯一的无穷远奇点,则

1° 若 n 为偶数,则当 O 为非退化奇点或线性中心时,方程最多有一个极限环;当 O 为非退化结点时不存在闭轨;

2° 若 n 为奇数,$g(\theta)<0$ 对某一 θ,且 O 是非退化焦点或线性中心,则方程最多只有一个极限环.

(5)方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+x^3-x^2 y \tag{4-19}$$

对一切 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,至多存在一个极限环;若存在,必为稳定环.

(6)方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+\varepsilon_3 x^2 y+x^3-x^4 y$$

对一切 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,至多存在两个极限环.

(7)方程

$$\dot{x}=x^2 y-x+b,$$
$$\dot{y}=-x^2 y+a\,(a>0,b>0)$$

的极限环存在唯一的充要条件为 $a-b>(a+b)^3$.

(8)三次系统

$$\dot{x}=\sum_{1\leqslant i+j\leqslant 3} a_{ij}x^i y^j,\quad \dot{y}=b_{10}x+b_{01}y \tag{4-20}$$

若有椭圆解,则至多有一个极限环,即椭圆本身.若有两条实直线解,则无环.若有双曲线解,则无环.若有一对共轭复直线解,则最多有一个极限环.

(9)三次科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)系统

$$\dot{x}=xP_2(x,y),\quad \dot{y}=yQ_2(x,y) \tag{4-21}$$

若有二次代数曲线解不与坐标轴相切,则必可积;没有极限环;若有非退化有心二次曲线解与两坐标轴相切,则可以存在极限环.

(10)有四条实积分直线的三次系统可以存在极限环.

(11)至少有五条实积分直线的三次系统不存在闭轨,但可以存在奇闭轨.而有两对共轭复直线解和一条实直线解的三次系统却可能有极限环.

参 考 文 献

1 Nemytskii V V, stepanov V V. Qualitative theory of differential equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1960.

2 Andronov A A. Theory of bifurcation of dynamical systems on a plane. New York: Wiley, 1973.

3 秦元勋.微分方程所定义的积分曲线.北京:科学出版社,1959.

4 叶彦谦等.极限环论(第二版).上海:上海科学技术出版社,1984.
5 张芷芬等.微分方程定性理论.北京:科学出版社,1985.
6 叶彦谦.多项式微分系统定性理论.上海:上海科学技术出版社,1995.
7 余澍祥等.常微分方程定性理论.广州:广东高等教育出版社,1996.

·近代数学卷·

第12篇

泛函微分方程

编　者　郑祖庥
审校者　廖晓昕

目　　录

引　言

对常微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{*}$$

其中 $x\in\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 或 $x\in\mathbf{R}^n$，只有一个自变量 t，在很多场合下 t 表示时间.用方程(*)来描述一个动力学系统，通常只是一种近似.因为一般地说时滞是不可避免的，即使以光速传递的信号也不例外.在近代的技术要求之下，略去滞量将失去必需的精确度甚至导致错误.另一种情况是，近年来不少自然科学与人文科学中不断涌现大量新的问题，这些问题的数学模型一经提出，就是带有时滞的微分方程，而不仅仅是精确度问题.总之，在动力学系统中引进时滞以后，方程(*)必须作出修正，例如

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau)),\quad \tau>0. \tag{**}$$

显然，处理方程(**)会带来许多新的困难，但也因此发展了数学的一个新分支——泛函微分方程.

在随后的发展过程中，像方程(**)这种带有时滞的微分方程进一步概括为更广泛的"滞后型泛函微分方程"，并且扩展了中立型、超前型、混合型以及具有复杂偏差的泛函微分方程类.但无论从理论或应用角度来看，时滞系统仍然是泛函微分方程的主体.

泛函微分方程的发展途径大体上与常微分方程平行，亦即有大致相同的研究课题.例如研究解的存在唯一性与连续依赖性的基本理论，稳定性、振动性、周期解与概周期解的存在性以及相对完整的线性系统理论.

1　概　　述

1.1　时滞微分方程

1.1.1　动力学系统中的时滞

考虑麻疹传播的数学模型

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\beta(t)s(t)[s(t-12)-s(t-14)-2r(t)]+r(t),$$

其中 $s(t)$ 表示在时刻 t 无免疫力的个体数目，$r(t)$ 是这种个体在人口中所占的比例，$\beta(t)$ 是人口特征函数，两个滞量 $\tau_1=12,\tau_2=14$ 分别为麻疹传染的潜伏期上限与下限，是不可以省略的.对于病愈有终生免疫力的传染病也有类似模型.而淋病的传播方程则为

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = g(s(t-\tau_1)) - g(s(t-\tau_2)), \quad \tau_1, \tau_2 > 0,$$

其中 g 是在某闭区间之外为零的非负函数.

米诺斯奇(Minorsky)给出的船艇摇摆运动方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x}(t) + q\dot{x}(t-\tau) + kx(t) = 0, \quad \tau > 0,$$

其中 τ 是采取镇定措施到生效的时滞.

在经济学中对资本主义经济的周期性危机有如下方程

$$\dot{u}(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(t), \quad \tau > 0.$$

这些都是时滞微分方程.注意到诸方程中同时出现有未知函数的微分与差分的项,所以也叫做"差分微分方程".与常微分方程一样,它们可以写成普遍的方程组形式,一个滞量的情形为

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0, x \in \mathbf{R}^n \tag{1-1}$$

m 个滞量的情形为

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)), \tau_i > 0, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{1-2}$$

1.1.2 初值问题的解

方程(1-1)的**基本初值问题**:给定初始时刻 t_0,在$[t_0-\tau, t_0]$上给定一个连续函数 $\varphi(t)$,要求方程(1-1)的一个解 $x(t)$ 在$[t_0-\tau, t_0]$上等于 $\varphi(t)$,在 $t \geqslant t_0$ 时满足方程(1-1),记为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)); \\ x = \varphi(t), t \in [t_0-\tau, t_0]. \end{cases} \tag{1-3}$$

区间$[t_0-\tau, t_0]$叫做初始集,以后记为 E_{t_0}.若 $\tau = 0$,则 $E_{t_0} = \{t_0\}$ 是一个单点集,即常微分方程的初值问题.为简单计,设 $t_0 = 0$ 时,解 $x(t)$ 定义在$[-\tau, +\infty)$上.

对多滞量方程(1-2),设 $\tau = \max\limits_{i=1,2,\cdots,m} \tau_i$,则初值问题写成

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)); \\ x = \varphi(t), t \in [t_0-\tau, t_0]. \end{cases} \tag{1-4}$$

方程(1-3)与(1-4)的解通常记为 $x(t, t_0, \varphi)$,或 $x(t_0, \varphi)(t)$,或 $x(t)$.

1.1.3 分步法求解方程(1-3)

设 $t_0 = 0$,求方程(1-3)在$[0,\tau]$上的解:由于 $t \in [0,\tau]$ 时 $t-\tau \in [-\tau, 0]$,此时 $x(t-\tau)$ 须用 $\varphi(t-\tau)$ 代入,得到一个常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), \varphi(t-\tau)); \\ x(0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{1-5}$$

方程(1-5)的解记为 $x_1(t), t \in [0,\tau]$.把 $x_1(t)$ 视为方程定义在$[0,\tau]$上已知的初始函数,可类似地求出方程(1-3)在$[\tau, 2\tau]$上的解 $x_2(t)$.如此继续下去可以使解延展到任意区间$[0, k\tau]$上,k 为任一正整数.如图1-1所示.

例1 在[0,2]上求解初值问题

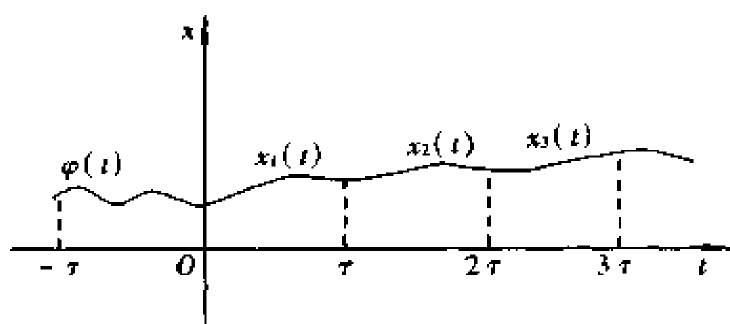


图 1-1

$$\dot{x}(t) = -x(t-1),$$
$$x = t, t \in [-1,0].$$

依上述做法在[0,1]上相应的方程(1-5)为 $\dot{x} = -(t-1) \Rightarrow$ 在[0,1]上 $x_1(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + c_1$，由 $\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$. 第二步，以 $t = 1$ 为初始时刻，在[1,2]上相应的方程(1-5)化为

$$\dot{x} = -\left[-\frac{1}{2}(t-1-1)^2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(t-2)^2 - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ 在[1,2]的解 $x_2(t) = \frac{1}{3!}(t-2)^3 - \frac{t}{2} + c_2$,

由 $x_1(1) = \frac{1}{2} = x_2(1) \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ 在[1,2]上的解 $x_2(t) = \frac{1}{3!}(t-2)^3 - \frac{t}{2} + \frac{2}{3}$.

例 2 对基本初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1); \\ x(t) = 1,\ t \in [0,1] \end{cases}$$

可用分步法求得解的普遍表示

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(t-n)^n}{n!}, \quad t \in [N, N+1], N = 0,1,\cdots$$

1.1.4 分步法求解方程(1-4)

多滞量初值问题(1-4)的求解过程与单滞量的情形一样，只不过每一步的延拓长度不再是 $\tau = \max_{i=1,2,\cdots,m} \tau_i$ 而是 $r = \min_{i=1,2,\cdots,m} \tau_i$.

例 3 设 $t_0 = 0, \tau_1 = r, \tau_2 = 3r, r > 0$，求初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(t-r) + bx(t-3r); \\ x = \varphi(t), t \in [-3r, 0] \end{cases}$$

在[0,3r]上的解. 其中 $a, b \in \mathbf{R}$. 由于 $\min\{\tau_1, \tau_2\} = r$，记 $\varphi(t)$ 在[-r,0],[-2r,-r],[-3r,-2r]上的限制为 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$，如图 1-2 所示.

在[0,r]上，解 $x(t)$ 的一段记为 $x_1(t)$，问题化为常微分方程的初值问题

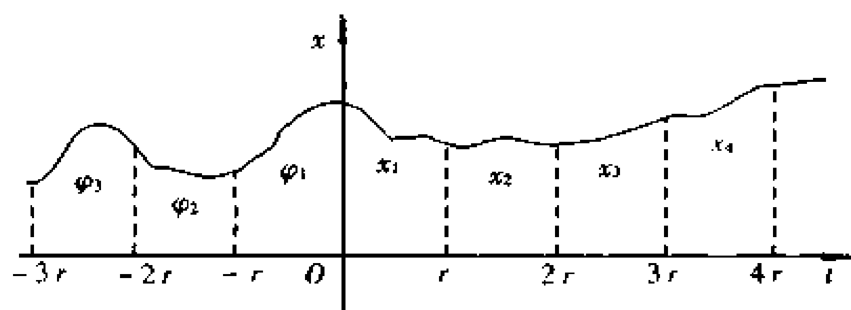


图 1-2

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = a\varphi_1(t-r) + b\varphi_3(t-3r), 0 \leqslant t \leqslant r;\\ x_1(0) = \varphi_1(0)(=\varphi(0)).\end{cases}$$

直接积分之便得 $x_1(t)$ 的解析表示.

在$[r,2r]$上,$x(t)$ 的一段记为 $x_2(t)$,相应的初值问题为

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t) = ax_1(t-r) + b\varphi_2(t-3r), r \leqslant t \leqslant 2r;\\ x_2(r) = x_1(r).\end{cases}$$

同理可直接积分得出 $x_2(t)$.类似地可得在$[2r,3r]$上解的一段 $x_3(t)$.

1.1.5　解的存在唯一性

由于在每一区间$[k\tau,(k+1)\tau]$(k为正整数)上问题(1-3)或(1-4)都化为常微分方程的初值问题,所以只要右端函数f满足类似于常微分方程的条件便可保证解的存在唯一性.

定理 1　设方程(1-3)(或(1-4))满足

1°f关于所有变元连续;

2°f关于$x(t)$满足局部利普希茨(Lipschtz)条件,

则方程(1-3)(或(1-4))的解存在且唯一.

可用分步法直接证明这一结论.

1.1.6　省略时滞问题

因为研究时滞微分方程远比处理常微分方程复杂,所以设法免除时滞的直接影响是工程技术工作中十分诱人的处理方式,例如不能简单地略去滞量.但这很容易出错,务必小心.

例 4　对一阶时滞方程 $\dot{x}(t) = -x(t-\tau), \tau > 0$,当 $\tau = 0$ 时,方程化为 $\dot{x} = -x(t)$,通解为 $x(t) = ce^{-t}$,c为任意常数,任何解都不振动.且都单调趋于0,当 $t \to \infty$,而 $\tau = \frac{\pi}{2}$ 时,有周期解 $\sin t$ 与 $\cos t$,当然它是振动的,非单调衰减的.反之有如下例子.

例 5　对二阶时滞方程

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{4}x(t-\tau) - (x(t-\tau) - x(t)) = 0.$$

当 $\tau=0$ 时,化为 $\ddot{x}(t)+\frac{1}{4}x(t)=0$,零解是中心,一切非零解振动,而当 $\tau=4\ln 2$ 时,有非振动解.因为相应的特征方程有实根 λ,而 $e^{\lambda t}$ 非振动.

可见,随便略去滞量可能会得出完全相反的结果.另一种很不妥当的做法是有人把 $x(t-\tau)$ 关于 τ 展开为麦克劳林级数,取其有限项代入方程使之化为常微分方程.

例 6 在第 3 章中将证明一阶方程

$$\dot{x}(t)=-2x(t)+x(t-\tau)\quad \tau=\text{const}>0$$

的零解是渐近稳定的,一切解是有界的.但若把 $x(t-\tau)$ 展为幂级数

$$x(t-\tau)=x(t)-\tau\dot{x}(t)+\frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t)-\cdots$$

取前三项到 $\ddot{x}(t)$ 为止.代入方程后得到一个常微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-2x(t)+\left(x(t)-\tau\dot{x}(t)+\frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t)\right)\\&=-x(t)-\tau\dot{x}(t)+\frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t).\end{aligned}$$

不论 τ 如何地小,它总存在指数解 $ce^{\lambda t}$,$\lambda>0$,c 是任意常数,其零解是不稳定的.正好相反.若只取头两项到 $\dot{x}(t)$ 为止,则原方程化为

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{1+\tau}x(t).$$

此时零解是渐近稳定的,与原方程的稳定性一致.这表明用这种办法必须给出合理的条件限制才可以进行.

1.1.7 其他求解方法

时滞微分方程很难求出解析解,除了分步法以外,对一些特别类型的方程可以寻求特别的求解方法.例如级数解法.

例 7 若 $\sigma=\text{const}>0$, $a\in\mathbf{R}$, $\lambda\in\mathbf{R}$ 是参数,方程

$$\dot{y}(t)=\lambda a e^t y(t-\sigma)$$

假定它有形式级数解 $y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(t)$,诸 $y_i(t)$ 是待定的,由它及 $\dot{y}(t)$ 代入方程比较系数可以确定 $y_i(t)$.又如毕奥(Biot)方程

$$\dot{x}(t)-\dot{x}(t-1)=t(x(t)-x(t-1))+\frac{1}{4}(x(t)-x(t-1))^2.$$

令

$$y=x(t)-x(t-1),$$

则方程化为一个常微分方程

$$\dot{y}(t)=ty(t)+\frac{1}{4}y^2(t).$$

求解这个方程得到 $y(t)$,代入差分方程 $y=x(t)-x(t-1)$ 后可迭代求解 $x(t)$.

此外,对常系数及固定滞量的方程也可以用拉普拉斯(Laplace)变换法求解.

1.2　偏差变元微分方程

1.2.1　偏差变元的定义与应用背景

在前面的讨论中,若 τ 是 t 的连续函数且 $\tau(t)\geqslant 0$,则 $\tau(t)$ 也是滞量,所以方程

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau(t)));\tag{1-6}$$

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\tag{1-7}$$

是更一般的时滞微分方程,其中 $t\in I\subset\mathbf{R},\tau(t)\geqslant 0$(或 $\tau_i(t)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m$).此时 $t-\tau<t$(或 $t-\tau(t)\leqslant t$)并非独立变元但不同于 t,称之为滞后于 t 或者偏离 t,所以称(1-1)式、(1-2)式、(1-6)式、(1-7)式为偏差变元微分方程是很自然的.即时滞微分方程是一种具有**偏差变元微分方程**.当 $\tau(t)\geqslant 0$ 不成立时,$t-\tau(t)$ 仍是一种**偏差变元**,例如 $\tau<0$ 或 $\tau(t)\leqslant 0$,相应地 $t-\tau>t$ 或 $t-\tau(t)\geqslant t$ 时方程便具有超前性质而不是时滞.方程

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t+\tau(t)))\quad \tau(t)\geqslant 0\tag{1-8}$$

便称为超前型微分方程.最一般的情形 τ 还可以是 $x(t)$ 乃至 $x(t)$ 各阶导数的函数.例如

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x))),\tag{1-9}$$

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x,\dot{x})))\tag{1-10}$$

等等.无论如何,在偏差变元微分方程中要指定一个基准变元,例如 t,其他变元是否偏差以及偏差多少都是同它比较的结果.

下面介绍几个基本概念.

偏差变元微分方程的阶是它所含未知函数的最高阶导数的阶.

所谓线性偏差变元微分方程是指方程中关于未知函数 $x(t),x(t-\tau_i(t))$ 以及 x 的各阶导数是一次的.例如 $\dot{x}=ax(t)+bx(t-\tau)$ 是线性的,而 $\dot{x}=x(t)\cdot x(t-1)$ 则是非线性的.

所谓自治(或定常)偏差变元微分方程是指方程中不显含 t,并且偏差是常数.例如方程(1-1)、(1-2)是自治的,而 $\dot{x}=x(t-\sin^2 t)$ 则是非自治的.

1.2.2　差分微分方程的分类

微分方程中偏差变元写成 $t-\tau(t)$,$\tau(t)$ 叫做偏差.这类具有偏差变元的微分方程通常叫做"差分微分方程"(differential difference equation)今后略称 DDE.

现在把 DDE 分为四种类型,先以一阶系统为例叙述分类的含义.

例8　对方程

$$a\dot{x}(t)+b\dot{x}(t-1)+cx(t)+dx(t-1)+ex(t+1)=0,\tag{1-11}$$

其中 $a,b,c,d,e\in\mathbf{R}$.分4种情况.

1° 若 $a\neq 0,b=0,e=0$,则方程(1-11)化为

$$a\dot{x}(t)+cx(t)+dx(t-1)=0.$$

其特点是最高阶导数(这里是 1 阶)没有出现偏差变元,并且偏差变元都小于基准变元,即 $t-1<t$.此时称为滞后型差分微分方程(retarded DDE),今后略称 **RDDE.**

2° 若 $a\neq 0, b=0, d=0$,方程(1-11)化为

$$a\dot{x}(t)+cx(t)+ex(t+1)=0,$$

其特点是最高阶导数(这里是 1 阶)没有出现偏差变元,并且偏差变元都大于基准变元,即 $t+1>t$ 此时称之为超前型差分微分方程(advanced DDE),今后略称 **ADDE.**

3° 若 $a\neq 0, b\neq 0, e=0$,方程(1-11)化为

$$a\dot{x}(t)+b\dot{x}(t-1)+cx(t)+dx(t-1)=0, \tag{1-12}$$

其特点是最高阶导数(这里是 1 阶)同时出现有偏差和无偏差变元.且方程中只有滞后变元而没有超前变元.此时称之为中立型差分微分方程(neutral DDE).今后略称 **NDDE.**

4° 若 $a\neq 0, d\neq 0, e\neq 0$,则方程(1-11)的特点是最高阶导数(这里是 1 阶)有无偏差变元,且同时出现有滞后变元和超前变元的项.这称之为混合型差分微分方程(compound DDE),今后略称 **CDDE.**

系数 a,b,c,d,e 的其他可能组合均可化为这 4 种情形之一.例如若方程(1-11)中 $a=0, b\neq 0, e=0$ 则它是方程

$$b\dot{x}(t-1)+cx(t)+dx(t-1)=0,$$

作代换 $s=t-1$,上式化为

$$b\dot{x}(s)+cx(s+1)+dx(s)=0$$

是一个 ADDE.若 c 也等于零,则变为常微分方程,凡此等等不再列出.

对更一般的方程可类似分类.

例 9 考虑方程

$$x^{(n)}(t)=f(t,x(t),\cdots,x^{(l_0)}(t),x(t-\tau),\cdots,x^{(l_1)}(t-\tau)), \tag{1-13}$$

其中 $l_0\leqslant n-1$, l_0, l_1 均为非负整数,则

1° 当 $l_1<n, \tau>0$ 时,方程(1-13)化为 RDDE;

2° 当 $l_1=n, \tau>0$ 时,方程(1-13)化为 NDDE;

3° 当 $l_1>n, \tau>0$ 时,方程(1-13)化为 ADDE.

显然,$l_1>n, \tau<0$ 时仍为 RDDE,$l_1<n, \tau<0$ 时仍为 ADDE.

1.2.3 NDDE 的初值问题

RDDE 的初值问题(1-3)及(1-4)中要求给定一个初始函数 $\varphi(t), t\in[t_0-\tau, t_0]$,这蕴含两个部分:除了与常微一样的初始时刻 t_0 时的 x 的值 $x(t_0)$,还包含 $[t_0-\tau, t_0)$ 上的函数 $\varphi(t)$,它表达了历史部分对未来状态的影响.这一构想对 NDDE 也一样,例如对中立型方程

$$\dot{x}=f(t,x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau)),\quad \tau>0, \tag{1-14}$$

给定初始时刻 t_0 后须设在$[t_0-\tau, t_0]$上存在连续可微函数 $\varphi(t)$ 使(1-14)式的初值问题写成

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)), \tau > 0; \\ x = \varphi(t), \dot{x} = \dot{\varphi}(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \tag{1-15}$$

其中 $\varphi(t)$ 在 $t_0 - \tau$ 及 t_0 处的导数分别为右导数和左导数. 方程(1-15)同样可用分步法求解.

例 10 求解初值问题

$$\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) - 2x(t) + x(t-1) = 0;$$
$$x(t) = t, \dot{x}(t) = 1, t \in [-1, 0].$$

其中 $\varphi(t) = t$. 在[0,1]上,用 $\varphi(t)$ 及 $\dot{\varphi}(t)$ 代入方程得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + 1 - 2x(t) + t - 1 = \dot{x}(t) - 2x(t) + t = 0; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

解这个非齐次常微分方程得到

$$x(t) = c_0 e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

由 $x(0) = 0$ 确定 $c_0 = -\frac{1}{4}$,所以在[0,1]上问题的解为 $x(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$. 同理可计算[1,2],[2,3],… 上的解.

对 ADDE 若沿负向求解,则完全与 RDDE 类似,若沿正向求解,它只是微分延拓,因而通常是不存在的,只有极个别的情形可延展到 $+\infty$. 此外依应用背景不同还有各种新的提法.

1.2.4 典型形式的 NDDE

中立型方程(1-12)可以写成

$$\frac{d}{dt}[ax(t) + bx(t-1)] = -[cx(t) + dx(t-1)].$$

左边是一个差分式(差分算子),这是 NDDE 的一种典型形式. 一般地,设 $D(t, x(t)x(t-\tau))$ 是一个差分算子,右边为 $f(t, x(t)x(t-1))$ 时,方程

$$\frac{d}{dt}D(t, x(t), x(t-\tau)) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1-16}$$

的初值问题中并不强求初始函数 $\varphi(t)$ 可微. 此时初值问题写成

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}D(t, x(t), x(t-\tau)) = f(t, x(t), x(t-\tau)); \\ x = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{cases} \tag{1-17}$$

注意到 NDDE(1-14)只有一部分可以写成方程(1-16)形式. 所以并不是总可以去掉对 $\varphi(t)$ 的可微性要求. 以后可以看出,方程(1-17)更接近于 RDDE 的初值问题.

1.2.5 初始集与滞效集

为简单计,只考虑 RDDE 的情形,NDDE 的情形可类似定义. 方程

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \tag{1-18}$$

其中 $\tau(t) \geqslant 0$ 连续.

定义 1 给定初始时刻 t_0,方程(1-18)的**初始集** E_{t_0} 和**滞效集** F_{t_0} 分别由下式定义:

$$E_{t_0} = \{t - \tau(t) : t - \tau(t) \leqslant t, t \geqslant t_0\} \cup \{t_0\}; \tag{1-19}$$

$$F_{t_0} = \{t : t - \tau(t) \leqslant t, t \geqslant t_0\}. \tag{1-20}$$

E_{t_0} 表示初始时刻以及对系统未来状态有影响的全部历史资料.换句话说,若系统的解存在且唯一,则只须在 E_{t_0} 上给定初始函数 $\varphi(t)$ 便可以完全确定系统的一个解.而 F_{t_0} 则表示滞量对未来状态的影响范围.若用分步法求解则每一步可延展的步长是由 F_{t_0} 决定的,步长由包含 t_0 且落在 F_{t_0} 中的最大连通区间的长度决定.若长度不等于零,则分步法可以进行.

若 $I \subset \mathbf{R}$ 是一个闭区间且 $E_{t_0} \subset I$,在 I 上的连续函数 $\varphi(t)$ 与 $\varphi(t)$ 在 E_{t_0} 上的限制决定系统的同一个解.换言之,在 $I - E_{t_0}$ 上 $\varphi(t)$ 的值对系统的解没有影响.

若 $\tau(t)$ 是无界函数,E_{t_0} 和 F_{t_0} 的构造可能相当复杂,但有时 $F_{t_0} = [t_0, +\infty)$,用分步法只需进行一次便可得$[t_0, +\infty)$上的解.

例 11 设 $\tau(t) = t - te^{-t}$,考虑方程

$$\dot{x}(t) = x(t) - x(te^{-t}). \tag{1-21}$$

若 $t_0 = 1$,则 $E_{t_0} = (0, e^{-1}] \cup \{1\}$, $F_{t_0} = [1, +\infty)$.

1.2.6 若干注释

1. 偏差变元 $g(t)$

在许多场合下记 $t - \tau(t) \xlongequal{\text{def}} g(t)$,则

$$g(t) \leqslant t \Leftrightarrow \tau(t) \geqslant 0, g(t) \geqslant t \Leftrightarrow \tau(t) \leqslant 0,$$

此时 RDDE(1-6)写成

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(g(t))), g(t) \leqslant t. \tag{1-22}$$

2. 平展性

RDDE 用分步法求解时由于积分次数不断增加,所以除了点 $k\tau$(k 为正整数)处的光滑性不变以外,$x(t)$ 的光滑性不断增加.这种性质叫做解的平展性.由 NDDE 的构造可以看出它通常不具备平展性.

3. 尚未确定初值问题的方程

类似(1-9),(1-10)的方程迄今尚无公认的初值问题提法,因而没有完整的基本理论.在应用中通常只沿用常微分方程的初值问题,而这并没有加以论证.另一类是混合型方程,如方程

$$\dot{x}(t) + ax(t-1) + bx(t+1) = 0 \tag{1-23}$$

就没有公认的初值问题提法.有一种做法是在$[t_0 - 1, t_0]$与$[T, T+1]$上分别给定连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$,要求一个在$[0, T]$上满足方程(1-23),在两端分别等于 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的解 $x(t)$.这类似于某种边值问题的提法.

4. 与偏微分方程的比较

综上分析，RDDE 沿正向求解类似于表述耗散过程的抛物型偏微分方程. NDDE 则类似于双曲型偏微分方程. 而混合型方程(1-23)可以认为类似于椭圆型偏微分方程.

1.2.7 解的存在唯一性定理

若 $\tau(t) \geqslant 0$ 而且存在 t^* 使 $\tau(t^*) = 0$，则当 $t_0 = t^*$ 时不可以用分步法，但我们仍可以直接证明初值问题解的存在唯一性. 例如考虑方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau(t))); \\ x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0} \subset [t_0 - r, t_0] = I. \end{cases} \tag{1-24}$$

由 1.2.5，不妨设 $E_{t_0} \subset [t_0 - r, t_0]$. 为简单计，设 $x \in \mathbf{R}$($x \in \mathbf{R}^n$ 的情形可类似证明)，记

$$|\varphi(t)| = \sup_{t \in I} |\varphi(t)| = m,$$

令 $d > 2m$，记 $D = \{(u, v): |u| + |v| \leqslant d\}$，$J = [t_0, +\infty)$，有

定理 2 若方程(1-24)中 f 满足：

1° 在 $J \times D$ 上 $f(t, u, v)$ 连续且 $|f(t, u, v)| < M = \text{const}$；

2° f 关于 u, v 满足利普希茨条件：

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leqslant L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|),$$

$$L = \text{const}' (u_i, v_i) \in D, \quad i = 1, 2,$$

则对 $A < \dfrac{d - 2m}{2M}$，方程(1-24)在$[t_0 - r, t_0 + A]$上存在唯一的连续解 $x(t, t_0, \varphi)$，它在$[t_0 - r, t_0]$上等于 φ，在$[t_0, t_0 + A]$上满足方程.

证明与常微分方程类似. 所用的逐步逼近序列为

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0; \\ \varphi(t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

$$x_{k+1}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 - r \leqslant t \leqslant t_0; \\ \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s), x_k(s - \tau(s)))\mathrm{d}s, \end{cases}$$

$$t \geqslant t_0, k = 0, 1, 2, \cdots$$

依次证明诸 $x_n(t)$ 仍在定义域内 → 证 $x_n(t)$ 一致收敛于解 $x(t)$ → 用利普希茨条件证明解的唯一性.

1.2.8 解唯一性的含义

以 RDDE(1-6)为例，设解在$[t_0 - \tau, +\infty)$上存在，把存在区间分为两个部分：$[t_0 - \tau, t_0]$ 和$[t_0, +\infty)$. 解的唯一性是说：若在$[t_0 - \tau, t_0]$上给定两个连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，当 $\varphi(t) = \psi(t)$，$t \in [t_0 - \tau, t_0]$ 时相应的解 $x(t, t_0, \varphi) = y(t, t_0, \psi)$，$t \geqslant t_0$. 这里并没有说当 $\varphi(t) \neq \psi(t)$ 时一定要成立 $x(t, t_0, \varphi) \neq y(t, t_0, \psi)$，

事实是 $x(t,t_0,\varphi)$，$y(t,t_0,\psi)$ 可以相交，甚至自某个时刻以后完全粘合在一起而不破坏唯一性. 这与常微分方程根本不同，因为常微分方程的两积分曲线在非奇点处是不能相交的.

例 12 对方程

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t-1), \tag{1-25}$$

$$b(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0; \\ \cos 2\pi t - 1, & 0 < t \leqslant 1; \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

显然 $b(t)$ 在 $\mathbf{R}_t$ 上连续.

当 $t \leqslant 0$ 时，令 $x(t) \equiv k = \text{const}$. 它是方程(1-25)在负半轴上的解(如图 1-3).

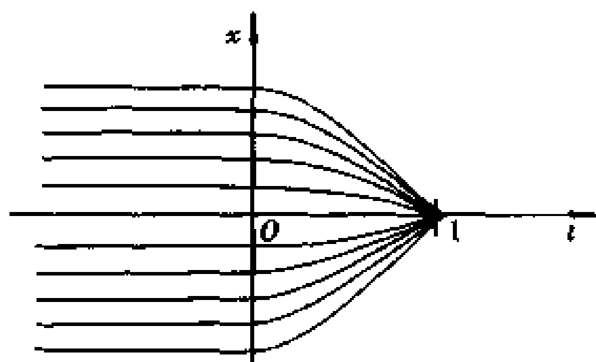


图 1-3

当 $t \in [0,1]$ 时，方程为

$$\dot{x}(t) = (\cos 2\pi t - 1)k, \quad x(0) = k,$$

积分之得

$$x(t) = k + k\int_0^t (\cos 2\pi t_1 - 1)\mathrm{d}t_1 = k\left(\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - t + 1\right);$$

$$x(1) = k + k\int_0^1 (\cos 2\pi t_1 - 1)\mathrm{d}t_1 = 0.$$

又 $t \geqslant 1$ 时 $b(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0, t \geqslant 1$. 即解自 $t \geqslant 1$ 以后完全与零解粘合. 但方程(1-25)满足解的存在唯一性定理(定理 1).

1.3 泛函微分方程

1.3.1 分布时滞与后效过程

在差分微分方程中，时滞以常数或者 t 的连续函数的形式出现，通常叫做“离散时滞”或者“离散滞量”，但在许多应用问题中时滞可能以连续分布的方式出现，例如设 $N(t)$ 为某一物种的总数，$N(t)$ 不仅依赖于 $t-\tau$ 时的种群数量，而且由整个历史过程中的因素决定，由此得

$$\dot{N}(t) = N(t)\int_0^{\infty} f(N(t-u),P(u))\mathrm{d}u, \tag{1-26}$$

其中 $P(u)$ 是概率分布函数，可以取弱核 $P(u) = k\mathrm{e}^{-au}$，也可以取强核 $P(u) = ku\mathrm{e}^{-au}$. 这便是一个分布时滞方程．又如设 $x\in\mathbf{R}$，$\sigma(t)\geqslant 0$ 时，方程为

$$\dot{x}(t) = \int_0^{\sigma(t)} a(t,\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1-27}$$

在一些物理与工程问题中，**分布时滞方程**所描述的过程叫做“**后效过程**”.

1.3.2　斯蒂尔切斯积分表示的方程

离散时滞系统与分布时滞系统之间并无相互包含关系，但可以在斯蒂尔切斯(Stieltjes)积分意义之下予以统一．为明确起见，以 $(s)\int$ 表示以区别于黎曼(Riemann)意义下的积分记号：考察方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (s)\int_0^r \boldsymbol{x}(t-\theta)\mathrm{d}_\theta\boldsymbol{\eta}(t,\theta), \tag{1-28}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{\eta}(t,\theta)$ 是 $n\times n$ 有界变差函数阵。若 $\boldsymbol{\eta}(t,\theta)$ 关于 θ 可微，则(1-28)式是一个分布滞量方程. 适当选择 $\boldsymbol{\eta}(t,\theta)$ 便可以把(1-28)式化为离散滞量的差分微分方程. 例如

$$\eta(t,\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = 0; \\ a, & 0<\theta<r; \\ a+b, & \theta = r, \end{cases}$$

则由方程(1-28)计算如下：

$$\dot{x}(t) = (s)\int_0^r x(t-\theta)\mathrm{d}_\theta\eta(t,\theta) = \int_0^r \eta'_\theta(t,\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta +$$

$$x(t-\theta)[\eta(t,\theta+0)-\eta(t,\theta)]_{\theta=0} + x(t-\theta)[\eta(t,\theta)-\eta(t,\theta-0)]_{\theta=r}.$$

由此得 $\dot{x} = ax(t) + bx(t-r)$，这是一个离散时滞方程.

分布滞量方程的分型法则完全类似于差分微分方程，不再重复.

1.3.3　两种解映射

以 RDDE 为例来说明积分曲线的两种表示方法. 考虑方程

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-r)), \tag{1-29}$$

其中 $x\in\mathbf{R}$(或 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$)，$r = \text{const} > 0$. 迄今为止，对(1-29)式无论是初值问题提法还是用分步法求解的过程，都是在 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$(或 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$)中描画它的积分曲线，如图1-1所示.

现在设初始时刻 $\sigma = 0$，则 $\forall t\in\mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$，可以从积分曲线上截取一段长度为 r 的曲线段表示为 $x(t+\theta)\overset{\text{def}}{=\!=}x_t$，$t\in[-r,0]$(如图1-4所示). 即每一个 t 的值与一个 $[-r,0]$ 上的连续函数 $x(t+\theta)$ 对应.

设 $C([-r,0],\mathbf{R})$(或 $C([-r,0],\mathbf{R}^n)$)是 $[-r,0]$ 上连续函数全体，简记之为 C，在 C 中定义范数 $|\cdot|$

$$\varphi \in C, |\varphi| = \sup_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|. \tag{1-30}$$

于是 C 是一个巴拿赫(Banach)空间，方程(1-29)的积分曲线在 C 中得到另一种表示(如图 1-5 所示).

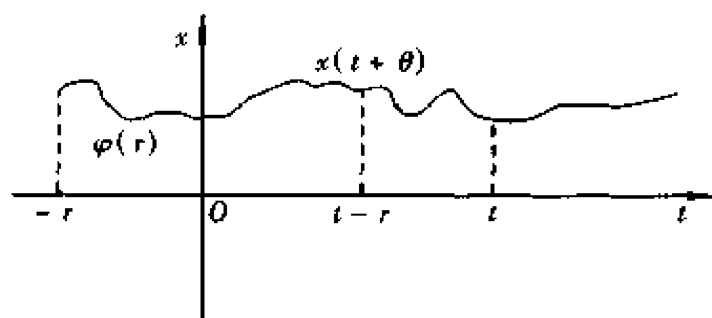


图 1-4

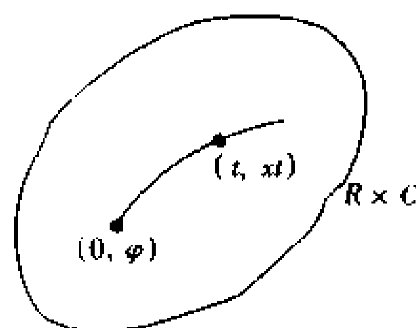


图 1-5

1.3.4 RFDE

现在设 $C([-r,0],\mathbf{R}^n) \xlongequal{\text{def}} C$，由上一节，定义范数(1-30)以后 C 是一个巴拿赫空间. 记初始时刻为 $\sigma, \sigma \in \mathbf{R}$. $A > 0$ 是指定的常数或为 $+\infty$，$\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$ 记"·"为右导数，$\boldsymbol{x}(t) \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbf{R}^n)$，同样记 $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_t(\theta) = \boldsymbol{x}(t+\theta), \theta \in [-r,0]$. $\Omega \subset \mathbf{R} \times C$ 是开集. f 是给定的算子，$\mathrm{f}: \Omega \to \mathbf{R}^n$，则

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{f}(t, \boldsymbol{x}_t) \tag{1-31}$$

叫做 Ω 上的"**滞后型泛函微分方程**"(retarded functional differential equation). 略称 **RFDE**. 有时为了强调(1-31)式的右端，记之为 RFDE(f).

这是一非常广泛的微分形式，它涵盖所有具有界滞后的滞后系统.

若选取算子 $\mathrm{f}(t,\varphi) = a\varphi(0) + b\varphi(-r)$，方程(1-31)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = a\boldsymbol{x}(t) + b\boldsymbol{x}(t-r), r \geqslant 0.$$

若取 $\mathrm{f}(t,\varphi) = \mathrm{f}(t, \varphi(0), \varphi(-r))$，则方程(1-31)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-r)), r \geqslant 0.$$

若取 $\mathrm{f}(t,\varphi) = \int_{-r}^{0} A(t,\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta$，则方程(1-31)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{-r}^{0} A(t,\theta)\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta.$$

对斯蒂尔切斯积分意义下的方程也包括在方程(1-31)之中. 例如取 $\mathrm{f}(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(\theta)\mathrm{d}_\theta R(t,\theta)$，则方程(1-31)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}_\theta R(t,\theta).$$

其中 f 中的 φ 用 $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}(t+\theta), \theta \in [-r,0]$ 代入，$\varphi(0) = \boldsymbol{x}(t+0) = \boldsymbol{x}(t), \varphi(-$

$r) = x(t-r)$,凡此等等.

1.3.5　NFDE

除了RFDE的各种记号以外,设 $\Omega \subset \mathbf{R}\times C\times C$ 为开集, $\dot{x}_t = \dfrac{\mathrm{d}x(t+\theta)}{\mathrm{d}t}$, $f:\Omega \to \mathbf{R}^n$ 是给定的算子,则方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t) \tag{1-32}$$

叫做中立型泛函微分方程(neutral FDE),以后简称NFDE.

若选取 $f(t,\varphi,\dot{\varphi}) = f(t,\varphi(0),\varphi(-r),\dot{\varphi}(-r))$,则有

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r), \dot{x}(t-r)).$$

若选取 $f(t,\varphi,\dot{\varphi}) = \int_{-r}^{0}[A(t,\tau)\varphi(-\tau) + B(t,\tau)\dot{\varphi}(-\tau)]\mathrm{d}\tau$,则(1-32)式化为

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0}[A(t,\tau)x(t-\tau) + B(t,\tau)\dot{x}(t-\tau)]\mathrm{d}\tau.$$

现在设 $\Omega \subset \mathbf{R}\times C$, $\mathrm{D}:\Omega \to \mathbf{R}^n$, $\mathrm{f}:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 为两个给定的算子,则方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{D}(t,x_t) = \mathrm{f}(t,x_t) \tag{1-33}$$

是一个典型形式的NFDE,有时记为NFDE(D,f).

若选取 $\mathrm{D}(t,\varphi) = a\varphi(0) + b\varphi(-r)$, $f(t,\varphi) = f(t,\varphi(0),\varphi(-r))$,则方程(1-33)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[ax(t) + bx(t-r)] = f(t, x(t), x(t-r)).$$

2　线性差分微分方程

2.1　基本性质

2.1.1　一维情形

对一阶RDDE,设 $a\neq 0, b, c, \tau > 0$ 皆为实数, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,引入线性算子 $\mathrm{L}(x)$ 为

$$\mathrm{L}(x) = a\dot{x}(t) + bx(t) + cx(t-\tau) = 0, \tag{2-1}$$

$$\mathrm{L}(x) = f(t). \tag{2-2}$$

与常微分方程类似,有如下6个性质.

1° 若 $x_1(t,t_0,\phi_1)$, $x_2(t,t_0,\phi_2)$ 是方程(2-1)的两个解, $\alpha,\beta\in R$,则 $\alpha x_1+\beta x_2$ 仍为方程(2-1)的解,记为

$$\mathrm{L}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\mathrm{L}(x_1) + \beta\mathrm{L}(x_2) = 0, t\in[t_0-\tau, +\infty),$$

其中 $\alpha x_1+\beta x_2=\alpha\psi_1+\beta\psi_2, t\in[t_0-\tau,t_0]$.

2° 若 $x(t,t_0,\psi)$ 为方程(2-1)的解，$\hat{x}(t,t_0,\hat{\psi})$ 为方程(2-2)的解，则 $x+\hat{x}$ 为方程(2-2)的解，即 $\mathrm{L}(x+\hat{x})=\mathrm{L}(x)+\mathrm{L}(\hat{x})=f(t), t\in[t_0-\tau,+\infty)$，其中 $x+\hat{x}=\psi+\hat{\psi}, t\in[t_0-\tau,t_0]$.

3°（叠加原理）设 $f_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,m)$ 诸方程

$$\mathrm{L}(x)=f_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

在初始条件 $x_i=\psi_i, t\in[t_0-\tau,t_0]$ 之下的解分别为 $x_i(t,t_0,\psi_i)$，则 $\sum_{i=1}^{m}x_i$ 是方程 $\mathrm{L}(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t)$ 在区间 $[t_0-\tau,+\infty)$ 上的解，且满足初始条件 $t\in[t_0-\tau,t_0]$ 时 $\sum_{i=1}^{m}x_i(t)=\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)$.

4° 若 a,b,c 是实数，f 为复函数，则方程(2-2)以 $\psi=\psi_u+\mathrm{i}\psi_v$ 为初始函数的解 $x(t,t_0,\psi)\xlongequal{\mathrm{def}}u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 的实部和虚部 u,v 分别为 $\mathrm{L}(x)=\mathrm{Re}f(t)$ 和 $\mathrm{L}(x)=\mathrm{Im}f(t)$ 的解，它们满足初始条件 $u=\psi_u, v=\psi_v, t\in[t_0-\tau,t_0]$.

5° 对方程(2-1)、(2-2)作变量的线性代换或自变量 t 的代换均使L保持线性性质.

6° 在 $[t_0-\tau,+\infty)$ 上选定方程(2-2)的解 $\hat{x}(t,t_0,\hat{\psi})$，$\hat{x}=\hat{\psi}, t\in[t_0-\tau,t_0]$，作代换 $x(t)=\hat{x}(t)+y(t)$，则可把方程(2-2)代为方程(2-1)，或者说新变量 $y(t)$ 满足方程(2-1)，若 $x(t)=\psi(t), t\in[t_0-\tau,t_0]$，则 $y(t)=\psi(t)-\hat{\psi}(t), t\in[t_0-\tau,t_0]$.

2.1.2　算子 L 的推广

对非自治线性系统、高阶线性系统与方程组的情形，由于不会混淆，仍用 L 表示算子.

1° 设 $a(t)\neq 0, \tau(t)\geqslant 0, b(t), c(t)$ 为 $t\in\mathbf{R}$ 的实函，记

$$\mathrm{L}(x)=a(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t)+c(t)x(t-\tau(t))=0,$$
$$\mathrm{L}(x)=f(t),$$

其中 $f(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 把 $[t_0-\tau,t_0]$ 换为 E_{t_0} 或者包含 E_{t_0} 的区间 $[t_0-r,t_0]$，则 2.1.1 中性质 1° ~ 6° 仍成立.

2° 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t)$ 为 $n\times n$ 实函数阵，$\det|\boldsymbol{A}(t)|\neq 0, \tau(t)\geqslant 0, t\in\mathbf{R}, \boldsymbol{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，记

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t-\tau(t))=\boldsymbol{0};$$
$$\mathrm{L}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}(t).$$

把 $[t_0-\tau,t_0]$ 换为 E_{t_0} 或包含 E_{t_0} 的区间 $[t_0-r,t_0]$，则 2.1.1 中性质 1° ~ 6° 仍成

立.

3° 多滞量高阶方程组

$$\begin{cases}L(x) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) x^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} B_{ij}(t) x^{(i)}(t - \tau_j(t)) = 0;\\ L(x) = F(t),\end{cases}$$

其中 $x, F \in \mathbf{R}^n$, $\tau_j(t) \geqslant 0$, $A_i(t)$、$B_{ij}(t)$ 都是 $n \times n$ 实函数阵($i = 0,1,2,\cdots,n-1$, $j = 1,2,\cdots,m$), $[t_0 - r, t_0] \supset E_{t_0}$,如2.1.1讨论可知1° ~ 6° 仍成立.

4° 中立型方程

$$\begin{cases}L(x) = \dot{x}(t) + A\dot{x}(t - \tau(t)) + Bx(t) + Cx(t - \tau(t)) = 0;\\ L(x) = F(t),\end{cases}$$

其中 $x, F \in \mathbf{R}^n$, $\tau(t) \geqslant 0$, A, B, C 为 $n \times n$ 实函数阵,在初始集 E_{t_0} 上,或者包含 E_{t_0} 的区间 $[t_0 - r, t_0]$ 上给定初始函数 φ,2.1.1中性质1° ~ 6° 仍成立.

2.1.3 线性 RDDE 解的估计

引理1 若 $u(t)$ 与 $\alpha(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续实函数, $\beta(t) \geqslant 0$, 在 $[a, b]$ 上可积且成立

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s) \mathrm{d}(s), \quad t \in [a, b], \tag{2-3}$$

则必有

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^t \beta(s_1)\mathrm{d}s_1\right) \mathrm{d}s. \tag{2-4}$$

若 $\alpha(t)$ 非减,则成立

$$u(t) \leqslant \alpha(t) \exp \int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s. \tag{2-5}$$

证 记 $R(t) = \int_a^t \beta(s) u(s) \mathrm{d}s$,则由方程(2-3)有

$$\dot{R}(t) = \beta(t)u(t) \leqslant \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)R(t);$$
$$\dot{R}(t) - \beta(t)R(t) \leqslant \beta(t)\alpha(t).$$

上式两边乘以 $\exp(-\int_a^t \beta(s_1)\mathrm{d}s_1)$,并把 t 改为 s 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[R(s)\exp(-\int_a^s \beta(s_1)\mathrm{d}s_1)] \leqslant \beta(s)\alpha(s)\exp(-\int_a^s \beta(s_1)\mathrm{d}s_1),$$

自 a 到 t 积分之,得

$$R(t) \leqslant \int_a^t [\beta(s)\alpha(s)\exp(\int_s^t \beta(s_1)\mathrm{d}s_1)]\mathrm{d}s$$

$\Rightarrow$ 方程(2-4)成立.若 α 非减,由方程(2-4)有

$$u(t) \leqslant \alpha(t)(1 + \int_a^t [\beta(s)\exp(\int_s^t \beta(s_1)\mathrm{d}s_1)]\mathrm{d}s)$$
$$= \alpha(t)(1 + \int_a^t (-\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(s_1)\mathrm{d}s_1})) = \alpha(t)\exp\int_a^t \beta(s)\mathrm{d}s.$$

对线性自治 RDDE

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t-\tau_i) + f(t), \tag{2-6}$$

其中 $x, f \in \mathbf{R}^n$, A、B_i 为 $n \times n$ 常数阵, $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的范数, 但 $|\varphi| = \sup_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|$, $r = \max_{i=1,\cdots,m} \tau_i$, φ 为初始函数, $\|\cdot\|$ 为矩阵的模, 即 $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

定理 1 若方程(2-6)过(t_0, φ)的解为 $x(t, t_0, \varphi)$, 则存在正常数 α、β 使

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leqslant \alpha e^{\beta t}(|\varphi| + k\int_0^t |f(s)| ds),$$

成立, 其中 $t \geqslant 0$, $k = \alpha^{-1}$.

证 不妨设 $t_0 = 0$, 解 $x(t) = x(t, 0, \varphi)$, 由方程(2-6)有

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t Ax(s) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} B_i x(s-\tau_i) ds + \int_0^t f(s) ds.$$

注意到 $t \in [-r, 0]$ 时 $x(t) = \varphi(t)$, 当 $t \geqslant 0$、有

$$|x(t)| \leqslant |\varphi(0)| + \int_0^t |f(s)| ds + \int_0^t \|A\| |x(s)| ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{-\tau_i}^{t} \|B\| |x(s)| ds,$$

其中

$$\int_{-\tau_i}^{t} \|B_i\| |x(s)| ds = \int_0^t \|B_i\| |x(s)| ds + \int_{-\tau_i}^{0} \|B_i\| |x(s)| ds \leqslant \int_0^t \|B_i\| |x(s)| ds + \tau_i \|B_i\| |\varphi|.$$

再注意到 $|\varphi(0)| \leqslant |\varphi| = \sup_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|$, 则有

$$|x(t)| \leqslant [(1 + \sum_{i=1}^{m} \|B_i\| \tau_i)|\varphi| + \int_0^t |f(s)| ds] + \int_0^t (\|A\| + \sum_{i=1}^{m} \|B_i\|)|x(s)| ds.$$

由引理 1 并记

$$\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \|B_i\|, \beta = \|A\| + \sum_{i=1}^{m} \|B_i\| \geqslant 0,$$

立即推出定理结论成立.

推论 1 若 $f(t) \equiv 0$ 则定理的结论为

$$|x(t)| \leqslant \alpha e^{\beta t} |\varphi|.$$

2.1.4 线性 NDDE 解的估计

考虑中立型方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)-cx(t-\tau)]=Ax(t)+Bx(t-\tau)+f(t). \qquad (2\text{-}7)$$

定理 2 设方程(2-7)的解为 $x(t)=x(t,t_0,\varphi)$，则存在常数 α,β 使成立

$$|x(t,t_0,\varphi)|\leqslant \alpha e^{\beta t}(|\varphi|+k\int_{t_0}^{t}|f(s)|\mathrm{d}s),\alpha=\frac{1}{k},t\geqslant t_0.$$

证明与定理1类似.

2.2 特征方程及其根链

2.2.1 一阶 RDDE

对方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau), \qquad (2\text{-}8)$$

其中 $a,b,\tau>0$ 为常数，与常微分方程一样假定它具有形如 $e^{\lambda t}$ 的解，代入方程(2-8)得到

$$h_1(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}=0.$$

此式叫做方程(2-8)式的特征方程. $h_1(\lambda)$ 是超越函数，故 $h_1(\lambda)$ 通常有可列个零点而且零点是孤立的. 容易验证当 λ 为 $h_1(\lambda)$ 的零点时，$e^{\lambda t}$ 为(2-8)的解，并且零点的全体 $\{\lambda_j\}$ 有如下分布方式.

定理 3 对 $h_1(\lambda)$，存在 $\beta\in\mathbf{R}$ 使 $\mathrm{Re}\lambda_j<\beta,j=1,2,\cdots$ 并且在任一条形域 $\alpha_0\leqslant \mathrm{Re}\lambda\leqslant\beta_0(\alpha_0,\beta_0\in\mathbf{R})$ 中只有有限个零点.

证 若不然，把 $h_1(\lambda)=0$ 写成 $\lambda-a=be^{-\lambda\tau}$ 两边取模得

$$|\lambda-a|=|b|e^{-\tau\mathrm{Re}\lambda}. \qquad (2\text{-}9)$$

若诸 λ_j 的实部 $\mathrm{Re}\lambda_j\to\infty\Rightarrow$(2-9)式左边 $|\lambda_j-a|\to\infty$，右边 $|b|e^{-\tau\mathrm{Re}\lambda_j}\to 0\Rightarrow$ 矛盾. 故 β 存在. 若在条形域 $\alpha_0\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant\beta_0$ 中 $|\lambda_j|\to\infty$，则(2-9)式左边 $|\lambda_j-a|\to\infty$ 而右边小于某个常数 $\Rightarrow$ 矛盾，即此条形域中成立 $A\leqslant\mathrm{Im}\lambda_j\leqslant B$，由零点的孤立性 $\Rightarrow h_1(\lambda)$ 在此条形域中只有有限个零点.

$\{\lambda_j\}$ 叫做 $h_1(\lambda)=0$ 的根链，它的分布状况决定了解的性态，特别是稳定性.

2.2.2 一阶 ADDE

设 $a,b,\tau>0$ 为常数，方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t+\tau). \qquad (2\text{-}10)$$

与 RDDE 类似，相应的特征方程为

$$h_2(\lambda)=\lambda-a-be^{\lambda\tau}=0.$$

同理它的可列个零点 $\{\lambda_j\}$ 构成 $h_2(\lambda)=0$ 的根链，它的分布状况是：

定理 4 对 $h_2(\lambda)$，存在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 使 $\mathrm{Re}\lambda_j>\alpha,j=1,2,\cdots$ 并且在任一条形域 $\alpha_0\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant\beta_0(\alpha_0,\beta_0\in\mathbf{R})$ 中只有有限个零点.

证 把 $h_2(\lambda)=0$ 写成 $\lambda-a=be^{\lambda\tau}$，两边取模得

$$|\lambda - a| = |b| e^{\tau \mathrm{Re}\lambda},$$

与定理3类似推得所述结论.

2.2.3　一阶 NDDE

同样设 $a, b, c, \tau > 0$ 为常数,方程

$$\dot{x}(t) + c\dot{x}(t - \tau) = ax(t) + bx(t - \tau). \tag{2-11}$$

相应的特征方程为

$$h_3(\lambda) = \lambda + c\lambda e^{-\lambda\tau} - a - be^{-\lambda\tau} = 0.$$

它的根链 $\{\lambda_j\}$ 的分布状况是:

定理 5　对 $h_3(\lambda)$,存在 α, β 使 $\alpha < \mathrm{Re}\lambda_j < \beta$,对 $A, B \in \mathbf{R}$,在 $A < \mathrm{Im}\lambda < B$ 中只有有限个零点.

证　把 $h_3(\lambda) = 0$ 改写并两边取模得

$$e^{\tau \mathrm{Re}\lambda} \left| 1 - \frac{a}{\lambda} \right| = \left| \frac{b}{\lambda} - c \right|, \quad c \neq 0, \tag{2-12}$$

其中设 $\lambda \neq 0$(即使 $\lambda = 0$ 是 $h_3(\lambda) = 0$ 的一个根也不影响结论). 若 $\mathrm{Re}\lambda_j \to +\infty \Rightarrow$(2-12)式左边 $\to +\infty$,而右边 $\to |c| \Rightarrow$ 矛盾. 若 $\mathrm{Re}\lambda_j \to -\infty$,则(2-12)左边 $\to 0$,右边 $\to |c| \neq 0 \Rightarrow$ 矛盾. $\Rightarrow \alpha, \beta$ 存在. 再由零点的孤立性 $\Rightarrow$ 在 $A < \mathrm{Im}\lambda < B$ 中只有有限个零点.

2.2.4　一阶 CDDE

设混合型方程

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) + bx(t + \tau) \tag{2-13}$$

中 $a, b, \tau > 0$ 为常数,它的特征方程为

$$h_4(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda\tau} - be^{\lambda\tau}, \tag{2-14}$$

它的根链 $\{\lambda_j\}$ 的分布状况如定理6表述.

定理 6　$h_4(\lambda)$ 的零点分布在全面上,即存在子序列 $\{\lambda'_j\}$ 与 $\{\lambda''_j\}$ 使 $\mathrm{Re}\lambda'_j \to -\infty$, $\mathrm{Re}\lambda''_j \to +\infty$,当 $j \to \infty$,但在任一条形域

$$\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta_0 (\alpha_0, \beta_0 \in \mathbf{R})$$

中只有有限个零点.

证　对(2-13)式,记 $\lambda - ae^{-\lambda\tau}$ 的零点序列为 $\{\lambda_j^{(1)}\}$,则 $\mathrm{Re}\lambda_j^{(1)} \to -\infty$, $j \to +\infty$. 再记 $\lambda - be^{\lambda\tau}$ 的零点序列为 $\{\lambda_j^{(2)}\}$,则 $\mathrm{Re}\lambda_j^{(2)} \to \infty$, $j \to \infty$. 再记 $h_4(\lambda)$ 的零点全体为 $\{\lambda_j\}$. $\forall \epsilon > 0$,存在 $N(\epsilon)$ 充分大,使当 $j > N$ 时 $\{\lambda_j\}$ 有子序列 $\{\lambda'_j\} \subset \{\lambda_j\}$ 且满足 $|\lambda'_j - \lambda_j^{(1)}| < \epsilon$. 以及另一子序列 $\{\lambda''_j\} \subset \{\lambda_j\}$ 满足 $|\lambda''_j - \lambda_j^{(2)}| < \epsilon$. 即得定理的第一部分. 后一部分由零点的孤立性推出.

2.2.5　n 阶系统的相应结果

设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为 $n \times n$ 常数阵, $\tau = \mathrm{const} > 0$,考虑4类自治线性 DDE

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t - \tau)$,　RDDE

(2) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t+\tau)$, ADDE

(3) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\dot{x}(t-\tau)$, NDDE

(4) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Dx(t+\tau) + C\dot{x}(t-\tau)$. CDDE

记 I 为 $n \times n$ 单位阵,则相应的特征方程为

$$H_1(\lambda) = \det|\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0,$$

$$H_2(\lambda) = \det|\lambda I - A - De^{\lambda\tau}| = 0,$$

$$H_3(\lambda) = \det|\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau} - C\lambda e^{-\lambda\tau}| = 0,$$

$$H_4(\lambda) = \det|\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau} - C\lambda e^{-\lambda\tau} - De^{\lambda\tau}| = 0.$$

对 $H_1(\lambda) \sim H_4(\lambda)$,定理3~定理6的结论均可依次推广.

2.2.6 分类法则的数学特征

综合上面关于特征方程的根链在复平面上的分布定理,可以把线性自治DDE的特征方程根链归纳为3种类型.

(1) $\{\lambda'_j\}$, $\mathrm{Re}\lambda'_j \to -\infty$.

(2) $\{\lambda''_j\}$, $\mathrm{Re}\lambda''_j \to +\infty$.

(3) $\{\lambda'''_j\}$,存在常数 α, β 使 $\alpha < \mathrm{Re}\lambda'''_j < \beta$,但 $|\lambda'''_j| \to +\infty$.

于是定理3~定理6可以说成:

若特征方程只存在(1)型根链,则对应的方程是RDDE;

若特征方程只存在(2)型根链,则对应的方程是ADDE;

若特征方程的根链属于下述两种情况之一,

① 只有(3)型根链,

② 只有(1)型与(3)型根链,

则对应的方程即为NDDE;

此外,对特征方程的根链的其他组合,都对应于CDDE.

中立型名称的由来.

RDDE的根链必在复平面上某一平行于虚轴直线的左半平面,而ADDE正好相反,必在某一平行于虚轴直线的右半平面上.NDDE的根链则落在复平面的一个条形区域 $\alpha \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \beta$ 中,既不偏向左边也不偏向右边,所以称之为"中立型",这是很自然的事.

特征根只有有限个的DDE.

在前面关于特征根的叙述中曾提到:一般地说诸 $h_i(\lambda)$ 有可列个根,这个结论是基于亚纯函数的性质.这里存在非一般的极个别的例外情形,即特征根只有有限个的情形.

例1 考虑二维系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix},$$

它的特征方程为 $h(\lambda) = \lambda^2 = 0$,只有一个重根 $\lambda = 0$.

2.3 自治差分微分方程的通解

2.3.1 用拉普拉斯变换法求解 DDE

与常微分方程类似,可以用拉普拉斯变换法求解线性自治 DDE. 这里用几个例子予以说明

例 2 求解 RDDE 的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1); \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-1,0]. \end{cases}$$

对方程两边施行拉普拉斯变换,即乘以 $e^{-\lambda t}$ 从 0 到 ∞ 积分之,得

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty x(t-1)e^{-\lambda t}dt.$$

上式左边用 L 变换的微分性质. 右边作代换 $t' = t-1$, 并记 $x(t)$ 的 L 变换式为 $L[x(t)]$. 得

$$(\lambda - e^{-\lambda})L[x(t)] = x(0) + e^{-\lambda}\int_{-1}^0 x(t)e^{-\lambda t}dt.$$

设 $\lambda - e^{-\lambda} \neq 0$, 由 $t \in [-1,0]$ 时 $x(t) = \varphi(t)$ 有

$$L[x(t)] = \frac{x(0)}{\lambda - e^{-\lambda}} + \frac{1}{\lambda e^{\lambda} - 1}\int_{-1}^0 \varphi(t)e^{-\lambda t}dt. \tag{2-15}$$

用反演公式得到

$$x(t) = \int_{(c)} \frac{x(0)}{\lambda e^{\lambda} - 1}e^{\lambda t}d\lambda + \int_{(c)} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda e^{\lambda} - 1}\left(\int_{-1}^0 \varphi(s)e^{-\lambda s}ds\right)d\lambda,$$

其中 $x(0) = \varphi(0)$. 上式表明 $x(t)$ 依赖于 $\varphi(t)e^{-\lambda t}$ 在区间 $[-1,0]$ 上的积分值. 当 φ 取一些较为特别的函数时,有可能由(2-15)式查表得出 $x(t)$ 的解析表示.

例 3 求解初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) + 1; \\ x(t) = 0, t \in [-1,0]. \end{cases}$$

对方程施行 L 变换并把初值代入得

$$L[x(t)] = L[x(t)]e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda},$$

$$L[x(t)] = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda}/\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda}}{\lambda^2} + \cdots + \frac{e^{-n\lambda}}{\lambda^n} + \cdots\right).$$

查表得

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \cdots +$$

$$\frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\eta(t-n) + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k),$$

其中 $t \geqslant 0$,且

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geqslant a; \\ 0, & t < a. \end{cases}$$

例4 求解NDDE的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-\tau) + \dot{x}(t-\tau); \\ x(t) = \varphi(t), \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

同样对方程施行L变换得

$$-x(0) + \lambda \mathrm{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t-\tau)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \dot{x}(t-\tau)\mathrm{e}^{-\lambda \tau}\mathrm{d}t. \quad (2\text{-}16)$$

上式右边作变量代换 $t_1 = t - \tau$ 则右边为

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\int_0^{\infty} x(t_1)\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1 + \int_{-\tau}^0 \varphi(t_1)\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1 +$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\int_0^{\infty} \dot{x}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1 + \int_{-\tau}^0 \dot{\varphi}(t_1)\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1]$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\lambda \mathrm{L}[x(t)] - x(0) + \mathrm{L}[x(t)] +$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\int_{-\tau}^0 (\varphi(t_1) + \dot{\varphi}(t_1))\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1],$$

故(2-16)式化为

$$(\lambda - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau})\mathrm{L}[x(t)] = x(0)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}) +$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}[\int_{-\tau}^0 (\varphi(t_1) + \dot{\varphi}(t_1))\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1];$$

$$x(t) = \int_c h^{-1}(\lambda)\{x(0)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}) + \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^0 (\varphi(t_1) + \dot{\varphi}(t_1))\mathrm{e}^{-\lambda t_1}\mathrm{d}t_1\}.$$

若 $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$,则上式化为

$$x(t) = \int_c h^{-1}(\lambda)(1 - \mathrm{e}^{\lambda\tau})(1 + \frac{1}{\lambda})\mathrm{d}\lambda,$$

其中

$$h(\lambda) = \lambda - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau}.$$

2.3.2 RDDE的基础解

考虑一阶RDDE

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau), \quad (2\text{-}17)$$

其中 $a, b, \tau > 0$ 皆常数,其特征方程为

$$h_1(\lambda) = \lambda - a - b\mathrm{e}^{-\lambda\tau} = 0.$$

如上所述,$h_1(\lambda) = 0$ 的可列个零点 $\{\lambda_j\}$ 对应了原方程的一列解 $\mathrm{e}^{\lambda_j t}$.由2.1的基本性质推知诸 $\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ 的任何有限组合 $c_1\mathrm{e}^{\lambda_{i_1}t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_{i_2}t} + \cdots + c_m\mathrm{e}^{\lambda_{i_m}t}$ 仍是方程的解.不仅如

此，$e^{\lambda_i t}$ 的无穷组合 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\lambda_i t}$ 只要收敛，也是方程的解．但是，仍无法证明方程的一切解均可由 $\{e^{\lambda_i t}\}$ 的适当线性组合表示，亦即无法直接推广常微分方程的已知结果，但可以用 L 变换给出一种通解的表示．为此，须给出 RDDE 的**基础解**定义．

定义 1 由于方程(2-17)是自治的，不妨设 $t_0 = 0$，称初始条件

$$x(t) = \varphi_0(t) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant t < 0; \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{2-18}$$

所决定的解叫做方程(2-17)的基础解，记为

$$X(t) = X(t, 0, \varphi_0).$$

用分步法可以证明 $X(t)$ 存在且唯一，并且 2.1.3 中的指数估计仍成立．此外 $X(t)$ 在任何紧集上是有界变差的．故有

定理 7 方程(2-17)的基础解 $X(t)$ 满足

$$X(t) = \int_c h_1^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, t > 0, \tag{2-19}$$

$$\mathrm{L}[X(t)] = h_1^{-1}(\lambda),$$

其中 $c > b$，b 是 $X(t)$ 的指数界限．

证 由方程(2.17)两边施行拉普拉斯变换得

$$\int_0^{\infty} \dot{x}(t) e^{-\lambda t} dt = a\int_0^{\infty} x(t) e^{-\lambda t} dt + b\int_0^{\infty} x(t-\tau) e^{-\lambda t} dt.$$

注意到在 $[-\tau, 0)$ 上 $\varphi = 0$，有

$$h_1^{-1}(\lambda)\mathrm{L}[X(t)] = X(0) = 1$$

或

$$\mathrm{L}[X(t)] = h_1^{-1}(\lambda).$$

由反演公式即得(2-19)式．

2.3.3 RDDE 的通解

利用 2.3.2 定义的基础解给出(2-17)式的通解的 L 变换式．

定理 8 方程(2-17)的通解可表示成

$$x(t, 0, \varphi) = X(t)\varphi(0) + b\int_{-\tau}^{0} X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta) d\theta. \tag{2-20}$$

证 $\forall \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$，由方程(2-17)两边施行 L 变换，并把 φ 代入得

$$\lambda \mathrm{L}[x] - x(0) = a\mathrm{L}[x(t)] + b e^{-\lambda\tau}\mathrm{L}[x(t)] + b e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} \varphi(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta,$$

整理得

$$h_1(\lambda)\mathrm{L}[x] = \varphi(0) + b e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} \varphi(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta$$

或

$$L[x(t)] = h_1^{-1}(\lambda)\varphi(0) + b h_1^{-1}(\lambda) e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} \varphi(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta. \tag{2-21}$$

由(2-21)式求逆变换左边即 $x(t)$，右边第一项即 $X(t)\varphi(0)$，右边第二项的计算稍

为复杂一点,为此定义 $\omega:[-\tau,+\infty)\to[0,1)$ 如下

$$\omega(\theta)=\begin{cases}0, & \theta\geqslant 0;\\ 1, & \theta<0,\end{cases}$$

再把初始函数扩充定义为

$$\widehat{\varphi}(\theta)=\begin{cases}\varphi(\theta), & \theta\in[-\tau,0);\\ \varphi(0), & \theta\geqslant 0.\end{cases}$$

此时右边第二项写成

$$\begin{aligned}&bh_1^{-1}(\lambda)e^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{\infty}\widehat{\varphi}(\theta)\omega(\theta)e^{-\lambda\theta}d\theta\\ &=bh_1^{-1}(\lambda)\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}\widehat{\varphi}(s-\tau)\omega(s-\tau)ds\\ &=bL[\varphi(s-\tau)\omega(s-\tau)h_1^{-1}(\lambda)].\end{aligned}$$

由卷积定理 ⇒

$$b\int_0^t X(t-t_1)\widehat{\varphi}(t_1-\tau)\omega(t_1-\tau)dt_1=b\int_0^t X(t-t_1)\varphi(t_1-\tau)dt_1.$$

令 $t_1=\tau+\theta$,上式即化为 $\int_{-\tau}^0 bX(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)d\theta$.

2.3.4 RDDE 的常数变易法

同时考虑齐次和非齐次 RDDE,除方程(2-17)外,方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+f(t), \tag{2-22}$$

其中 $f(t)$ 可积且 $|f(t)|\leqslant a_0e^{b_0t}$, $a_0,b_0\in\mathbf{R}$.所以对非齐次方程(2-22)可施行 L 变换.记相应的齐次方程的基础解为 $X(t)$,通解记为 $x(t,0,\varphi)$ 由(2-20)式表示.

定理 9 记方程(2-22)的通解为 $x^*(t,0,\varphi)$,则有

$$x^*(t,0,\varphi)=x(t,0,\varphi)+\int_0^t X(t-s)f(s)ds. \tag{2-23}$$

证 对方程(2-22)两边施行拉普拉斯变换,与定理 8 的做法类似,可得

$$L[x^*]=h_1^{-1}(\lambda)[\varphi(0)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-\lambda\theta}\varphi(\theta)d\theta]+h_1^{-1}(\lambda)L[f].$$

由(2-21)式及 $h_1^{-1}(\lambda)=L[X(t)]$,得

$$L[x^*]=L[x]+L[x]L[f]. \tag{2-24}$$

对(2-24)式用反演公式和卷积定理便可推出(2-23)式.

2.3.5 NDDE 的相应结果

对 NDDE 的齐次与非齐次方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau); \tag{2-25}$$

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+c\dot{x}(t-\tau)+f(t), \tag{2-26}$$

其中 $a,b,c,\tau>0$ 为常数,$f(t)$ 有指数估计.方程(2-25)的特征方程为

$$h_2(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}-\lambda ce^{-\lambda\tau},$$

与 2.3.2 类似定义方程(2-25)的基础解,同一初值问题得到的解也记为 $X(t)$ 则

$$X(t)=\int_c h_2^{-1}(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda \text{ 或 } L[X(t)]=h_2^{-1}(\lambda).$$

c 为 $X(t)$ 的指数估计上限，证明类似.

定理 10 设 $X(t)$ 为方程(2-25)的基础解，$x(t,0,\varphi)$ 是方程(2-25)以 φ 为初始函数的解，则通解公式为

$$x(t,0,\varphi) = X(t)[\varphi(0) - c\varphi(-\tau)] + b\int_{-\tau}^{0} X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta +$$

$$c\varphi(t-\tau)\omega(t-\tau) + c\int_{-\tau}^{0} \dot{X}(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{2-27}$$

其中对 $\theta < 0, \omega(\theta) = 1, \theta \geqslant 0, \omega(\theta) = 0$. 若 $t \geqslant \tau$，则出现含有 ω 的项. 若 $t < \tau$，则这种项为 $c\varphi(t-\tau)$. 它正好是斯蒂尔吉斯积分 $-\int_{-\tau}^{t-\tau}[\mathrm{d}X(t-\theta-\tau)]\varphi(\theta)$ 的值. 所以 $x(t,0,\varphi)$ 的表达式(2-27)可写成

$$\begin{aligned} x(t,0,\varphi) = {} & X(t)[\varphi(0) - c\varphi(-\tau)] + \\ & b\int_{-\tau}^{0} X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta - c\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}X(t-\theta-\tau)]\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{2-28}$$

证明与 RDDE 的情形类似. 同理有常数变易公式.

定理 11 对非齐次 NDDE. 若 $\tilde{x}(t,0,\varphi)$ 为(2-26)式的过$(0,\varphi)$的解，$x(t,0,\varphi)$ 是方程(2-25)的通解，$X(t)$ 是它的基础解，则有

$$\tilde{x}(t,0,\varphi) = x(t,0,\varphi) + \int_{0}^{t} X(t-s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{2-29}$$

2.3.6 解的精确指数界限

定理 12 设 RDDE(2-17)的特征根全体为 $\{\lambda_j\}$，$\alpha_0 = \max\{\mathrm{Re}\lambda_j\}$，则 $\forall \alpha > \alpha_0$，存在常数 $k(\alpha)$ 使方程(2-17)的基础解满足不等式

$$|X(t)| \leqslant k\mathrm{e}^{\alpha t}, t \geqslant 0. \tag{2-30}$$

证 由定理 7 有 $X(t) = \int_{c} h_1^{-1}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda$，其中 c 是充分大的实数. 证

$$X(t) = \int_{\alpha} h_1^{-1}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda. \tag{2-31}$$

注意到矩形 $L_1M_1L_2M_2$ 的内部和边界上 $h_1(\lambda)$ 均无零点 $\Rightarrow h_1^{-1}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}$ 解析，即

$$\int_{L_1} + \int_{M_1} + \int_{L_2} + \int_{M_2} = 0.$$

L_1, M_1, L_2, M_2 作为点集，如图 2-1 所示：

$$L_1: \{c + \mathrm{i}t_1: -T \leqslant t_1 \leqslant T\};$$

$$L_2: \{\alpha + \mathrm{i}t_1: -T \leqslant t_1 \leqslant T\};$$

$$M_1: \{\sigma + \mathrm{i}T: \alpha \leqslant \sigma \leqslant c\};$$

$$M_2: \{\sigma - \mathrm{i}T: \alpha \leqslant \sigma \leqslant c\}.$$

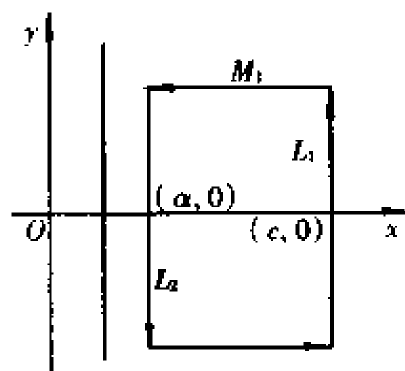


图 2-1

要证(2-31)式，只要证 $T \to \infty$ 时

$$\int_{M_1} h_1^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda \to 0, \int_{M_2} h_1^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda \to 0$$

即可.选择 T_0,使当 $T \geqslant T_0$ 时,有

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{T}(|a|+|b|e^{-\sigma\tau}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

若 $\lambda \in M_1$,且 $T \geqslant T_0$,则由 $h_1(\lambda)$ 的表达式得

$$|h_1^{-1}(\lambda)| \leqslant \frac{1}{(\sigma^2+T^2)^{\frac{1}{2}} - |a| - |b|\exp(-\sigma\tau)} \leqslant \frac{2}{T},$$

于是有

$$\left|\int_{M_1} h_1^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant \frac{2}{T}e^{ct}(c-\alpha) \to 0, \text{当 } T\to\infty \text{ 时,同理可证} \int_M \to 0, \text{当 } T$$

$\to \infty$ 时.对这样的 T_0,作函数

$$g(\lambda) = h_1^{-1}(\lambda) - (\lambda - \alpha_0)^{-1}.$$

则由 $\lambda = \alpha + iT, T \geqslant T_0$ 时成立

$$|g(\lambda)| = \left|h_1^{-1}(\lambda)\frac{a+be^{-\lambda\tau}-\alpha_0}{\lambda-\alpha_0}\right| \leqslant \frac{2}{T^2}(|a|+|b|e^{-\sigma\tau}+|\alpha_0|),$$

从而有

$$\int_\alpha |g(\lambda)|d\lambda < \infty \text{ 且 } \left|\int_\alpha g(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant k_1e^{\alpha t}, t \geqslant 0,$$

其中 $k_1 = \text{const}$.又已知积分 $\int_\alpha (\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$ 存在,由反演公式即得估计式

$$\left|\int_\alpha (\lambda-\alpha_0)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant k_2e^{\alpha t}, t > 0.$$

取 $k = k_1 + k_2 \Rightarrow$ 定理成立.

这一结果可推广到 NDDE 上去.

对方程组的高维情形,本章结论仍成立.

3　稳定性与有界性

3.1　泛函微分方程稳定性的概念和定义

3.1.1　稳定性的定义

下面约定各种范数都记为 $|\cdot|$(个别情形加下标),只要稍为留意便不致混淆.考虑 R 型方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)); \tag{3-1}$$

$$\dot{x} = f(t, x_t), \tag{3-2}$$

对方程(3-1)或(3-2)均设有零解.即$f(t,0,0) = 0, f(t,0) = 0$,初始时刻记为σ(或t_0).

定义 1 记$|\varphi| = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|$,$|x(t)|$取$\mathbf{R}^n$中的模,则$\forall \sigma \in \mathbf{R}$,有

1° 若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon,\sigma) > 0$,使当$|\varphi| < \delta$时$|x(t,\sigma,\varphi)| < \varepsilon, t \geqslant \sigma$,则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为稳定的.

2° 若1°中的δ不依赖于σ,则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为一致稳定的.

3° 若$\exists b_0(\sigma) > 0$,使当$|\varphi| \leqslant b_0, t \to \infty$时有$x(t,\sigma,\varphi) \to 0$,或者说"$\exists b_0(\sigma) > 0, \forall \epsilon > 0, \exists T(\sigma,\varepsilon,\varphi)$使当$|\varphi| \leqslant b_0(\sigma)$时,$\forall t \geqslant \sigma + T(\sigma,\varepsilon,\varphi)$成立$|x(t,\sigma,\varphi)| < \epsilon$",则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为吸引的.

若T与φ无关,则零解称为等度吸引的;

若T仅与ε有关,b_0与σ无关,则零解称为一致吸引的;

若$b_0 = +\infty$,则零解称为全局吸引的.

4° 若零解是稳定的、吸引的,则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为渐近稳定的.

若零解是稳定的、等度吸引的,则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为等度渐近稳定的.

若零解是一致稳定的,一致吸引的,则方程(3-1)(或(3-2))的零解称为一致渐近稳定的.

定义 2 若$\exists \beta > 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$,使当$|\varphi| < \delta$时,$\forall t \geqslant \sigma$成立

$$|x(t,\sigma,\varphi)| \leqslant \epsilon\exp(-\beta(t-\sigma)),$$

则称方程(3-1)(或(3-2))的零解是指数渐近稳定的.

定义 3 若零解是稳定的,全局吸引的,则方程(3-1)(或(3-2式))的零解是全局(大范围)渐近稳定的.若零解一致稳定且全局一致吸引则为全局一致渐近稳定的.

3.1.2 与常微分方程稳定性的比较

从形式上看,定义1～3与常微分方程无异,而实际上二者有许多不同之处,主要表现如下:

1° 在常微分方程的诸定义中,初值x_0现在是E_{t_0}上的初始函数φ(方程(3-1)、(3-2)的E_{t_0}取为$[-r,0]$).因而初始值的范数可以不同于x的范数.例如$|\varphi|$是c中的上确界模,而$|x(t)|$则表示$\mathbf{R}^n$中的模.

2° 常微分方程相当于滞量$\tau = 0$的情形.对FDE而言,τ不恒等于0.当τ变动时,系统的稳定性可能不同,即出现一个新的稳定性问题——稳定性依赖于时滞问题.

3° 在常微分方程中,零解的稳定与否同初始时刻的选取无关,而FDE则出现一种叫做"变异"的系统,它存在一个$t^* > 0$.当$t_0 < t^*$时零解是稳定的,而$t_0 > t^*$时零解却是不稳定的.

3.1.3　稳定性依赖于初始时刻

在专著[1]中指出一类应用中的时滞系统，选择不同的初始时刻零解的稳定性完全不同.

例1　方程

$$\dot{x}(t) = x(t) - x(te^{-t}).$$

取 $t_0 = 0, E_0 = \{0\}$. 方程的通解为 $x(t) = c = \text{const} \Rightarrow$ 零解稳定，若取 $t_0 > 1$，则 $E_{t_0} = (0, t_0e^{-t_0}] \cup \{t_0\}$，取一簇初始函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} \delta, & t = t_0; \\ \delta/2, & t \in (0, t_0 e^{-t_0}]. \end{cases}$$

此时方程有一簇解

$$x(t) = \frac{\delta}{2}[e^{t-t_0} + 1], \quad t \geq t_0.$$

由于 δ 可取任意小的正数，而上式右边无界 $\Rightarrow$ 零解是不稳定的.

例2　考虑方程

$$\dot{x}(t) = 3x(t) + b(t)x(t - \tau(t)), \tag{3-3}$$

其中 $b(t)$ 是周期为1的周期函数

$$b(t) = 3(|t|^2 - |t|), \quad t \in [-1, 0];$$
$$b(t+1) = b(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

而当 $t > 0$ 时 $\tau(t)$ 等于0，当 $t \leq 0$ 时是周期为1的周期函数

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau(t+1), & -\infty < t \leq -1; \\ |t|^{\frac{1}{3}} - |t|, & -1 \leq t \leq 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

取初始时刻 $t_0 = -2$，在 $[-2, -1]$ 中，方程(3-3)有解

$$x(t) = -x_0(1+t)^3, \quad x_0 = x(-2). \tag{3-4}$$

事实上，把(3-4)式代入方程(3-3)即可推出. 由于 $t_0 = -2, E_{t_0} = \{-2\}$ 是一单点集，由唯一性，(3-4)式即方程(3-3)自 -2 出发的全部解. 而当 $t \geq -1$ 时，不论 x_0 如何选取，$x(-1) = 0$ 恒成立，再由 $E_{-1} = \{-1\} \Rightarrow$ 一切解在 $x(-1)$ 处全部粘合为零解. $t \geq 0$ 以后方程(3-3)退化为常微分方程，其解已全部求出，并表示为

$$x(t) = \begin{cases} -x_0(1+t)^3, & t \in [-2, -1]; \\ 0, & t > -1, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 当 $t_0 = -2$ 时零解是稳定的.

再取 $t_0 = 0$，则方程(3-3)化为

$$\dot{x}(t) = [3 + b(t)]x(t),$$

其解可表示成

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t (3 + b(t_1))\mathrm{d}t_1\right). \tag{3-5}$$

不问 x_0 如何地小,(3-5) 式在 $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ 上是无界的.即以 $t_0 = 0$ 为初始时刻时零解是不稳定的.

若自 t_1 出发零解稳定,则自 $t_0 < t_1$ 出发零解也是稳定的.若自 t_2 出发零解不稳定,则自 $t_0 > t_2$ 出发零解也是不稳定的.因而存在 t^*,当自 $t_0 < t^*$ 出发时零解稳定,而自 $t_0 > t^*$ 出发时,零解是不稳定的.

3.1.4 稳定性依赖于时滞

设方程自身的结构不改变,仅仅变动滞量的值,则稳定性性质可能改变.换句话说,把 $\tau \in \mathbf{R}_+$ 视为参数,当参数变化时稳定性可能改变.而且 $\mathbf{R}_+$ 由两个集合组成,一个是使零解稳定的 τ 全体 $\mathscr{A}$,而 $\mathbf{R}_+ - \mathscr{A}$ 是使零解不稳定的 τ 全体.因而可以讨论稳定性关于 τ 的分支问题(bifurcation).

例 3 给定方程

$$\dot{x}(t) = x(t) - x(t-\tau). \tag{3-6}$$

当 $\tau = 1$ 时,方程(3-6)零解是不稳定的.这只要注意到 $x = t$ 是它的一个特解.$x = \delta t$ 也是它的解 $\Rightarrow$ 零解是不稳定的.当 $0 \leqslant \tau < 1$ 时,方程(3-6)零解稳定.

1° 当 $\tau = 0$.方程为 $\dot{x}(t) = 0$. $\Rightarrow$ 零解稳定.

2° 方程(3-6)的特征方程为

$$\lambda - 1 + e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{3-7}$$

(3-7)式除了一个单根 $\lambda = 0$ 外,其他根都满足

$$\mathrm{Re}\lambda_j \leqslant -k < 0, \quad k > 0.$$

$\Rightarrow$ 零解是稳定的.此时 $\mathscr{A} = [0,1)$, $\mathbf{R}_+ - \mathscr{A} = [1, +\infty)$.且 $\tau = 1$ 是方程(3-6)零解稳定性的一个分支点.

3.2 线性自治差分微分方程的稳定性

3.2.1 特征根与稳定性的关系

以一阶系统为例列出特征根与稳定性的关系,所得结果均可推广到 n 阶方程及方程组上去.即考虑 2.2.5 中的4类 DDE及其特征方程 $h_1(\lambda) = 0 \sim h_4(\lambda) = 0$.由 2.2.6 的结论任一特征方程的根的全体 $\{\lambda_j\}$ 必是 $\{\lambda'_j\}$, $\{\lambda''_j\}$, $\{\lambda'''_j\}$ 这三种根链的组合.此外,若 λ_j 是特征根,则 $e^{\lambda_j t}$ 为相应方程的解.由此有:

(1) 因 A 型和 C 型方程至少有一个具正实部的根链,故零解不稳定,有时叫做不稳型 DDE.

(2) 对 RDDE

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau). \tag{3-8}$$

设它的特征根全体为 $\{\lambda_j\}$,则

1° (3-8)式的解稳定的充要条件是 $h_1(\lambda) = 0$ 的根只有有限个(或者没有)单重纯虚根,而其他根皆具负实部(或者含有一个单重零根);

2° (3-8) 式的零解为渐近稳定的充要条件是 $h_1(\lambda) = 0$ 所有根皆具负实部；

3° (3-8) 式的零解为不稳定的充分条件是 $h_1(\lambda) = 0$ 有正实部的根.

(3) 对 NDDE

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau) + c\dot{x}(t-\tau) \tag{3-9}$$

的特征根全体 $\{\lambda_j\}$，则

1° 存在一个 j，使 $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$，则方程(3-9) 零解不稳定；

2° 存在常数 $\delta > 0$，使 $\forall j$ 成立 $\mathrm{Re}\lambda_j \leqslant -\delta < 0$，则(3-9) 式的零解是一致渐近稳定的.

除此以外，NDDE 的特征方程与稳定性之间还有更为复杂的情况有待进一步研究. 即

3° $\exists \{\lambda_j\}$ 使 $\mathrm{Re}\lambda_j \to 0$. $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$. 此时有例子表明零解仍是渐近稳定的. 也有反例证明零解是不稳定的. 可见对 NDDE 不能认为 $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ 就能保证零解的稳定性.

4° $\{\lambda_j\}$ 中可能有可列个单重纯虚根而其余的 λ_j 满足 $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$，则零解的稳定性不明.

3.2.2 全时滞稳定性

对 RDDE

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{3-10}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$. $\tau \in \mathbf{R}_+$ 作为参数.

定义 4 若 $\forall \tau \in \mathbf{R}_+$ 方程(3-10) 的零解都是渐近稳定的，则方程(3-10) 的零解叫做全时滞稳定的(或者称方程(3-10) 是全时滞稳定的，也有文献称为无条件稳定的).

若方程(3.10) 是线性的，即方程及其特征方程分别为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{3-11}$$

$$h(\lambda, \tau) = \det|\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0. \tag{3-12}$$

定理 1 系统方程(3-11) 为全时滞稳定的充要条件是特征方程 $h(\lambda, \tau) = 0$ 满足

1° $h(\lambda, 0) = \det[\lambda I - A - B] = 0$ 的根皆具负实部；

2° $\forall y \in \mathbf{R}$ 及 $\forall \tau \in \mathbf{R}_+$ 恒成立

$$h(iy, \tau) = \det[iyI - A - Be^{iy\tau}] \neq 0.$$

证 必要性：若 1° 不成立 $\Rightarrow \tau = 0$ 时方程(3-11) 零解不是渐近稳定的 $\Rightarrow$ 矛盾. 充分性：要证 $\forall \tau \in \mathbf{R}_+$ 方程(3-12) 的所有特征根皆具负实部. 为此把 $h(\lambda, \tau)$ 展开为 λ 的多项式

$$h(\lambda, \tau) = (-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

其中 A_i 是 $e^{-\lambda\tau}$ 的多项式，由 A，B 的元 a_{ij}，b_{ij} 组成多项式的系数. 当 $\tau \in \mathbf{R}_+$ 及 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时有 $|e^{-\lambda\tau}| \leqslant 1 \Rightarrow \tau \in \mathbf{R}_+$，$\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时 $|A_i|$ 有界，记为

$$K_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i|, \quad \tau \in \mathbf{R}_+, \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0,$$

再取 $\max(1, (n+1)k_1) > 0$，则当 $|\lambda| \geqslant \widehat{\mathbf{R}}$ 及 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时有

$$|(-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant |\lambda|^n\left[1 - \frac{|A_1|}{|\lambda|} - \cdots - \frac{|A_n|}{|\lambda|^n}\right]$$
$$\geqslant \hat{R}^n\left[1 - \frac{nk_1}{(n+1)k_1}\right] > 0$$

$\Rightarrow$ 在 $|\lambda| \geqslant \hat{R}$, $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时, $\forall \tau \in \mathbf{R}_+$, 方程(3-12)没有根.

再由条件 1° $\Rightarrow$ 当 $\tau = 0$ 时方程(3-12)的根都落在左半平面 $\mathrm{Re}\lambda < 0$ 上. 当 τ 由0增加时,当且仅当有某一个 τ 使 λ 在 $-\hat{R}$ 到 $\hat{R}$ 之间穿过虚轴时,特征根要落在右半平面上,而条件 2° 不允许这种情况发生. 故 $\forall \tau \in \mathbf{R}_+$ 方程(3-12)的一切根随着 τ 的增加永远停留在左半平面内.

注意到定理1的条件 2° 是超越的,故在实际应用中很不方便,从40年代开始人们就一直在寻求代替定理的代数判别法,例如 $n = 1$ 时有

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau);$$
$$h(\lambda,\tau) = a + be^{-\lambda\tau} - \lambda = 0.$$

条件 1° 即 $h(\lambda,0) = a + b - \lambda = 0. \Rightarrow a + b < 0$ 时 λ 为负. 而条件 2° 表示用 $\mathrm{i}y$ 代入得 $h(\mathrm{i}y,\tau) = 0$, 记 $\tau y = \omega$, 分开实部与虚部得到

$$R(y,\omega) = a + b\cos\omega = 0,$$
$$I(y,\omega) = -y + b\sin\omega = 0,$$

消去 ω 得

$$H(y) = y^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

$H(y)$ 无非0实根的充要条件是 $b^2 - a^2 \leqslant 0$. 当 $H(y)$ 有非零实根时, $y^2 = b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow b \neq 0$. 于是由 $R(y,\omega) = 0$ 与 $I(y,\omega) = 0$ 解得 $\tan\omega = -y/a$, 对任何实的 y,ω 都有实解 $\Rightarrow R = 0$ 及 $I = 0$ 都有实的 ω 公根 $\Rightarrow$ 全时滞稳定的充要条件是

$$a + b < 0, b^2 - a^2 \leqslant 0 \text{ 或 } a + b < 0, b - a \geqslant 0. \tag{3-13}$$

(3-13)式是代数判据. 迄今 $n = 2$ 时已完全解决.

3.2.3　稳定性的全参量分析

考虑方程

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0, \tag{3-14}$$

其中 $a, b \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}_+$ 都看做参数. 特征方程为

$$\lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0. \tag{3-15}$$

所谓**全参量分析**应包含两点.

1° 在以 a, b 为参数的平面 (a,b) 上,用方程(3-15)实部等于0的根的点 (a^*, b^*) 作为边界,把 (a,b) 平面划分为若干个区域,在这些区域中的 (a,b) 点所对应的方程(3-14)的零解分别为全时滞稳定、渐近稳定和不稳定的. 而在区域的边界点处,若实部为零的根是单重的则零解稳定,若为重根则零解不稳定.

2° 当 a, b 取定,以 $\tau \in \mathbf{R}_+$ 为参数,这时稳定性表现得相当多样化,大致可归纳为三类:

$\forall \tau \in \mathbf{R}_+$, 方程(3-14)零解是渐近稳定的;

$\forall \tau \in \mathbf{R}_+$，方程(3-14)零解是不稳定的；

$\forall \tau \in s \subset \mathbf{R}_+$，方程(3-14)零解稳定，而 $\forall \tau \in \bar{s} = \mathbf{R}_+ - s$，方程(3-14)零解是不稳定的.

所以，若对一个方程完成全参量分析就等于说彻底解决了稳定性问题(对高维的情形，稳定性的情况更为复杂).

划分区域的方法有幅相法和D划分法.现在以方程(3-14)、(3-15)为例用D划分法给出完整的结果，如图3-1所示.因方程(3-15)当 $a+b=0$ 时有根 $\lambda=0$，故 $a+b=0$ 是D划分边界之一.再设方程(3-15)有纯虚根，即以 $i\gamma$ 代入(可设 $\gamma \neq 0$)方程(3-15)并分开实部与虚部得

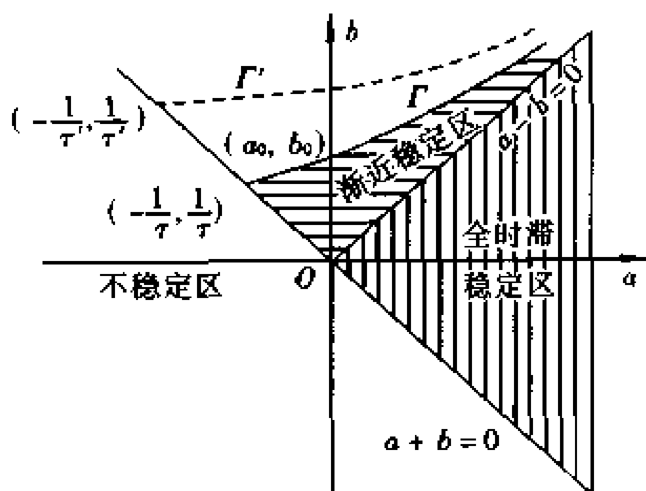


图3-1

$$a + b\cos\tau\gamma = 0, \gamma - b\sin\tau\gamma = 0$$

或者

$$b = \frac{\gamma}{\sin\tau\gamma}, \quad a = \frac{-\gamma\cos\tau\gamma}{\sin\tau\gamma},$$

$$\tau\gamma \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \cdots \tag{3-16}$$

曲线(3-16)以 γ 为参数，记为 Γ，它与 $a+b=0$ 共同组成 D 的边界.当 τ 固定时 Γ 便确定下来.若令参数 $\tau \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} \to \infty$，图中 Γ 向上方移动，例如移至 Γ' 以至于无穷远.反之，当 $\tau \to \infty$ 时，Γ 重合于直线 $a-b=0$，稳定区即全时滞稳定区.这样一来，当 τ 变动时稳定区也变动，对固定一点 (a_0, b_0) 对 τ 来说零解不稳定，而对 τ' 来说则是渐近稳定的——稳定性依赖于时滞.

3.3　V函数与V泛函方法

3.3.1　几类辅助函数

在下文中要用到的辅助函数有

(1) 李雅普诺夫函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 或简记为 $V(x)$, $V(t,x)$. 与常微分方程类似,若 RDDE 为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f_i(t,x_1(t)\cdots,x_n(t),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau)),\\ i &= 1,2,\cdots,n, r = \text{const} > 0,\end{aligned} \tag{3-17}$$

若 V 是可微的,则定义 V 关于方程(3.17)的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3\text{-}17)} &= \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3\text{-}17)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x_1(t),\cdots,x_n(t),x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau)).\end{aligned} \tag{3-18}$$

(2) 李雅普诺夫泛函 $V(\varphi):\mathbf{C}\to\mathbf{R}$, $V(t,\varphi):\mathbf{R}\times\mathbf{C}\to\mathbf{R}$. $C = C(-r,0],\mathbf{R}^n)$, 设方程

$$\dot{x} = f(t,x_t) \tag{3-19}$$

过 (σ,φ) 的解为 $x(t,\sigma,\varphi)$, $x_t(\sigma,\varphi)\xlongequal{\text{def}}x(t+\theta,\sigma,\varphi)$, $\theta\in[-r,0]$, 定义 $V(t,\varphi)$ 关于方程(3-19)的全导数为

$$\dot{V}_{(3\text{-}19)} = \overline{\lim_{h\to0+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x_{t+h}(t,\theta)) - V(t,\varphi)] \tag{3-20}$$

或者说 $\dot{V}(t,\varphi)$ 是李雅普诺夫泛函 $V(t,\varphi)$ 沿方程(3-19)的上右导数,记为 $\dot{V}_{(3\text{-}19)}(t,\varphi)$.

(3) K类函数,若 $\alpha\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(s)$ 严格单调增加,则称 $\alpha(s)$ 是一个 K 类函数,其全体记为 K.

(4) KC类函数,若 $\alpha(s)\in$ K 且 α 是凸函数,则称 $\alpha(s)$ 是一个 KC类函数,其全体记为 KC.

显然 KC $\subset$ K.

3.3.2　常微稳定性的直接推广

对 RDDE(3.17)式可以把常微的李雅普诺夫第二方法诸定理不加变动地应用.但效果不大理想,例如有

定理 2　对(3-17)式,若存在正定函数 $V(t,x)$,它关于(3-17)式的全导数是常负的,则(3-17)式的零解是稳定的.

例 4　对方程

$$\dot{x}(t) = -x(t)x^2(t-\tau) \tag{3-21}$$

取 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$,则

$$\dot{V}_{(3\text{-}21)}(x) = -x^2(t)x^2(t-\tau)\leqslant 0$$

$\Rightarrow$(3-17)式的零解是稳定的.

例 5　方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t) \tag{3-22}$$

仍取 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$,则

$$\dot V_{(3\text{-}22)}(x)=ax^2(t)+bx(t)x(t-\tau).$$

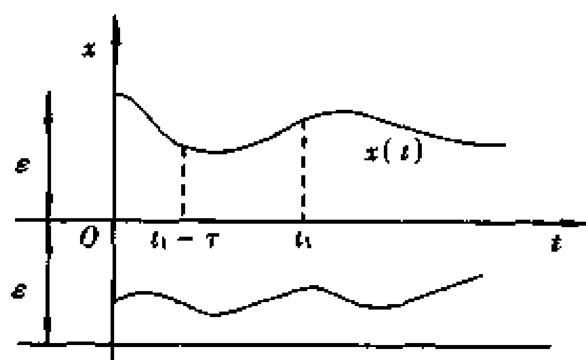


图 3-2

上式右边第二项的正负号难以判断,即使 $a<0,b<0$ 也无法肯定 $\dot V_{(3\text{-}22)}$ 是否满足稳定性定理的条件.可见直接做形式推广是效果不大的,但只要细心分析一下便会发现,用常微的定理条件去直接要求 DDE 是过分苛刻的.因为 $\dot V$ 是沿着解来判断正负号的,所以如图 3-2 所示,只须要求 $|x(t)|>|x(t-\tau)|$ 时 $\dot V\leqslant 0$(或 $\dot V<0$) 即可.因为在某一时刻 t_1,例如 $x(t_1)\geqslant 0$,若 $|x(t_1)|<|x(t_1-\tau)|$,则 $x(t_1)$ 的后继值在适当小的邻域内允许上升而不越出"ϵ 范围",即不必要 $\dot V\leqslant 0$.这对方程本身并没有加上什么新的限制.于是把定理中(如定理 2)的条件改成下述样式,仍可保持结论成立.

$$\text{当}\ |x(t-\tau)|<|x(t)|\ \text{时}\ \dot V\leqslant 0(\text{或}<0). \tag{3-23}$$

(3-23) 式叫做 **Razumikhin 条件**,基于这一思想,(3-23) 还可推广为:设 $P\in K$

$$\text{当}\ P(|xt(-\tau)|)<P(|x(t)|)\ \text{时}\ \dot V\leqslant 0(\text{或}<0) \tag{3-24}$$

或者

$$\text{当}\ V(\xi,x(\xi))<V(t,x(t)),\xi\in[t-\tau,t]\ \text{时}\ \dot V\leqslant 0(\text{或}\ \dot V<0).$$

在这样的条件下,重新考察例 5 中 $\dot V$ 右边第二项,由(3-23) 式有

$$\dot V_{(3\text{-}22)}(x)\leqslant -ax^2(t)+|b|x^2(t)=(|b|-a)x^2(t),$$

那么当 $|b|-a\leqslant 0$ 时 $\dot V\leqslant 0\Rightarrow$ 方程(3-22) 零解是稳定的.

3.3.3 Razumikhin 型定理及其应用

所谓**Razumikhin型定理**是指在下述的Razumikhin条件下与常微分方程平行的各种稳定性定理,它的优点在于 V 函数是通常意义下的李雅普诺夫函数.为了保持定理应用的普遍性,一律考虑 RFDE(3-19) 式.

注意到,当用方程(3-19) 的解 $x(t)$ 代入 $V(t,x)$ 时得 $V(t,x(t))$.当改用 $x_t=x(t+\theta)$ 代入 $V(t,\varphi)$ 中的 φ 时,得 $V(t,x_t)=V(t,x(t+\theta))$.另一方面有

$$\varphi(\theta)=x(t+\theta),\quad \varphi(0)=x(t).$$

由 $x(t,t_0,\varphi)=x(t_0,\varphi)(t)\Rightarrow x(t+h,t,\varphi)=x(t,\varphi)(t+h)$.

现在把方程(3-19) 的解代入 $\dot V$,使(3-18) 式与(3-20) 式一起写成

$$\dot V(t,x(t))=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h,t,\varphi))-V(t,\varphi)]$$

或

$$\dot{V}(t,\varphi(0)) = \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{1}{h}[V(t+h,x(t,\varphi)(t+h)) - V(t,\varphi)]. \quad (3\text{-}25)$$

现在叙述两个 Razumikhin 型定理如下.

定理 3 设方程(3-19)中 $f:\mathbf{R}\times\mathbf{C}\to\mathbf{R}^n$ 把 $\mathbf{R}\times$(C 中有界集)映人 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集. $u,v\in K$, $\omega:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, 连续,若存在一个连续函数 V 使得 $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^n$ 时有

$$u(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(|x|). \quad (3\text{-}26)$$

$$\dot{V}(t,\varphi(0)) \leqslant -w(|\varphi(0)|). \quad (3\text{-}27)$$

(3-27)式当 $V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant V(t,\varphi(0))$, $\theta\in[-r,0]$ 时成立,则方程(3-19)的零解是一致稳定的.

定理 4 设定理 3 的条件全部满足,且设 $s>0$ 时 $W(s)>0$,若 ∃ 一个连续非减函数 $p(s)>s(s>0)$,使得(3-27)式加强为

$$\dot{V}(t,\varphi(0)) \leqslant -W(|\varphi(0)|). \quad (3\text{-}28)$$

当

$$V(t+\theta,\varphi(0)) < P(V(t,\varphi(0))), \theta\in[-r,0]$$

时,则方程(3-19)的零解是一致渐近稳定的.

若 $s\to\infty$ 时 $u(s)\to\infty$,则零解是全局吸引的.

例 6 对方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - b(t)x(t-r_0(t)), \quad (3\text{-}29)$$

其中 $x\in\mathbf{R}$, a,b,r_0 都是 $\mathbf{R}$ 中有界连续函数且

$$|b(t)| \leqslant a(t), 0 \leqslant r_0(t) \leqslant r, t\in\mathbf{R},$$

取 V 函数为 $V(x)=x^2/2$,则当 $|x(t)| \geqslant |x(t-r_0(t))|$ 时,有 $\dot{V}$ 的估计

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3\text{-}29)}(x(t)) &= -a(t)x^2(t) - b(t)x(t-r_0(t)) \\ &\leqslant -a(t)x^2(t) + |b(t)||x(t)||x(t-r_0(t))| \\ &\leqslant -[a(t)-|b(t)|]x^2(t) \leqslant 0,\end{aligned}$$

而 $V(x)=x^2/2 \Rightarrow V(x(t)) \geqslant V(x(t-r_0(t)))$ 时 $\dot{V}(x(t)) \leqslant 0$,由定理 3⇒(3-14)式的零解是一致渐近稳定的.

此外,若 $a(t)\geqslant\delta>0$,且存在 $k\in[0,1)$,使得 $|b(t)|\leqslant k\delta$,则方程(3-29)的零解也是一致渐近稳定的.

事实上,对某常数 $q>1$,设 $V(x)=x^2/2$,则当 $P(V(x(t))) > V(x(t-r_0(t)))$ 时,有

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant -(1-qk)\delta x^2(t).$$

因为 $k<1 \Rightarrow \exists q>1$ 使 $1-qk>0$. 由定理 4⇒ 方程(3-29)的零解是一致渐近稳定的.

这个结果可推广到多滞量的情形,对方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - \sum_{j=1}^{n} b_j(t)x(t-r_j(t)) \quad (3\text{-}30)$$

仍取 V 函数为 $x^2/2$,类似地可以证明方程(3-30)的零解一致渐近稳定. 其中 a,b_j,r_j

是有界连续函数,并且要求 $\forall t \in \mathbf{R}$ 成立

$$a(t) \geqslant \delta > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} | b_j(t) | < k\delta,$$
$$0 < k < 1, \quad 0 \leqslant r_j \leqslant r.$$

例 7 考虑一阶非线性方程

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t - r(t))), \\ f(t,0) &= 0, \quad 0 \leqslant r(t) \leqslant r, \end{aligned} \tag{3-31}$$

其中 $x \in \mathbf{R}$, $r(t)$ 是 t 的连续函数, $f(t,x): \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续,关于 x 有连续偏导数且

$$| \partial f(t,x)/\partial x | < L, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}.$$

对 $t \geqslant 2r$, 可以把方程(3.31) 写成

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) - [f(t,x(t)) - f(t, x(t - r(t)))] \\ &= f(t,x(t)) - \int_{t-r(t)}^{t} \frac{\partial f(t,x(\theta))}{\partial x} f(\theta, x(\theta - r(\theta)))\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

取 $V = x^2$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x(t)f(t,x(t)) - 2\int_{t-r(t)}^{t} x(t) \frac{\partial f(t,x(\theta))}{\partial x} f(\theta, x(\theta - r(\theta)))\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant 2x(t)f(t,x(t)) + 2L^2\int_{t-r(t)}^{t} | x(t)x(\theta - r(\theta)) | \mathrm{d}\theta \\ &\leqslant 2x(t)f(t,x(t)) + 2L^2 r(t) | x(t) | | x_{t-r(t)} |, t \geqslant 2r. \end{aligned}$$

若 $q > 1$ 是固定的数,考虑所有满足

$$x^2(t - \xi) \leqslant q^2 x^2(t), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2r$$

的 $x(t)$ 的集合. 若

$$(f(t,x)/x) + L^2 r(t) q < -\mu < 0,$$

则有

$$\dot{V}_{(3\text{-}31)}(x_t) \leqslant 2\left[\frac{f(t,x(t))}{x(t)} + L^2 r(t) q \right] x^2(t) < 2\mu x^2(t).$$

对 $\mu > 0, t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}$ 及 $p(s) = q^2 s$, 由定理4$\Rightarrow$方程(3-31) 的零解是一致渐近稳定的. 并且是全局吸引的.

类似的 Razumikhin 型定理有很多推广.

3.3.4 V泛函法定理及其应用

设对方程(3-19) 的基本假定与 3.3.3 相同,有一系列用 V 泛函法判别稳定性的定理,举例如下.

定理 5 设 $u, v \in K$, $w: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$. 若存在一个连续泛函 $V(t,\varphi): \mathbf{R} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ 使得

$$u(| \varphi(0) |) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant v(| \varphi |); \tag{3-32}$$

$$\dot{V}_{(3\text{-}19)}(t,\varphi) \leqslant -w(| \varphi(0) |), \tag{3-33}$$

则方程(3-19) 的零解是一致稳定的. 若当 $s > 0$ 时 $w(s) > 0$, 则方程(3-19) 的零解

是一致渐近稳定的.

例 8 考虑自治线性 RDDE

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-r), \tag{3-34}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n \times n$ 常数阵,$r = \text{const} > 0$. 它的零解的稳定性问题可以用特征根的分布去讨论,不过显然是困难的. 这里用 V 泛函来判别. 把方程(3-34)写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\varphi(0) + \boldsymbol{B}\varphi(-r).$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征根皆具负实部,取对称阵 $\boldsymbol{C}$,设 $\boldsymbol{C}$ 为正定的(此时记 $\boldsymbol{C} > 0$),使满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{D} < 0,$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置阵. 又设 $\boldsymbol{E}$ 为正定阵,作 V 泛函为

$$V(\varphi) = \varphi'(0)C\varphi(0) + \int_{-r}^{0}\varphi'(\theta)E\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3-35}$$

由 $V(\varphi)$ 的表达式 $\Rightarrow \exists$ 正数 v,k 使得

$$v\,|\,\varphi(0)\,|^2 \leqslant V(\varphi) \leqslant k\,|\,\varphi\,|^2.$$

现在计算 $V(\varphi)$ 沿方程(3-34)的全导数

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3\text{-}34)}(\varphi) = &-\varphi'(0)D\varphi(0) + 2\varphi'(0)CB\varphi(-r) + \\ &\varphi'(0)E\varphi(0) - \varphi'(-r)E\varphi(-r).\end{aligned}$$

把上式右边看做是关于 $\varphi(0)$、$\varphi(-r)$ 的二次型,且对阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 附加条件以保证阵方程可解得 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{E}$,使这一二次型是负定的. 由定理 5$\Rightarrow$ 方程(3-34)的零解是渐近稳定的. 换句话说,要确定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{E}$,使得对称阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}-\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \tag{3-36}$$

是正定的. 已知 $\boldsymbol{D} > 0, \boldsymbol{E} > 0$. 若 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} > 0$,则当 $\boldsymbol{B} = 0$ 时(3-36)式是正定的. 于是当 B 的模 $\|B\|$ 充分小时(3-36)式保持是正定的 $\Rightarrow$ 方程(3-34)零解渐近稳定.

例 9 用 V 泛函讨论 3.2.3 中的方程

$$\dot{x}(t) = -(ax(t) + bx(t-r)), \quad r = \text{const} > 0, \tag{3-37}$$

其中 $x \in \mathbf{R}$. 取 V 为

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2(0) + \mu\int_{-r}^{0}\varphi^2(\theta)\mathrm{d}\theta, \mu > 0. \tag{3-38}$$

$V(\varphi)$ 关于方程(3-37)的全导数为

$$\dot{V}_{(3\text{-}37)}(\varphi) = -(a-\mu)\varphi^2(0) - b\varphi(0)\varphi(-r) - \mu\varphi^2(-r).$$

相应的(3-36)式为正定的条件是

$$a > \mu > 0, \quad 4(a-\mu)\mu > b^2.$$

当 $\mu = \dfrac{a}{2}$ 时由上式所确定的 $|\,b\,|$ 取值范围最大,此时可得出,若 $|\,b\,| < a$,则(3-37)式的零解 $\forall r \in \mathbf{R}_+$ 都是渐近稳定的. 与 3.2.3 得到同一结论.

例 10 对非自治纯量方程

$$\dot{x}(t) = -(a(t)x(t) + b(t)x(t-r)), \tag{3-39}$$

其中 $a(t),b(t)$ 当 $t\in\mathbf{R}$ 时有界连续，并且 $\forall t\in\mathbf{R},a(t)\geqslant\delta>0$ 成立.

仍取 V 泛函为(3-38)，但取 $\mu=\dfrac{\delta}{2}$，$V(\varphi)$ 关于方程(3-39)的导数为

$$\dot V_{(3\text{-}39)}(\varphi)=-(a(t)-\mu)\varphi^2(0)-b(t)\varphi(0)\varphi(-r)-\mu\varphi^2(-r).$$

若不等式 $(2a(t)-\delta)\delta>b^2(t)$ 关于 t 一致成立，则方程(3-39)的零解是一致渐近稳定的.

用 $V(\varphi)$ 的判别定理也有很多推广.

3.4　解的有界性

3.4.1　有界性与最终有界的定义

定义 5　对 $(\sigma,\varphi)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$，若存在常数 $M=M(\sigma,\varphi)$，使方程(3-19)过 (σ,φ) 的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 当 $t\geqslant\sigma-r$ 时，满足 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 有界.

定义 6　$\forall H>0,\sigma\in\mathbf{R}$，若存在 $M=M(\sigma,H)$，使当 $|\varphi|<H$ 时，$\forall t\geqslant\sigma$ 有 $|x(t,\sigma,\varphi)|\ M$，则称方程(3-19)的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是等度有界的. 若 M 与 σ 无关，则称方程(3-19)的解是一致有界的.

定义 7　若存在常数 $M>0$，使对 $\forall(\sigma,\varphi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 总存在 $T=T(\sigma,\varphi)>0$. 当 $t\geqslant\sigma+T$ 时，有 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称方程(3-19)的解为**最终有界**(或毕竟有界).

定义 8　若存在常数 $M>0$，且对 $H>0$ 及 $\sigma\in\mathbf{R}$，存在 $T=T(\sigma,H)>0$，使当 $|\varphi|<H$ 时，$\forall t\geqslant\sigma+T$ 成立 $|x(t,\sigma,\varphi)|<M$，则称方程(3-19)的解等度最终有界. 若 T 与 σ 无关，则称方程(3-19)的解是一致最终有界.

这些定义对 NFDE 也成立.

3.4.2　有界性的判别准则

对于生态时滞系统，正解非 0 加上有界，构成了生态系统持久性的完整含义. 不仅如此，在很多应用领域中解的有界性以及这种界的估计是至关重要的. 举例说明判别方法.

定理 6　若存在泛函 V 及 $u\in K$，正常数 α,β,μ 满足条件

1° $V(t,\varphi)\leqslant u(|\varphi|),t\in\mathbf{R}_+,\varphi\in\mathbf{C}$;

2° 当 $|x(t)|\geqslant\alpha$ 时 $\dot V_{(3\text{-}17)}(t,x_t)\leqslant-\mu|f(t,x_t)|$;

3° 当 $|x(t)|<\alpha$ 时 $\dot V_{(3\text{-}17)}(t,x_t)\leqslant\beta$,

则方程(3-17)的解一致有界.

定理 7　设定理 6 的条件成立，且存在常数 $c>0$，使当 $|x(t)|\geqslant\alpha$ 时，$\dot V(t,x_t)\leqslant-c$，则方程(3-17)的解是一致最终有界的.

此外也可以把贝尔曼(R.Bellman)关于常微分方程的不等式估计方法用于时

滞系统.

例 11　对二阶方程

$$\ddot{x}(t)+a(t)x(t)+b(t)f(x(t-\tau(t)))=p(t), \tag{3-40}$$

其中 $a(t),b(t),f$ 连续,$0\leqslant\tau(t)\leqslant r=\text{const}$. 方程(3-40)的线性近似方程为

$$\ddot{x}(t)+a(t)x(t)=0. \tag{3-41}$$

它有两个解 $x_1(t),x_2(t)$ 满足

$$\overline{W}=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{vmatrix}=1.$$

反之,若有两个这样的解 $x_1(t),x_2(t)$,则方程(3-40)过点(σ,φ)的解可表示为

$$\begin{aligned}x(t,\sigma,\varphi)&=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\\ &\int_\sigma^t[x_1(s)x_2(t)-x_2(s)x_1(t)][p(s)-b(s)f(x(s-\tau(s)))]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3-42}$$

由(3-42)式来估计解的界限,结果是在下述条件成立时方程(3-40)的一切解有界,即

1° 方程(3-41)的一切解有界;

2° $\int^\infty |b(t)|\mathrm{d}t<\infty$;

3° $|f(x)|\leqslant f(|x|)$,当 $x>0$ 时 $f(x)$ 正值单增;

4° $\int^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\infty$.

事实上,$\forall\sigma\in\mathbf{R},\varphi\in\mathbf{C}$,记 $c=c_1+c_2$,且

$$M=\max\Big[\sup_{\sigma\leqslant t<\infty}|x_1(t)|,\sup_{0\leqslant t<\infty}|x_2(t)|,\int_\sigma^\infty|b(t)|\mathrm{d}t,\int_\sigma^\infty|p(t)|\mathrm{d}t\Big],$$

则当 $t\geqslant\sigma+\tau$ 时,由(3-42)式,有

$$\begin{aligned}|x(t-\tau(t))|&\leqslant CM+2M^3+2M^2\int_\sigma^{t-\tau(t)}|b(s)||f(x(s-\tau(s)))|\mathrm{d}s\\ &\leqslant CM+2M^3+2M^2\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3-43}$$

再记 $A=CM+2M^3,B=2M^2$. 由条件 3°,有

$$f(|x(t-\tau(t))|)\leqslant f\Big(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)\mathrm{d}s\Big).$$

由此得

$$\frac{B|b(t)|f(|x(t-\tau(t))|)}{f\Big(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)\mathrm{d}s\Big)}\leqslant B|b(t)|.$$

记 $\Phi(u)=\int_A^u\dfrac{\mathrm{d}s}{f(s)},A<u$,则上式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi\Big(A+B\int_\sigma^t|b(s)|f(|x(s-\tau(s))|)\mathrm{d}s\Big)\leqslant B|b(t)|.$$

上式两边自 σ 到 $t(t>\sigma)$ 积分之,得

$$\Phi(A + B\int_{\sigma}^{t} |b(s)| f(|x(s - \tau(s))|)\mathrm{d}s) \leqslant \int_{\sigma}^{t} B|b(s)|\mathrm{d}s.$$

由于 $\Phi(u)$ 单增，故

$$A + B\int_{\sigma}^{t} |b(s)| f(|x(s - \tau(s))|)\mathrm{d}s \leqslant \Phi^{-1}(\int_{\sigma}^{t} B|b(s)|\mathrm{d}s).$$

注意到 M 的定义及(3-43)⇒ 当 $t \geqslant \sigma + \tau$ 时，有最后估式

$$|x(t - \tau(t))| \leqslant \Phi^{-1}(BM).$$

4　振动性与周期解

4.1　振动性的定义问题

4.1.1　解振动定义的直接推广

考虑常微分方程

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t). \tag{4-1}$$

称方程(4-1)的解是振动的.若对方程(4-1)的非零解 $x(t)$ 存在序列 $\{t_k\}, t_k \to \infty$，$k \to \infty$ 使得 $x(t_k) = 0, k = 1,2,\cdots$ 则称 $x(t)$ 是振动的.反之称为非振动的.

对泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{4-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}D(t, x_t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x_t). \tag{4-3}$$

下文以方程(4-2)为例，相关的定义与方法对方程(4-3)也适用.沿用常微分方程的定义如下.

定义1　若对方程(4-2)的非零解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 存在 $\{t_k\}$，当 $K \to \infty$ 和 $t_k \to \infty$ 时使得 $x(t_k) = 0, k = 1,2,\cdots$ 则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是振动的.否则称为非振动的.

若方程(4-2)的一切非零解都是振动的，则称方程(4-2)是振动的.

稍为留意一下便可以看出，这种直接引用常微定义的做法是有缺点的.考察如下例子.

例1　方程

$$\dot{x}(t) = -\alpha(t)x(t - 1); \tag{4-4}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2\sin^2\pi\tau, & t \in [2n, 2n + 1]; \\ 0, & t \in [2n - 1, 2n], \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

设 $\sigma \in (-1, 1)$，则 $t \geqslant 3$ 以后 $x(t) \equiv 0$.

例2　方程

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t - 1); \tag{4-5}$$

$$b(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \cos 2\pi t-1, & 0<t\leqslant 1;\\ 0, & t>1\end{cases}$$

是1.2.8中例12,当 $t\geqslant 1$ 以后 $x(t)\equiv 0$.

这类方程的解自某一时刻以后恒等于0,不用说它满足定义1中关于振动的定义,但它事实上并不振动.但由于不少学者均直接采用这种定义,所以暂且把它叫做"广义振动".

4.1.2 严格振动的定义

为了排除例1,例2的情形引入如下定义.

定义2 设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是方程(4-2)(或(4-3))过 (σ,φ) 的一个解,若存在 $T(\sigma,\varphi)\geqslant\sigma$,使当 $t\geqslant T(\sigma,\varphi)$ 时 $x(t,\sigma,\varphi)=0$,则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是一个最终零解,否则为非最终零解.

由此重新给出振动性的定义.

定义3 设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是方程(4-2)(或(4-3))过 (σ,φ) 的一个非最终零解,且存在序列 $\{t_k\}$, $t_k\to\infty$,当 $k\to\infty$ 时,使得 $x(t_k,\sigma,\varphi)=0$,则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是方程(4-2)(或(4-3))的一个振动解.否则称 x 为非振动的.若一个FDE的所有非最终零解都是振动的,则称此方程为振动的(有时称这定义下的振动为"严格振动").

振动性的问题可归为以下4种情形:

1° 判断方程至少有一个振动解;

2° 判断方程是振动的;

3° 判断方程一切解非振动;

4° 判断方程是否存在最终零解.

4.2 振动性的判别

4.2.1 线性自治DDE的振动性

定义4 设 $x(t,\sigma,\varphi)$ 为方程(4-2)(或(4-3))过 (σ,φ) 的解.若 $\exists\,\tau(\sigma,\varphi)\geqslant\sigma$,使得当 $t\geqslant\tau(\sigma,\varphi)$ 时,有 $|x(t,\sigma,\varphi)|>0$(或者 $|x(t,\sigma,\varphi)|<0$)则称 $x(t,\sigma,\varphi)$ 为一最终正(或负)解.

所以振动是指既非最终正解亦非最终负解的情形.严格振动还排除最终零解的情形.

对线性自治DDE,设它的特征方程为 $h(\lambda)=0$.由4.2.1显然有

1° $h(\lambda)=0$ 的一个非实的根 λ_1 对应于方程的一簇振动解 $c_1e^{\lambda_1 t}$, $c_1\in\mathbf{R}$;

2° $h(\lambda)=0$ 的一个实根 λ_2 对应于方程的一簇非振动解 $c_2e^{\lambda_2 t}$, $c_2\in\mathbf{R}$;

3° 当且仅当 $h(\lambda)=0$ 没有实根时,方程的一切解振动.

4.2.2 一阶非定常 DDE 的振动性

考虑两个微分不等式和一阶方程

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau(t))\leqslant 0; \tag{4-6}$$

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau(t))\geqslant 0; \tag{4-7}$$

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-\tau(t))=0. \tag{4-8}$$

记 $g(t)=t-\tau(t)$,要求 $0<g(t)<t$ 连续,$p(t)$ 连续,且 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=+\infty$,则有

定理 1 若成立

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t}p(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{4-9}$$

则有

1° (4-6) 式无最终正解;

2° (4-7) 式无最终负解;

3° (4-8) 式一切解都是振动的.

证 不失一般性,设 $g(t)$ 非减,且记 $\delta(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}g(s)$,不难推出(4-9)式等价于 $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_{\delta(t)}^{t}p(s)\mathrm{d}s>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

对 1°,设 $x(t)$ 是(4-6)式的一个最终正解,对 $t\geqslant t_1$,$x(g(t))>0$.由(4-9)式 $\exists\, t_2>t_1$ 使得

$$\int_{g(t)}^{t}p(s)\mathrm{d}s\geqslant c>\mathrm{e}^{-1},\quad t\geqslant t_2. \tag{4-10}$$

由于 $\dot{x}(t)<0,t\geqslant t_1$,由(4-6)式分离变量,从 $g(t)$ 到 t 积分得 $\ln(x(t)/x(g(t)))+\int_{g(t)}^{t}p(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,t\geqslant t_2$,亦即 $t\geqslant t_2$ 时,$\ln(x(g(t))/y(t))\geqslant\int_{g(t)}^{t}p(s)\mathrm{d}s\geqslant c$.因为 $\mathrm{e}^{s}\geqslant \mathrm{e}s\ \forall\, s\geqslant 0$ 成立 $\Rightarrow x(g(t))/x(t)\geqslant \mathrm{e}c,t\geqslant t_2$.重复上述做法 $\Rightarrow$ 存在序列 $\{t_k\}$,使得

$$x(g(t))/x(t)>(\mathrm{e}c)^k,t\geqslant t_k. \tag{4-11}$$

由(4-10)式,存在 t^* 使得

$$\int_{g(t)}^{t^*}p(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{c}{2},\quad \int_{t^*}^{t}p(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{c}{2},\quad t\geqslant t_k.$$

再由(4-6)式从 $g(t)$ 到 t^* 积分,得

$$x(t^*)-x(g(t))+\int_{g(t)}^{t}p(s)x(g(s))\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

这意味着

$$x(g(t))\geqslant x(g(t^*))\,\frac{c}{2}. \tag{4-12}$$

类似地有

$$x(t)-x(t^*)+\int_{t^*}^{t}p(s)x(g(s))\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

故有

$$x(t^*) \geqslant x(g(t))\frac{c}{2}. \tag{4-13}$$

合并(4-12)式和(4-13)式,得

$$x(t^*) \geqslant x(g(t^*))\left(\frac{c}{2}\right)^2. \tag{4-14}$$

由(4-11)式、(4-14)式,得

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 \geqslant \frac{x(g(t^*))}{x(t^*)} \geqslant (ec)^k, \quad \forall t \geqslant t_k. \tag{4-15}$$

选择 k 充分大使 $(ec)^k > \left(\frac{2}{c}\right)^2$,由于 $ec > 1$,这是可能的 $\Rightarrow$ 与(4-15)式矛盾.类似可证 2°,由 1°、2° $\Rightarrow$ 3°.

定理 2 设(4-8)式中 p, τ 皆正数,且 $p\tau e \leqslant 1$,则(4-8)式有一个非振动解.

事实上,此时(4-8)式是自治的,特征方程为 $h(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0 \Rightarrow h(0) = p > 0$ 且

$$h\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{-1}{\tau} + pe = \frac{p\tau e - 1}{\tau} \leqslant 0$$

$\Rightarrow$ 存在非负实数 $\lambda \in \left[-\frac{1}{\tau}, 0\right]$ 使 $e^{\lambda t}$ 是(4-8)式的一个非振动解.

推论 1 若 p, τ 皆正数,则(4-8)式一切解都是振动的充要条件是 $p\tau e > 1$.

例 3 对方程

$$\dot{y}(t) + e^{-1}y(t-1) = 0.$$

这里 $p\tau e = 1 \Rightarrow$ 有一个非振动解 $y(t) = e^{-t}$(定理 2).

例 4 方程

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{(e\ln^2)t}x\left(\frac{t}{2}\right) = 0,$$

其中 $p(t) = 1/(e\ln 2)t, \tau(t) = \frac{t}{2}$,显然有

$$\int_{t/2}^{t} p(s)\mathrm{d}s = e^{-1},$$

所以它不满足定理 1 条件,有非振动解 $x(t) = t^{\alpha}, \alpha = -1/\ln 2$.

定理 3 设 $a \geqslant 0, p \geqslant 0$ 为常数,考虑

$$\dot{x}(t) + ax(t) + px(t-\tau) \leqslant 0. \tag{4-16}$$

$$\dot{x}(t) + ax(t) + px(t-\tau) \geqslant 0. \tag{4-17}$$

$$\dot{x}(t) + ax(t) + px(t-\tau) = 0. \tag{4-18}$$

若成立 $p\tau > \frac{1}{e}e^{-a\tau}, a \geqslant 0$,则方程(4-18)一切解振动.

4.2.3 二阶系统的振动性

考虑方程

$$\ddot{x}(t)-a(t)x(t)-[p^2+q(t)]x(t-2\tau)=0. \tag{4-19}$$

定理4 设$a(t)\geqslant 0, q(t)\geqslant 0$连续,$t\in \mathbf{R}_+, p, \tau$是正常数且$p\tau e>1$,则方程(4-19)的一切解振动.

证 若结论不成立,则方程(4-19)存在有界解$x(t)$使得当σ充分大时有$x(t)>0, t>\sigma \Rightarrow$当$t>\sigma+2\tau$时,成立$x(t-2\tau)>0$,由方程(4-19),当$t>\sigma+2\tau$时,$\ddot{x}(t)>0$,故$\dot{x}(t)$递增,由$x(t)$有界,方程(4-19)$\Rightarrow \dot{x}(y)>0$,令

$$y(t)=\dot{x}(t)-px(t-\tau), \tag{4-20}$$

则$x(t)$当t充分大时为负,对(4-20)式两边求导,得

$$\dot{y}(t)=\ddot{x}(t)-p\dot{x}(t-\tau),$$

于是有

$$\begin{aligned}\dot{y}(t)+py(t-\tau)&=\ddot{x}(t)-p\dot{x}(t-\tau)+p\dot{x}(t-\tau)-p^2x(t-2\tau)\\&=a(t)x(t)+q(t)x(t-2\tau)\geqslant 0,\end{aligned}$$

即$\dot{y}(t)+py(t-\tau)\geqslant 0$,由定理3及$p\tau e>1\Rightarrow$它没有最终负解,这与(4-20)式矛盾$\Rightarrow$定理结论成立.

4.3 周期解的判别

4.3.1 周期方程与周期解

设$\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$,考虑DDE

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)), \tag{4-21}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau)), \tag{4-22}$$

其中$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\in \mathbf{R}^n, \tau=\text{const}\geqslant 0$,设(4-21)式存在周期为$T$的周期解$\boldsymbol{x}_1(t)$,则由$\boldsymbol{x}_1(t)$代入(4-21)式或(4-22)式得恒等式

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\equiv \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_1(t-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}_1(t-\tau));$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(t+T)\equiv \boldsymbol{F}(t+T,\boldsymbol{x}_1(t+T),\boldsymbol{x}_1(t+T-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}_1(t+T-\tau)).$$

由所设$\boldsymbol{x}_1(t+T)\equiv \boldsymbol{x}_1(t), \dot{\boldsymbol{x}}_1(t+T)\equiv \dot{\boldsymbol{x}}_1(t)$合并上两式,得

$$\boldsymbol{F}(t+T,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_1(t-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}_1(t-\tau))\equiv \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_1(t-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}_1(t-\tau)).$$

这说明当(4-21)式或(4-22)式存在周期为T的周期解$\boldsymbol{x}_1(t)$时,函数$\boldsymbol{F}$沿着这个解是周期为T的周期函数,反之不真.或者说(4-21)式、(4-22)式存在周期解时,右端函数未必关于t是周期的,例如

例5 考虑方程

$$\dot{x}(t)=\cos t+[x^2(t)+y^2(t)-1]F_1(t,x(t),y(t),x(t-\tau),y(t-\tau));$$

$$\dot{y}(t)=-\sin t+[x^2(t)+y^2(t)-1]F_2(t,x(t),y(t),x(t-\tau),y(t-\tau)).$$

不问F_1,F_2为何,恒有周期解$x=\sin t, y=\cos t$.

方程

$$\dot{x}(t) = F^*(x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)) + f(t) \tag{4-23}$$

仅当$f(t)$是周期函数时才有可能存在周期解，而且解的周期只能等于$f(t)$的周期或者是它的整数倍，即方程(4-23)存在周期解的必要条件是$f(t)$为t的周期函数.

4.3.2 齐次自治线性 DDE 的周期解

以线性 RDDE 为例

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau), \tag{4-24}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times n$ 常数阵，$\tau = \text{const} \geqslant 0$. 其特征方程为

$$h(\lambda, \tau) = \det[\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}e^{-\lambda\tau}] = 0. \tag{4-25}$$

定理 5 方程(4-24)存在周期解的充要条件为(4-25)式有非零纯虚根.

证 充分性是显然的，这里证必要性. 设$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$是方程(4-24)的一个周期解，不妨记它的周期为$2l$，因为$\tau = \text{const}$，故不妨取$\sigma = 0$. 由$x(t)$的周期性$\Rightarrow \boldsymbol{x}(t)$在$[-\tau, \infty)$上连续可微，于是在其上可展开为傅里叶(Fourier)级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{l}t}, \tag{4-26}$$

其中 $c_k = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} x(t_1) e^{-i\frac{k\pi}{l}t_1} dt_1$，由 $x(t)$ 的可微性有

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\frac{k\pi}{l} c_k e^{i\frac{k\pi}{l}t}. \tag{4-27}$$

把(4-26)式、(4-27)式代入方程(4-24)，得

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [i\frac{k\pi}{l}I - A - Be^{-i\frac{k\pi}{l}\tau}] c_k e^{i\frac{k\pi}{l}t} = 0,$$

故有

$$[i\frac{k\pi}{l}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}e^{-i\frac{k\pi}{l}\tau}] c_k = 0. \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

若(4-25)式无纯虚根，则对一切 k 有 $c_k = 0 \Rightarrow$ 矛盾.

对 n 阶自治 RDDE 定理结论仍成立，不仅如此，对 NDDE 定理 5 的结论也成立.

4.3.3 非齐次线性自治 DDE

考虑方程

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{jk} x^{(j)}(t - \tau_k) = f(t), \tag{4-28}$$

其中 a_{jk} 是常数. $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m$ 都是常数，$a_{n0} \neq 0$. 由 4.3.1$\Rightarrow$ 仅当 $f(t)$ 为周期的情形才可能有周期解，其周期等于 $f(t)$ 的周期或为它的整数倍. 设 f 的周期为 T. 作变换 $t = \dfrac{T}{2\pi} t_1$，则周期换为 2π.

如上所述，可设$f(t)$为$t \geqslant \sigma$时以2π为周期的连续函数而不失一般性，把它展开为傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\widehat{a}_p e^{ipt},\tag{4-29}$$

适当做些限制，上式可以写成实的形式

$$f(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}(\alpha_p\cos pt+\beta_p\sin pt).$$

(4-28) 式的齐次方程的特征方程为

$$h(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\lambda^k e^{i\tau_k\lambda}=0.\tag{4-30}$$

1° 若(4-30) 式只有纯虚根，亦即不出现共振的情形，则应用叠加原理，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}x^{(k)}(t-\tau_j)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{a}_p e^{ipt}.$$

对应于右边每一个被加项的诸方程为

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{jk}x^{(k)}(t-\tau_j)=\widehat{a}_p e^{ipt},\quad p=\pm1,\pm2,\cdots.$$

它的解为 $A_p e^{ipt}$，$A_p=\widehat{a}_p/h(ip)$，由这些解作和，得

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{a}_p}{h(ip)}e^{ipt}.\tag{4-31}$$

(4-31) 式收敛且 n 次可微，因为它的系数是 $\widehat{a}_p/h(ip)$ 与(4-29) 式的系数 $\widehat{a}_p$ 比较，当 p 充分大时有

$$h(ip)=O(p^n),\quad \text{当 } p\to\infty \text{ 时},$$

此时有 $|\widehat{a}_p|/|h(ip)|<|\widehat{a}_p|$，于是由(4-29) 式的一致收敛性 $\Rightarrow$(4-31) 式的一致收敛性，而且是 n 次可微的 $\Rightarrow$(4-28) 式有唯一的周期解.

2° 若 $h(\lambda)$ 至少有一个零点接近于 im（m 为整数），则当 $\widehat{a}_m\neq0$ 或 $\widehat{a}_{-m}\neq0$ 时出现共振现象，系数的模 $|\widehat{a}_m|/|h(im)|$ 比起在 im 附近没有根的情形陡增，(4-31) 式的收敛性失去保证.

3° 若 $h(\lambda)$ 的根之一等于 im，且 $\widehat{a}_m\neq0,\widehat{a}_{-m}\neq0$，则周期解不存在.

4° 若 $h(\lambda)$ 的根有一个等于 im，且 $\widehat{a}_m=0,\widehat{a}_{-m}=0$，没有其他的整数纯虚根，则存在形如(4-31) 式的双参数周期解.

例6 讨论方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t),\tag{4-32}$$

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt).$$

如上所述(4-32) 式对应的齐次方程的特征方程

$$h(\lambda)=\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0$$

的根分以下几种情形.

1° 若$h(\lambda)=0$无整数纯虚根,即$\lambda=\mathrm{i}m(m=1,2,\cdots)$,$h(\mathrm{i}m)\neq 0$.此时不出现共振$\Rightarrow$(4-32)式只有一个周期解.事实上,由叠加原理,方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=\frac{\alpha_0}{2}$$

得出常数解为$x=\frac{\alpha_0}{2(a+b)}$,则非共振情形只有一个周期解

$$x(t)=\frac{\alpha_0}{2(a+b)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[\alpha_n(a+b\cos n\tau)+\beta_n(b\sin n\tau-n)]\cos nt}{(a+b\cos n\tau)^2+(b\sin n\tau-n)^2}+\frac{[\beta_n(a+b\cos n\tau)-\alpha_n(b\sin n\tau-n)]\sin nt}{(a+b\cos n\tau)^2+(b\sin n\tau-n)^2}\right\}.$$

2° 若特征方程$h(\lambda)=0$有整数纯虚根$\pm\mathrm{i}m$,则出现共振,方程(4-32)的周期解仅当

$$\alpha_m=\int_0^{\pi}f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t,\quad \beta_m=\int_0^{\pi}f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t=0$$

时,才可能存在.而且方程(4-32)的解具有与1°相同的形式.但$\cos mt$与$\sin mt$的系数是任意常数.

4.3.4 小参数法求周期解

考虑方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t)+\mu g(t,x(t),x(t-\tau),\mu).\qquad(4\text{-}33)$$

设

1° 连续函数f和g是t的周期为2π的周期函数;

2° 方程(4-33)的线性部分的特征根皆具负实部;

3° $g(t,\cdot,\cdot,\cdot)$对充分小的$|\mu|$在导出方程

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t)$$

的周期解$x^*(t)$的近旁是第2,3,4个变元的解析函数;

4° $a,b,\tau>0$皆常数,

则对每一个充分小的$|\mu|$,都有方程(4-33)的周期解$x(t,\mu)$使得

$$\lim_{\mu\to 0}x(t,\mu)=x^*(t),\qquad(4\text{-}34)$$

而且这个周期解可表示成形式

$$x(t,\mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\cdots+\mu^n x_n(t)+R_n(t,\mu),\qquad(4\text{-}35)$$

其中$R(t,\mu)=O(\mu^n)$.(4-35)式中μ^k的系数$x_k(t)$是把(4-35)式代入方程(4-33)比较μ的同次项系数.得到的一列常微分方程

$$\dot{x}_0(t)+ax_0(t)+bx_0(t-\tau)=f(t),$$

$$\dot{x}_1(t)+ax_1(t)+bx_1(t-\tau)=g(t,x_0(t),x_0(t-\tau),0),$$

$$\dot{x}_2(t)+ax_2(t)+bx_2(t-\tau)=\left(\frac{\partial g}{\partial\mu}\right)_0+x_1(t)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t)}\right)_0+$$

$$x_1(t-\tau)\left(\frac{\partial g}{\partial x(t-\tau)}\right)_0,$$

$$\cdots$$

它们的周期解便取为 $x_k(t)$, $k=0,1,\cdots$ 其中记号$()_0$表示括号中变元 $x(t)$, $x(t-\tau)$, μ 应当代之以相应的$x_0(t)$, $x_0(t-\tau)$, 0.

对模充分小的 μ，可用绍德尔(Schauder) 不动点定理，或逐次逼近法证明方程(4-33)ω- 周期解的存在性.

例 7　讨论方程

$$\dot{x}(t)-x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t+\mu x^2(t),\quad x\in\mathbf{R} \tag{4-36}$$

的近似解 -ω 周期解，仍将解写成(4-35) 式的形式. 但只取两项，故

$$\dot{x}_0(t)-x_0\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t.$$

不共振的情形，可求得解为形式

$$x_0(t)=A\cos t+B\sin t.$$

由此得 $x_0(t)=-\frac{1}{2}\cos t$，进而有

$$\dot{x}_1(t)-x_1\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=x_0^2(t)=\frac{1}{8}(1+\cos 2t),$$

于是

$$x_1(t)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cos 2t,$$

$$x(t,\mu)\approx-\frac{1}{2}\cos t+\frac{\mu}{16}(\cos 2t-2).$$

5　泛函微分方程基本理论

5.1　有限时滞滞后型泛函微分方程

5.1.1　存在唯一性

设 $\sigma\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\varphi}\in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$, $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 是开集，$f:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 连续，则由1.3.4，滞后型泛函微分方程 RFDE 的初值问题可以写成

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),\quad x_\sigma=\boldsymbol{\varphi}, \tag{5-1}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{C}$, $\dot{x}_t=x(t+\theta)$, $\theta\in[-r,0]$. 它等价于积分方程

$$\begin{aligned}x(t)&=\varphi(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s)\mathrm{d}s,\\ x_\sigma&=\boldsymbol{\varphi},\quad t\geqslant\sigma.\end{aligned} \tag{5-2}$$

引理 1 若 $x\in c([\sigma-r,\sigma+a],\mathbf{R}^n)$，$a>0$，则当 $t\in[\sigma,\sigma+a]$ 时 $x_t=x(t+\theta)$ 关于 t 是连续的.

证 由 $x(t)$ 在 $[\sigma-r,\sigma+a]$ 上一致连续可推出 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使当 $|t-s|<\delta$ 时，$|x(t)-x(s)|<\varepsilon$ 蕴涵在 $[\sigma,\sigma+a]$ 上，当 $|t-s|<\delta$ 时，有 $|x(t+\theta)-x(s+\theta)|<\varepsilon$，$\theta\in[-r,0]$，即结论成立.

扩充 $\boldsymbol{\varphi}$ 的定义范围，引入

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}, & \sigma-r\leqslant t<\sigma;\\ \boldsymbol{\varphi}(0), & t\geqslant\sigma.\end{cases}$$

再引进零初始条件：设 $x(t)$ 为方程(5-1)过 (σ,φ) 的解，令

$$x(\sigma+t)=\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\sigma+t)+y(t),t\geqslant-r.$$

把上式代入方程(5-2)并注意到 $t\in[-r,0]$ 时，有

$$y(t)=x(\sigma+t)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\sigma+t)=x(\sigma+t)-\varphi(\sigma+t)=\mathbf{0}.$$

而当 $t\geqslant0$ 时

$$\begin{aligned}y(t)&=x(\sigma+t)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\sigma+t)=x(\sigma+t)-\boldsymbol{\varphi}(0)\\&=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{s+\sigma}+y_s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中令 $s_1=s+\sigma$，再记 $y_0=y(0)$，则方程(5-2)化为零初值问题.

记 V 为 $\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 的子集，$f:V\to\mathbf{R}^n$ 连续，f 的全体记为 $C(V,\mathbf{R}^n)$，$\mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)\subseteq\mathbf{C}(V,\mathbf{R}^n)$ 是有界泛函 f 组成的子集，赋 $\mathbf{C}^0$ 以范数

$$|f|_V=\sup_{(t,\varphi)\in V}|f(t,\varphi)|,$$

则 $\mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$ 是一个巴拿赫空间.

$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，定义 $I_\alpha=[0,\alpha]$，$B_\beta=\{\psi\in\mathbf{C},|\psi|\leqslant\beta\}$，$\mathscr{B}(\alpha,\beta)=\{y\in\mathbf{C}([-r,\alpha],\mathbf{R}^n),y_0=0,y_t\in B_\beta,t\in I_\alpha\}$.

引理 2 设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 是开集，$W\subseteq\Omega$ 是紧集，$f^0\in\mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 是给定的，则

1° $\exists W$ 的一个邻域 $V\subseteq\Omega$ 使 $f^0\in\mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$，且存在 f^0 的一个邻域 $U\subseteq\mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$ 及正常数 M 使

$$|f(\sigma,\varphi)|<M(\sigma,\varphi)\in V,\quad f\in U;\tag{5-3}$$

2° $\forall(\sigma^0,\varphi^0)\in W$，$\exists\alpha,\beta$，当 $t\in I_\alpha$，$y\in\mathscr{B}(\alpha,\beta)$ 时，有 $(\sigma^0+t,y_t+\hat{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$.

证 对 1°，由 W 是紧的，f^0 在 Ω 中连续 $\Rightarrow(\sigma^0,\varphi^0)\in W$ 时存在 M，使成立 $|f^0(\sigma^0,\varphi^0)|<M_1$，同时由 f^0 的连续性，存在常数 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\varepsilon$ 使成立：

$$|f^0(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi)|<M_1+\varepsilon\overset{\text{def}}{=\!=}M;$$

$$(\sigma^0,\varphi^0)\in W,(t,\psi)\in I_{\bar{\alpha}}\times B_{\bar{\beta}}.$$

再构造 V 为形式

$$V=\{(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi):(\sigma^0,\varphi^0)\in W,(t,\psi)\in I_{\bar{\alpha}}\times B_{\bar{\beta}}\},$$

则 $V\subseteq\Omega$，f^0 在 V 中有界，即 $f^0\in\mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$ 并且 $\exists f^0$ 的充分小邻域 $U\subseteq\mathbf{C}^0(V,$

$\mathbf{R}^n$) 使(5-3) 式成立.

对 2°,取 $\beta\in(0,\bar{\beta})$,由 W 是紧的,故可选择 $\alpha\in(0,\bar{\alpha})$ 使 $\forall(\sigma^0,\varphi^0)\in W,t\in I_\alpha$, $|\varphi^0|<\beta$ 时成立

$$|\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+t}-\varphi^0|<\bar{\beta}-\beta,$$

由此推出

$$|y_t+\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+t}-\varphi^0|\leqslant|y_t|+|\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+t}-\varphi^0|<\beta+\bar{\beta}-\beta=\bar{\beta},$$

其中 $|y_t|\leqslant\beta$, $|\varphi^0|\leqslant\beta$,即当 $t\in I_\alpha, y\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 时,有 $(\sigma^0+t,y_t+\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+t})\in V$.

现在由积分方程(5-2) 定义积分算子 T 为

$$\mathrm{T}: W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathbf{C}([-r,\alpha],\mathbf{R}^n);$$

$$\mathrm{T}(\sigma,\varphi,f,y)(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)\mathrm{d}s,\ t\in I_\alpha;$$

$$\mathrm{T}(\sigma,\varphi,f,y)=0,\quad t\in[-r,0].$$

引理 3　设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 为开集, $W\subseteq\Omega$ 为紧集, $f^0\in\mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 给定,邻域 U, V 及常数 M,α,β 是引理 2 中取定的,则

1° T 是连续的;

2° 在 $\mathbf{C}([-r,\alpha],\mathbf{R}^n)$ 中存在紧集 K,使

$$\mathrm{T}: W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to K;$$

3° 若 $M\alpha\leqslant\beta$,则有

$$\mathrm{T}: W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathscr{A}(\alpha,\beta).$$

证　由 T 的定义显然有 $T: W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to\mathbf{C}([-r,\alpha],\mathbf{R}^n)$,先证 2°:由 (5-3) 式 $\forall t\in I_\alpha$ 有

$$|\mathrm{T}(\sigma,\varphi,f,y)(t)-\mathrm{T}(\sigma,\varphi,f,y)(\tau)|\leqslant M|t-\tau|,$$

$$|\mathrm{T}(\sigma,\varphi,f,y)(t)|\leqslant M\alpha.$$

定义紧集 K 为

$$K=\{g\in\mathbf{C}'([-r,\alpha],\mathbf{R}^n): |g(t)-g(\tau)|\leqslant M|t-\tau|, |g(t)|\leqslant M\alpha\},$$

所以 $\mathrm{T}: W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)\to K$,若 $M\alpha\leqslant\beta$,则 $K\subseteq\mathscr{A}(\alpha,\beta)$,故 3° 成立. 最后证 1°:设 $(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\in W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 且当 $K\to\infty$ 时 $(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\to(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)\in W\times U\times\mathscr{A}(\alpha,\beta)$,由 $\mathrm{T}(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\in K$,且 K 是紧的 $\Rightarrow\exists$ 子序列(不妨设为它自身) 以及一个 $r\in K$,使得

$$\mathrm{T}(\sigma^k,\varphi^k,f^k,y^k)\to r, k\to\infty.$$

由于 $\forall s\in I_\alpha$,有

$$f^k(\sigma^k+s,\hat{\varphi}^{k}_{\sigma^k+s}+y^k_s)\to f^0(\sigma^0+s,\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+s}+y^0_s).$$

由引理 2 $\Rightarrow$ 诸 f^k 一致有界,故用勒贝格(Lebesgue) 控制收敛定理推知 $\forall t\in I_\alpha$,有

$$r(t)=\lim_{k\to\infty}\int_0^t f^k(\sigma^k+s,\hat{\varphi}^{k}_{\sigma^k+s}+y^k_s)\mathrm{d}s=\int_0^t f^0(\sigma^0+s,\hat{\varphi}^{0}_{\sigma^0+s}+y^0_s)\mathrm{d}s$$

$$=\mathrm{T}(\sigma^0,\varphi^0,f^0,y^0)(t).$$

因此所有子序列收敛的极限是 $r(t) = \mathrm{T}(\sigma^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{f}^0,\boldsymbol{y}^0)(t)$，并且由(5-3)式每个子序列都有收敛的子序列，即原序列收敛，T 的连续性得证.

绍德尔不动点定理："设 X 为巴拿赫空间，U 为 X 的有界凸集，算子 $\mathrm{T}: U \to U$ 是全连续的，则 T 在 U 中有一个不动点".（T 全连续 $\Leftrightarrow \forall$ 有界集 $B \subset U$，$\mathrm{T}B$ 是准紧的，或者说 $\mathrm{T}B$ 的闭包是紧的）.

定理 1 设 $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ 为开集，$f^0 \in \mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$，若 $(\sigma,\varphi) \in \Omega$，则存在 RFDE$(f^0)$ 过 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 的一个解.

证 取 $W = \{(\sigma,\boldsymbol{\varphi})\}$ 为一单点集，由于 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 是空间 $\mathbf{C}([-r,\alpha],\mathbf{R}^n)$ 的有界闭凸集，由引理 3，绍德尔不动点定理立即推知：全连续算子 $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\sigma,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{f}^0,\cdot)$ 在 $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$ 中有一个不动点，即为(5-1)式过 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 的解 $\boldsymbol{x}(\sigma,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{f}^0)(t)$

定理 2 设 $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ 为开集，$W \subseteq \Omega$ 是紧集，$f^0 \in \mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 给定，则 $\exists W$ 的邻域 $V \subseteq \Omega$ 使 $f^0 \in \mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$，$\exists f^0$ 的一个邻域 $U \subseteq \mathbf{C}^0(V,\mathbf{R}^n)$ 和 $\alpha > 0$ 使得 $\forall(\sigma,\varphi) \in W, f \in U$，RFDE$(f)$ 在 $[\sigma - r,\sigma + \alpha]$ 上存在过 (σ,φ) 的一个解 $\boldsymbol{x}(\sigma,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{f})(t)$.

以 $\boldsymbol{f}$ 代替 $\boldsymbol{f}^0$. 与定理 1 类似证明.

定理 3 设 $\Omega \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{C}$ 为开集，$\boldsymbol{f} \in \mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$，$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi})$ 在 Ω 中的每一紧集里关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足利普希茨条件

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\psi})| \leqslant k\,|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}|.$$

若 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi}) \in \Omega$，则(5-1)式过 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 有唯一一个解.

证 由定理 1 可知过 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 的解存在，如引理 2 定义 I_α, B_β，设 x, y 都是(5-1)式在 $[\sigma - r,\sigma + \alpha]$ 上过 $(\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 的解. $\boldsymbol{x}_\sigma = \boldsymbol{y}_\sigma = \boldsymbol{\varphi}$，则

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) = \int_0^t [\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_s) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}_s)]\mathrm{d}s.$$

$$\boldsymbol{x}_\sigma - \boldsymbol{y}_\sigma = \mathbf{0}, \quad t \geqslant \sigma.$$

若在任何包含轨道 $\{(t,\boldsymbol{x}_t)\},\{(t,\boldsymbol{y}_t)\}, t \in I_\alpha$ 的紧集中，$f(t,\boldsymbol{\varphi})$ 在此紧集中的利普希茨常数为 K，选取 α^* 使 $k\alpha^* < 1, \alpha^* \leqslant \alpha$，当 $t \in I_{\alpha^*} = [\sigma,\sigma + \alpha^*]$ 时，有

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \int_\sigma^t k\,|\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{y}_s|\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant k\alpha^* \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{y}_s| < \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{y}_s|, t \in I_\alpha.$$

由 I_{α^*} 是闭区间，故有

$$\sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{y}_s|, t \in I_{\alpha^*}. \tag{5-4}$$

当 $t \in [\sigma - r,\sigma]$ 时 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| = 0$，故有

$$\sup_{s \in I_{\alpha^*}} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \sup_{s \in I_{\alpha^*}} |\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{y}_s|.$$

这与(5-4)式不合，重复上述论证可得在 $[\sigma + \alpha^*,\sigma + 2\alpha^*]$ 上 $x(t) = y(t)$，依此类推得证.

5.1.2 连续依赖性

现在指的是(5-1)式的解 $\boldsymbol{x}(t,\sigma,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{f})$ 关于 $\sigma,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{f}$ 的连续依赖性问题. 对

(5-1)式,设$\Omega \subseteq \mathbf{R}\times\mathbf{C}$是开集,且$(\sigma^k,\varphi^k)\to(\sigma^0,\varphi^0)$,其中$(\sigma^k,\varphi^k),(\sigma^0,\varphi^0)\in\Omega$,$k_0$足够大,定义

$$W = \{(\sigma^k,\varphi^k):k = 0,k \geqslant k_0\}$$

$\Rightarrow W$是紧的.由引理2$\Rightarrow \exists \bar{\alpha},\bar{\beta}\in\mathbf{R}_+-\{0\}$,使$W\subseteq V\subseteq\Omega$,$V$也是紧的,定义为

$$V = \{(\sigma^k + t),(\varphi^k + \psi):(\sigma^k,\varphi^k)\in W,(t,\psi)\in I_\alpha - \varkappa B_{\bar{\beta}}\},$$

并且存在$\beta\in(0,\bar{\beta}),\alpha\in(0,\bar{\alpha})$,使当$(t,\psi)\in I_\alpha\times B_\beta$时,有

$$(\sigma^k + t,\varphi^k + \psi)\in V,\ |f^k(\sigma^k + t,\varphi^k + \psi)| < M,k = 0,k > k_0$$

或者当$y^k\in\mathscr{A}(\alpha,\beta)$时,对$\varphi^k$的扩张$\varphi^k,\psi = y_t^k$成立

$$(\sigma^k + t,\widehat{\varphi}^{k_k}_{\sigma^k+t} + y_t^k)|\in V,\ |f^k(\sigma^k + t,\widehat{\varphi}^{k_k}_{\sigma^k+t} + y_t^k)| < M,k = 0,k \geqslant k_0.$$

定理4　设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$是开集,$W,V$如上定义是紧集.若$\sigma^k\to\sigma^0,\varphi^k\to\varphi^0$,$|f^k\to f^0|_V\to 0$,则由$\sigma^k\to\sigma^0$,$\exists b_1$使$\sigma^k+\alpha\geqslant b_1$,有

1° k_0适当大时方程

$$\dot{x}(t) = f^k(t,x_t),\quad k = 0,\quad k\geqslant k_0$$

过(σ^k,φ^k)的解$x^k(t)$在$[\sigma^k - r,\sigma^k + \alpha]$上存在;

2° $\forall\varepsilon > 0,\exists k^*(\varepsilon)$,当$k\geqslant k^*$时$x^k(t)$在$[\sigma^0 - r + \varepsilon,b_1]$上有定义,当$k\to\infty$时$x^k(t)\to x^0(t)$,当$t\in[\sigma^0 - r + \varepsilon,b_1]$时是一致的.

5.1.3　解的延拓与原子性

对初值问题(5-1),沿t的正向有类似于常微分方程的延拓定理,先给出合适的定义.

定义1　设(5-1)式在$[\sigma - r,\alpha]$上的一个解$x(t)$,这里$\alpha > \sigma$,若存在一个$\beta > \alpha$,使定义在$[\sigma - r,\beta)$上的函数$\tilde{x}(t)$在$[\sigma - r,\alpha]$上等于$x(t)$在$[\sigma,b)$上满足(5-1)式,则称$\tilde{x}(t)$是$x(t)$的一个延拓.确切地说$\tilde{x}(t)$的定义域比$x(t)$延拓了$[\alpha,\beta)$这一长度的区间.

若这种延拓不存在,则称$x(t)$是一个不可延拓解.此时$[\sigma - r,\alpha)$叫做解的最大存在区间.

定理5　设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$是开集,$f\in\mathbf{C}(\Omega,\mathbf{R}^n)$,若$x(t)$是(5-1)式在$[\sigma - r,\alpha)$上的一个不可延拓解,则对任何$\Omega$中的紧集$W$,$\exists t_W$使$(t,x_t)\bar{\in} W,t\in[t_W,\alpha)$.

至于反向延拓,则需详尽说明它的含义和问题所在.由于解的一段是指定的初始函数$\varphi\in\mathbf{C}$,而它未必在$[\sigma - r,\sigma]$上可微,当然更未必满足RFDE(f).因此解的反向延拓应有特定含义.

定义2　设$\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$是开集,$f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$,函数$x(t)\in\mathbf{C}([\sigma - r - \alpha,\sigma],\mathbf{R}^n)$,$\alpha > 0$.若

1° $x_\sigma = \varphi$;

2° $\forall\sigma_1\in[\sigma - r,\sigma],(\sigma_1,x_{\sigma_1})\in\Omega$;

3° $x(t)$在$[\sigma_1 - r,\sigma]$上的限制是方程RFDE(f)在$[\sigma_1 - r,\sigma]$上过(σ_1,x_{σ_1})的

解,记为 $\widehat{x}(t)$,

则称 $\widehat{x}(t)$ 是(5-1)式过(σ,φ)的解的一个**反向延拓**.

当初始值 σ 取定,沿 $t \geqslant \sigma$ 的正向求解是一种积分延拓,而沿 $t \leqslant \sigma$ 求解则是微分延拓.这与超前型方程正好相反.由于初始函数 $\varphi \in \mathbf{C}$.若 φ 连续而不可微,则肯定不能反向延拓,即使 φ 连续可微,也还必须满足一系列条件 $\hat{x}(t)$ 才存在.所以,对 RFDE(f) 一般地说是不能负向求解的.从应用背景看,RFDE(f) 与抛物型偏微分方程类似,可能描述熵增加的某种扩散过程,这种过程是不可逆的.

例 1　设 $x \in \mathbf{R}, a \neq 0, a \neq -b, r > 0$ 皆常数,方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r). \tag{5-5}$$

选取 $\sigma = 0$,初始函数 $\varphi = k = \text{const}, t \in [-r,0]$.方程(5-5)改为

$$x(t-r) = \frac{\dot{x}(t) - ax(t)}{b}.$$

令 $t_1 = t - r$,则上式为 $x(t_1) = \frac{1}{b}[\dot{x}(t_1+r) - ax(t_1+r)]$,当 $t_1 \in [-2r,-r]$ 时,$x(t_1+r) = \varphi(t_1+r) = k, \dot{x}(t_1+r) = 0 \Rightarrow x(t_1) = -\frac{ak}{b}$,由所设 $-\frac{ak}{b} \neq k \Rightarrow x(t)$ 在 $-r$ 处不连续.而所谓的反向延拓解指的是连续解.在这个意义上说,不存在满足初值 $\varphi(t) = k, t \in [-r,0]$ 的反向延拓解.这里 $\varphi = k$ 是连续可微的.

为了给出反向延拓定理,必须引入算子原子性的概念.

例 2　考虑方程

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-r).$$

若 $\sigma = 0, \varphi \in \mathbf{C}$ 是给定的,$x \in \mathbf{R}$ 过(σ,φ)存在反向延拓解,则 φ 必须在区间$[-\epsilon,0]$上可微$(\epsilon > 0)$,并且 $\dot{\varphi}(0) = a(0)\varphi(-r)$.反之,$t \in [-\epsilon,0]$ 时若 $a(t) \neq 0$,$\dot{\varphi}(t)$ 存在且 $\dot{\varphi}(0) = a(0)\varphi(-r)$,则定义

$$x(t-r) = \frac{1}{a(t)}\dot{\varphi}(t).$$

当 $t \in [-\epsilon,0]$ 时,$t-r \in [-r-\epsilon,-r]$,即 $x(t)$ 在$[-r-\epsilon,0]$上有意义,并写成

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\epsilon,0]; \\ \widehat{\varphi}(t), & t \in [-r-\epsilon,-\epsilon], \end{cases}$$

$$\widehat{\varphi} = \begin{cases} \varphi, & t \in [-r,-\epsilon]; \\ \dot{\varphi}(t+r)/a(t+r), & t \in [-r-\epsilon,-r]. \end{cases}$$

从这个例子注意到两点:

1° $t \in [-\epsilon,0]$ 时 $a(t) \neq 0$;

2° $t \in [-\epsilon,0]$ 时 φ 连续可微且 $\varphi(-r) = \frac{1}{a(0)}\widehat{\varphi}(0)$.

2° 表明 φ 在 $-r$ 处有特定要求.$f(t,\varphi)$ 随着 $\varphi(-r)$ 的变化形式取决于一个系数而依赖于 t,φ.这是本节行将引入的原子性定义,它在 NFDE 中有重要应用.

巴拿赫空间 $\mathbf{C}=\mathbf{C}([-r,0],\mathbf{R}^n)$ 上的线性算子 $\mathbf{L}:\mathbf{C}\to\mathbf{R}^n$，记为 $\mathbf{L}\in\mathscr{L}(\mathbf{C},\mathbf{R}^n)$，沿用 1.3.2 的记号，有

$$\mathbf{L}(\varphi)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta\boldsymbol{\eta}(\theta)]\varphi(\theta). \tag{5-6}$$

若 $\mathbf{L}(\cdot):\mathbf{R}\times\mathbf{C}\to\mathbf{R}^n,\mathbf{L}(\cdot)\in\mathscr{L}(\mathbf{R}\times\mathbf{C},\mathbf{R}^n)$，则(5-6)式为

$$\mathbf{L}(\lambda,\varphi)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta\boldsymbol{\eta}(\lambda,\theta)]\varphi(\theta). \tag{5-7}$$

这里 $\lambda\in\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}(\theta),\boldsymbol{\eta}(\lambda,\theta)$ 都是 $n\times n$ 有界变差矩阵.

定义3 称算子 $\mathrm{L}(\lambda,\varphi)$ 具有测度光滑性，若 $\forall\beta\in\mathbf{R}$，存在纯量函数 $r(\lambda,s)$，$r(\lambda,0)=0$ 关于 $\lambda,s\in\mathbf{R}$ 是连续的，使得对 $\lambda\in\Lambda\subseteq\mathbf{R},s>0$ 成立

$$\left|\lim_{h\to0}\int_{\beta+h}^{\beta+s}+\int_{\beta-s}^{\beta-h}[\mathrm{d}_\theta\boldsymbol{\eta}(\lambda,\theta)]\varphi(\theta)\right|\leqslant r(\lambda,s)\mid\varphi\mid, \tag{5-8}$$

$\mid\varphi\mid$ 取 $\mathbf{C}$ 中的上确界模.

这里引用一个已知结果.

引理4 若 $\mathbf{L}\in\mathbf{C}(\Lambda,\mathscr{L}(\mathbf{C},\mathbf{R}^n)),\Lambda\subset\mathbf{R}$，则 $\mathrm{L}(\cdot,\cdot)$ 具有测度光滑性.

定义4 对 $\mathrm{L}(\lambda,\varphi)$ 的表示式(5-7)，若 $\beta\in\mathbf{R}$ 且矩阵 $A(\lambda,\beta,L)\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{\eta}(\lambda,\beta^+)-\boldsymbol{\eta}(\lambda,\beta^-)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 处是非异的 $\Leftrightarrow\det A\neq0$，则说 $\mathrm{L}(\lambda,\varphi)$ 在 λ_0 上，于 β 处是原子的(atomic).

若 $A(\lambda,\beta,\mathrm{L})$ 在 $\Lambda\subset\mathbf{R}$ 上是非异的，则称算子 $\mathrm{L}(\lambda,\varphi)$ 在 Λ 上，于 β 处是原子的，故原子的概念，就是非奇异的另一种说法.

注1 在应用中 λ 往往即初始时刻 t_0，在定义4中蕴含着

1° 若 $\theta=0\in[-r,0]$，0^+ 取为 0；

2° 若 $\theta=-r\in[-r,0]$，$-r^-$ 取为 $-r$.

例3 设 $\mathrm{L}(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$，则 L 是 $\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ 的连续线性泛函，其中 $a(t),b(t)$ 在 $t\in\mathbf{R}$ 处连续，相应的核函数取为

$$\boldsymbol{\eta}(t,\theta)=\begin{cases}a(t), & \theta=0;\\ 0, & -r<\theta<0;\\ -b(t), & \theta=-r,\end{cases}$$

则由 $\mathrm{L}(t,\varphi)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta\boldsymbol{\eta}(t,\theta)]\varphi(\theta)$ 推得

$$\det[\boldsymbol{\eta}(\sigma,0^+)-\boldsymbol{\eta}(\sigma,0^-)]=a(\sigma),$$
$$\det[\boldsymbol{\eta}(\sigma,r^+)-\boldsymbol{\eta}(\sigma-r^-)]=b(\sigma).$$

亦即

$\mathrm{L}(t,\varphi)$ 在 σ 上，于 0 处是原子的 $\Leftrightarrow a(\sigma)\neq0$；

$\mathrm{L}(t,\varphi)$ 在 σ 上，于 $-r$ 处是原子的 $\Leftrightarrow b(\sigma)\neq0$.

对非线性算子的原子性有如下定义.

定义5 设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 是开集，$D(t,\varphi):\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是非线性连续泛函，关于 φ 有连续弗雷歇(Fréchet)导数 $\mathrm{D}_\varphi(t,\varphi),\mathrm{D}_\varphi(t,\varphi)\in\mathbf{C}(\Omega,\mathscr{L}(C,\mathbf{R}^n))$，由里斯(Riesz)

表示定理 $\Rightarrow$ 存在 $n\times n$ 有界变差阵 $\boldsymbol{\mu}(t,\varphi,\theta),(t,\varphi)\in\Omega,\theta\in[-r,0]$,使

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_\theta\boldsymbol{\mu}(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta)\psi\in C.$$

对$(\sigma,\varphi_0)\in\Omega$ 及 $\theta_0\in[-r,0]$,若

$$\det[\boldsymbol{\mu}(\sigma,\varphi_0,\theta_0^{-1})-\boldsymbol{\mu}(\sigma_0,\varphi_0,\theta_0^{-1})]\neq 0, \tag{5-9}$$

则称非线性泛函 D 在(σ,φ_0) 上,于 θ_0 处是原子的.

若 D 在 $\forall(t,\varphi)\in H\subsetneq\Omega$ 上,于 θ_0 处(5-9)式成立,则称算子 D 在 H 上,于 θ_0 处是原子的.

原子的定义本意是精确描述泛函微分方程中某些系数的特定构造,以确保方程的某种属性.

例 4 设 $x\in\mathbf{R}$,方程

$$\frac{d}{dt}[a(t)x(t)+b(t)x(t-r)]=f(t,x(t),x(t-r)). \tag{5-10}$$

记 $D(t,x_t)=a(t)x(t)+b(t)x(t-r)$,即 $D(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$,如上所述,有

$D(t,\varphi)$ 在 $I\subsetneq\mathbf{R}$ 上,于 0 处是原子的 $\Leftrightarrow a(t)\neq 0,t\in I$;

$D(t,\varphi)$ 在 $I\subsetneq\mathbf{R}$ 上,于 $-r$ 处是原子的 $\Leftrightarrow b(t)\neq 0,t\in I$.

在 I 上 $a(t)=0,b(t)\neq 0\Rightarrow$(5-10)式是 ADDE, $b(t)=0,a(t)\neq 0$ 是 RDDE, $a(t)\neq 0,b(t)\neq 0$ 是 NDDE,这几句话都可以换为原子的说法.

例 5 考虑非线性方程

$$\begin{aligned}&2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r)+\dot{a}(t)x^2(t)+\\&\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)=f(t,x(t),x(t-r)).\end{aligned} \tag{5-11}$$

把(5-11)式改写成

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D(t,x_t)&=\frac{d}{dt}\left[a(t)x^2(t)+\frac{1}{2}b(t)x^2(t-r)\right]\\&=f(t,x(t),x(t-r)).\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=D_t(t,x_t)+D_\varphi(t,x_t)\dot{x}_t. \tag{5-12}$$

(5-12)式中弗雷歇导数 $D_\varphi(t,x_t)$ 具体计算如下:

$$\begin{aligned}D(t,\varphi+\psi)-D(t,\varphi)&=a(t)(\varphi(0)+\psi(0))^2+\frac{1}{2}b(t)(\varphi(-r)+\\&\quad\psi(-r))^2-a(t)\varphi^2(0)-\frac{1}{2}b(t)\varphi^2(-r)\\&=2a(t)\varphi(0)\psi(0)+b(t)\varphi(-r)\psi(-r)+\\&\quad\text{非线性部分},\end{aligned}$$

由此得出

$$D_\varphi(t,\varphi)\psi=2a(t)\varphi(0)\psi(0)+b(t)\varphi(-r)\psi(-r);$$

$$D_\varphi(t,\varphi)\dot{x}_t=2a(t)x(t)\dot{x}(t)+b(t)x(t-r)\dot{x}(t-r).$$

取有界变差阵为

$$\mu(t,\varphi,\theta)=\begin{cases}2a(t)\varphi(0), & \theta=0;\\ 0, & -r<\theta<0;\\ -b(t)\varphi(-r), & \theta=-r.\end{cases}$$

由此有

$$D_{\varphi}(t,\varphi)\psi=\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\mu(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta),$$

则 $D(t,\varphi)$ 在 $t\in I$ 上,于0处原子 $\Leftrightarrow D_{\varphi}(t,\varphi)$ 在 $t\in I$ 上,于0处原子 $\Leftrightarrow \det[\mu(t,\varphi,0^{+})-\mu(t,\varphi,0^{-})]$ 在 I 上不等于 $0\Leftrightarrow 2a(t)\varphi(0)=2a(t)x(t)\neq 0, t\in I$.

同理可分析于 $-r$ 处原子的状况.

例6 考虑方程组

$$A\dot{x}(t)+B\dot{x}(t-\tau)=Cx(t)+Dx(t-r),$$

其中 A,B,C,D 为 $n\times n$ 常数阵,左边为

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)+Bx(t-\tau)]=\frac{d}{dt}D(t,\varphi),$$

$$D(t,\varphi)=D(\varphi)=A\varphi(0)+B\varphi(-r).$$

取

$$\mu(\varphi,0)=\begin{cases}A, & \theta=0;\\ 0, & -r<\theta<0;\\ -B, & \theta=-r,\end{cases}$$

则

$$D(\varphi)=\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\mu(\varphi,\theta)]\psi(\theta);$$

$D(\varphi)$ 在 I 上,于0处原子 $\Leftrightarrow \det A\neq 0$;

$D(\varphi)$ 在 I 上,于 $-r$ 处原子 $\Leftrightarrow \det B\neq 0$.

现在可以叙述一个反向延拓定理.

定理6 设 $\Omega\subseteq \mathbf{R}\times C$ 是开集,$f:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 连续,给定初值 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$,若满足

1° 存在 $\alpha\in(0,r)$ 使 $\dot{\varphi}(\theta)$ 在 $[-\alpha,0]$ 上连续且 $\dot{\varphi}(0)=f(\sigma,\varphi)$;

2° 当 f 关于 φ 是线性时,f 在 $[\sigma-\alpha,\sigma]$ 上,于 $-r$ 处是原子的.当 $f(t,\varphi)$ 关于 φ 是非线性时,存在 $\beta>0$,使 $f(t,\varphi)$ 在 $U=[\sigma-\alpha,\sigma]\times B_{\varphi,\beta}$ 上于 $-r$ 处是原子的,其中

$$B_{\varphi,\beta}=\{\psi:\psi\in C,\ |\psi-\varphi|\leqslant\beta\};$$

3° $f(t,\varphi)$ 对 φ 存在连续的二阶弗雷歇导数,则 $\exists\bar{\alpha}>0$,使RFDE(f)的初值问题(5-1)过 (σ,φ) 的解在区间 $[\sigma-r-\alpha,\sigma]$ 上存在且唯一.

5.1.4 解的整体存在性

在谈论稳定性、有界性、振动性等一系列解的重要性态时,有一个前提——解是整体存在的,所以列出几个判断准则,供应用参考.

定义6 若对任意的 $\sigma\in\mathbf{R},\varphi\in C$,方程(5-1)过 (σ,φ) 的解 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 在 $[\sigma$

$-r,+\infty)$ 上存在,则称方程(5-1)的解是整体存在的.

现在给出 n 个整体存在性的判别准则.

定理7　设方程(5-1)中 $f(t,\varphi)$ 连续,若存在连续函数 $M(t),N(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$,使得

$$|f(t,\varphi)|\leqslant M(t)+N(t)|\varphi|,(t,\varphi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{C},$$

则(5-1)式的解整体存在.

推论1　若 f 连续,$\forall(t,\varphi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{C}$, $|f(t,\varphi)|\leqslant M=\text{const}$,则(5-1)式的解整体存在.

推论2　若 f 连续,且存在 $\mathrm{L}=\text{const}$. $|f(t,\varphi)|<\mathrm{L}|\varphi|$,则 $\forall(t,\varphi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{C}$,(5-1)式的解整体存在.

为给出另几个判断准则,需要一些记号.令

$I=[a,b]$(或(a,b)或$[a,b)$),$I\subsetneq\mathbf{R}$,对方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t)\tag{5-13}$$

函数 $f(t,x):I\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 连续,则对$(t,\varphi)\in I\times\mathbf{R}^n$,定义

$$D^+_{(5\text{-}13)}V(t,\varphi(0))=\overline{\lim_{h\to0_+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t,\varphi)(t+h))-V(t,\varphi(0))];$$

$$D^-_{(5\text{-}13)}V(t,\varphi(0))=\underline{\lim_{h\to0_+}}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t,\varphi)(t+h))-V(t,\varphi(0))].$$

当 $t\in I$ 时,记 $\alpha(t)=V(t,x(t)),\sigma-r\leqslant t<T$,且定义函数

$$\omega_1,-\omega_2:\mathbf{R}\times\mathbf{C}([-r,0],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}_+.$$

定理8　若存在连续函数 $V:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $\lim\limits_{|x|\to\infty}|V(t,x)|=\infty$,且满足

1° 对任意给定的连续函数$x:\mathbf{R}-\mathbf{R}^n,t\in R$,若当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时,$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$,则

$$D^+_{(5\text{-}13)}V(t,x(t))\geqslant\omega_1(t,\alpha_t);$$

2° 若当$t-r\leqslant s\leqslant t$ 时,$V(s,x(s))\geqslant V(t,x(t))$,则

$$D^-_{(5\text{-}13)}V(t,x(t))\geqslant\omega_2(t,\alpha_t),$$

记 $u,v:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 及 $\alpha_t=\alpha(t+\theta),u_t=u(t+\theta),v_t=v(t+\theta),\theta\in[-r,0]$ 当 $u_t\leqslant v_t,u(t)=v(t)$ 时

$$\omega_i(t,u_t)\leqslant\omega_i(t,v_t),i=1,2.$$

那么当 $\dot{r}(t)=\omega_i(t,r_t)$ 的解整体存在时$(i=1,2)$,方程(5-1)的解整体存在.

定理9　若存在连续函数 $V:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$,满足 $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(t,x)=+\infty$,使得对任意给定的连续函数 $x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 及 $t\in\mathbf{R}$,当 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时,$V(s,x(s))\leqslant V(t,x(t))$,则

$$D^+_{(5\text{-}13)}V(t,x(t))\leqslant\omega_1(t,\alpha_t),$$

其中 $\alpha(t),\omega_1$ 同定理8所设,则当方程 $\dot{r}(t)=\omega_1(t,r_t)$ 的解整体存在时,方程(5-1)的解整体存在.

定理10　若存在连续函数 $S:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}_+$,满足

1° $S(t,x)=0\Leftrightarrow x=0$;

2° $S(t,\lambda x)=\lambda S(t,x), S(t,x+y)\leqslant S(t,x)+S(t,y), \lambda\geqslant 0, x,y\in\mathbf{R}^n$;

3° 对任意的连续函数 $x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$, 若 $t-r\leqslant s\leqslant t$ 时 $S(s,x(s))\leqslant S(t,x(t))$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,\xi)\bigg|_{\xi=x(t)}+S(t,f(t,x_t))\leqslant\omega_1(t,a_t),$$

这里 $a(t)=S(t,x(t))$, ω_1 同定理8所设,

则当方程

$$\dot{r}(t)=\omega_1(t,r_t)$$

的解整体存在时,方程(5-1)的解整体存在.

5.2 有限时滞中立型泛函微分方程

5.2.1 算子型 NFDE

设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$ 为开集, $\mathrm{f}:\Omega\to\mathbf{R}^n$, $\mathrm{D}:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 都是给定的连续算子. D在 Ω 上, 于0处是原子的,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{D}(t,x_t)=\mathrm{f}(t,x_t) \tag{5-14}$$

叫做**算子型 NFDE**(或标准型 NFDE),为了强调方程由给定的算子 D 与 f,记之为 NFDE(D,f),D 称之为差分算子. 函数 $x(t)$ 叫做(5-14)式的一个解,若存在 $\sigma\in\mathbf{R}$, $A>0$,使得

$$x\in\mathbf{C}([\sigma-r,\sigma+A),\mathbf{R}^n), (t,x_t)\in\Omega, t\in[\sigma,\sigma+A)$$

时, $\mathrm{D}(t,x_t)$ 连续可微,且当 $t\in[\sigma,\sigma+A)$ 时满足(5-14)式.

对给定的 $\sigma\in\mathbf{R}$, $\varphi\in C$ 且 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, 函数 $x(\sigma,\varphi,\mathrm{D},\mathrm{f})$ 是(5-14)式过 (σ,φ) 的一个解,若存在 $A>0$ 使得 $x(\sigma,\varphi,\mathrm{D},\mathrm{f})$ 在 $[\sigma-r,\sigma+A)$ 上是(5-14)式的一个解,并且满足 $x_\sigma(\sigma,\varphi,\mathrm{D},\mathrm{f})=\varphi$.

若 $\mathrm{D}(t,\varphi)=\mathrm{D}_0(t,\varphi)-g(t)$, $\mathrm{f}(t,\varphi)=\mathrm{L}(t,\varphi)+h(t)$, 其中 $\mathrm{D}_0(t,\varphi)$ 与 $\mathrm{L}(t,\varphi)$ 关于 φ 是线性的,则称 NFDE(D,f)(5-14)式是线性的. 若 $g(t)$, $h(t)$ 恒等于0, 则方程称为线性齐次的,若 g, h 中至少有一个不等于0,除 $g=\mathrm{const}$, $n=0$ 以外,则方程是线性非齐次的.

与 RFDE(f) 类似,称(5-14)式为自治的,必须是 D,f 不显含 t 并且滞量 r 是常数.

5.2.2 存在唯一性

(5-14)式的初值问题写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{D}(t,x_t)=\mathrm{f}(t,x_t), \quad x_\sigma=\varphi. \tag{5-15}$$

(5-15)式的基本理论,诸如解的存在性、唯一性,解的正反向延拓、连续依赖性等的

结论,无论是结果的表述方式或证明过程都与 RFDE(f) 基本上一样,例如:

定理 11 (存在性)(5-15) 式中设 $D(t,\varphi)$ 有二阶连续的弗雷歇导数,对$(\sigma,\varphi)\in\Omega$ 存在过(σ,φ) 的解 $x(t,\sigma,\varphi)$.

定理 12 (唯一性)设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{C}$,$f:\Omega\to\mathbf{R}^n$,$D:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 满足定理 11 的条件,且 f 关于 φ 满足局部利普希茨条件,则(5-15) 式过(σ,φ) 的解存在且唯一.

5.3 无限时滞泛函微分方程

5.3.1 问题的提出

在 1.3.1 中提到的生态系统模型(1-26) 式为

$$\dot{N}(t)=N(t)\int_0^{\infty}f(N(t-u))p(u)\mathrm{d}u \tag{5-16}$$

或者设 $\sigma(t)\to\infty$ 当 $t\to\infty$ 时,方程

$$\dot{N}(t)=N(t)\int_0^{\sigma(t)}f(N(t-u))p(u)\mathrm{d}u \tag{5-17}$$

中的时滞不是有限的.它不满足 $0\leqslant\sigma(t)\leqslant r=\text{const}$.换言之,不存在 r 使(5-16) 式、(5-17) 式概括在(5-13) 式之中.从应用背景中提出的时滞系统,有三类属于这种情况.

1° 滞量 $\tau(t)$ 或 $\sigma(t)$ 是无界连续函数;

2° $\sigma(t)=\infty$;

3° $\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix(t-\tau_i),\tau_i\to\infty,i\to\infty$.

人们作如下的形式推广是很自然的,即方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t), \tag{5-18}$$

其中 $\dot{x}$ 表示右导数,$x_t=x(t+\theta),\theta\in\mathbf{R}_-=(-\infty,0]$,并把初值问题写成

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(t,x_t),\\&x_t=\varphi,\quad t\in\mathbf{R}_-,\end{aligned} \tag{5-19}$$

即初始数据空间取为 $\mathbf{C}=\mathbf{C}(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^n)$,那么表面上看来推广已经完毕,而事实不然,$\varphi\in\mathbf{C}(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^n)$ 的确可以包含 1°、2°、3° 三类方程,但 $\mathbf{C}(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^n)$ 不是一个巴拿赫空间,因而失去应有的分析基础.例如仍取 $\mathbf{C}$ 的范数为

$$|\varphi|=\sup_{s\in\mathbf{R}_-}|\varphi(t+s)|,\quad\varphi\in\mathbf{C}(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^n), \tag{5-20}$$

则根本无法讨论解的渐近稳定性.因为(5-19) 式的任何非 0 解关于这个范数必有

$$|x_t|=\sup_{s\in\mathbf{R}_-}|x(t+s)|>0,\text{当 } t\to\infty \text{ 时成立},$$

即 x 必不趋于 0.所以要用(5-19) 式来概括无限时滞泛函微分方程,并且推广有界时滞的全部结论,其首要问题是如何选择初始数据空间.事实上是在 $\mathbf{C}(\mathbf{R}_-,\mathbf{R})$ 上附加适当的公理限制问题.

注2　如果1°、2°、3°三类FDE不用(5-19)式来概括，照样可以用经典方法一一予以研究，并得出一系列需要的结果，特别是对具有无穷积分限或无界积分限的沃尔泰拉(Volterra)型积分微分型RFDE.

注3　注意一个极为重要的事实：在1.2.5中指出，初始集 $E_{t_0}=\{t-\tau(t):t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$ 必含在一个固定长度的区间 $[t_0-r,t_0]$ 之中，换句话说 r 不依赖于 t_0，所以只要补充定义后可设初始函数 φ 定义在 $[t_0-r,t_0]$ 上而不影响解及其存在唯一性. 进而，如果再补充定义

$$\varphi(t)=\varphi_0(t_0-r),\quad t\in(-\infty,t_0-r],$$

那么这个 φ 所确定的解与原先在 E_{t_0} 或 $[t_0-r,t_0]$ 上的 φ 所确定的解完全一样. 这样一来一切有界时滞问题都可归入无限时滞问题，从这个意义上说，无限时滞FDE的所有结果均应含有有界时滞FDE的相应结果，倘若有了完整满意的无限时滞FDE理论体系，于是上述的有界时滞情况的全部理论只是它的一种特例. 但事实并非如此，无限时滞FDE并没有得到所期望的系统而完整的结果，若用它来替代有界时滞FDE的现有理论势必大大复杂化，结果也粗糙得多，是完全不可取的. 而且从应用背景来看，有界滞量FDE理论仍是主体.

5.3.2　状态空间的确立

本节的目的在于由空间 $\hat{B}\xlongequal{\text{def}}C(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^n)$ 给出若干附加公理，以定出一个可以接受的状态空间 B. 记 $\hat{B}$ 中的元为 $\hat{\varphi},\hat{\psi},\cdots\hat{\varphi}=\hat{\psi}\Leftrightarrow\hat{\varphi}(t)=\hat{\psi}(t),t\in\mathbf{R}_-$ 且 $\hat{B}$ 是一个线性空间.

在 $\hat{B}$ 中定义拟范数(半模) $|\cdot|_{\hat{B}}$，记 $B=\hat{B}/|\cdot|_{\hat{B}}$，$B$ 的范数 $|\cdot|_B$ 由 $|\cdot|_{\hat{B}}$ 导出使 B 是一个巴拿赫空间. B 中元用 $\varphi,\psi\cdots$ 表示，它们对应于 $\hat{B}$ 中由 $|\cdot|_{\hat{B}}$ 确定的等价类. $\forall\varphi\in B$，与之对应的等价类中相应的元记为 $\hat{\varphi}$，并且在 B 中 $\varphi=\psi\Leftrightarrow|\hat{\varphi}-\hat{\psi}|_{\hat{B}}=0$ 对一切 $\hat{\varphi}\in\varphi,\hat{\psi}\in\psi$ 成立.

对 $\beta>0,\hat{\varphi}\in\hat{B}$. 记 $\hat{\varphi}^\beta$ 是 $\hat{\varphi}$ 在 $(-\infty,-\beta]$ 上的限制，在 B 中定义拟范数 $|\cdot|_\beta$ 为

$$|\varphi|_\beta=\inf_{\hat{\eta}\in\hat{B}}\{\inf_{\hat{\psi}\in\hat{B}}\{[|\hat{\psi}|_{\hat{B}}:\hat{\psi}^\beta=\hat{\eta}^\beta]:\eta=\varphi\}.\tag{5-21}$$

因此 $|\varphi|_\beta\leqslant|\varphi|_B$，且 $\{\varphi\in B:|\varphi|_\beta=0\}$ 是 B 的一个闭子空间，故

$$B^\beta=B/|\cdot|_\beta$$

是一个巴拿赫空间，它的范数仍由拟范数 $|\cdot|_\beta$ 导出. 为方便计仍记为 $|\cdot|_\beta$. 若

$$\{\varphi\}_\beta=\{\psi\in B:|\varphi-\psi|_\beta=0\}$$

是 B^β 的代表元，则当 $\hat{\psi}^\beta=\hat{\varphi}^\beta$ 时 $\psi\in\{\varphi\}_\beta$.

记 $(-\infty,a]=\mathbf{R}_-^a,[b,+\infty)=\mathbf{R}_+^b$，则对于定义在 $\mathbf{R}_-^a$ 上取值于 $\mathbf{R}^n$ 的函数 $\hat{x}$，

当 $t\in \mathbf{R}_-^a$ 时，$\widehat{x}_t$ 定义为

$$\widehat{x}_t = \widehat{x}_t(\theta) = \widehat{x}(t+\theta),\quad \theta\in \mathbf{R}_-;$$

给定一个 $A>0$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\in \widehat{B}$，设

$$F_A(\varphi) = \{\widehat{x}:\mathbf{R}_-^A\to \mathbf{R}^n,\widehat{x}_0=\varphi,\widehat{x}(t)\text{ 在}[0,A]\text{上连续}\}.$$

$$F_A = \bigcup\{F_A(\widehat{\varphi}):\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\in \widehat{B}\}$$

在这些记号之下，霍尔(J.K.Hale)与加藤(J.Kato)引进了一套公理——($\boldsymbol{\alpha}$)公理.

$(\alpha_1)\ \forall \widehat{x}\in F_A,\forall t\in[0,A]\Rightarrow \widehat{x}_t\in \widehat{B}$;

(α_2) 若 B 中两元相等：$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}$，则 $\forall\beta>0$ 有 $|\eta-\xi|_\beta=0$，其中 $\widehat{\boldsymbol{\eta}}\in\widehat{\tau}^\beta\boldsymbol{\varphi}$，$\widehat{\xi}\in\widehat{\tau}^\beta\widehat{\boldsymbol{\psi}}$;

$\widehat{\tau}^\beta$ 是把 $\widehat{B}$ 映入 $\widehat{B}^\beta=\{\{\widehat{\boldsymbol{\psi}}\in\widehat{B}:\widehat{\psi}^\beta=\widehat{\phi}^\beta\}:\widehat{\boldsymbol{\phi}}\in\widehat{B}\}$ 的线性算子，使当且仅当 $\widehat{\psi}(\theta)=\widehat{\phi}(\theta+\beta),\theta\in\mathbf{R}_-^{-\beta}$ 时 $\widehat{\psi}\in\widehat{\tau}^\beta\widehat{\phi}$;

$(\alpha_3)\ \forall\beta\geqslant 0,\ |\boldsymbol{\varphi}|_\beta\leqslant|\boldsymbol{\varphi}|_{(\beta)}+|\boldsymbol{\varphi}|_\beta$,

$$|\boldsymbol{\varphi}|_{(\beta)}=\inf_{\widehat{\boldsymbol{\eta}}\in\widehat{B}}\{\inf_{\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\in\widehat{B}}[|\widehat{\boldsymbol{\psi}}|_{\widehat{B}}:\widehat{\boldsymbol{\psi}}(\theta)\widehat{\boldsymbol{\eta}}(\theta),\theta\in[-\beta,0]]:\boldsymbol{\eta}:\boldsymbol{\varphi}\};$$

$(\alpha_4)\ \forall\boldsymbol{\varphi}\in B$ 及某个 k，$|\boldsymbol{\varphi}(0)|\leqslant k|\boldsymbol{\varphi}|_B$;

$(\alpha_4)'\ \forall\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\in\widehat{B}$ 及某一 k，$|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(0)|\leqslant k|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|_{\widehat{B}}$,
其中 k 为常数.以后恒设这套(α)公理成立.

5.3.3 存在唯一性

在有界时滞 RFDE(f) 定义在空间 $\mathbf{C}$ 中，现在改为定义在满足(α)公理的空间 B 中.设 $\mathbf{R}\times B$ 中的开集 Ω.$f:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是给定的连续算子，则(5-18)式叫 Ω 上的无限时滞泛函微分方程，也记为 RFDE(f) 或 RFDE(f,Ω).

定义 7 所谓无限时滞泛函微分方程 RFDE(f)(5-18)式在区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上的解，是指函数 $x:\bigcup\{\mathbf{R}_-^t:t\in I\}\to\mathbf{R}^n$，使得对于 $t\in I$，$(t,x_t)\in\Omega$，$x(t)$ 是连续可微的，且在 I 上满足(5-18)式.

定义 8 对给定的$(\sigma,\boldsymbol{\varphi})\in\Omega$，若存在一个 $A>0$，使得 $x(t,\sigma,\boldsymbol{\varphi})$ 在$[\sigma,A]$上是(5-18)式的一个解，且

$$x_\sigma(\sigma,\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{\varphi},$$

则说 $x(t,\sigma,\varphi)$ 是(5-18)式过(σ,φ)的一个解.或者说是初值问题(5-19)式的一个解.

为了建立无限时滞 RFDE 的基本理论，除(α)公理以外，还须要添加一套($\boldsymbol{\beta}$)公理.

(β_1) 对 $\beta\geqslant 0$ 存在连续函数 $k_1(\beta)$，使得

$$|\varphi|_{(\beta)} \leqslant k_1(\beta)|\varphi|_{[-\beta,0]},$$

其中 $|\varphi|_{[-\beta,0]}$ 有时记为 $|\varphi|^{[-\beta,0]}$,定义为

$$|\varphi|_{[-\beta,0]} = \inf_{\hat{\varphi}\in\hat{B}}\{\sup_{-\beta\leqslant\theta\leqslant 0}|\hat{\psi}(\theta)|:\psi = \varphi\};$$

(β_2) 对 $\beta \geqslant 0$, τ^β 是有界线性算子,其范数

$$M_1(\beta) = \sup_{|\varphi|_B=1}|\tau^\beta\varphi|_\beta$$

是局部有界的,即对任何 $\beta \geqslant 0$,存在 β 的一个邻域 U,使得

$$\sup_{t\in U\cap\mathbf{R}_+} M_1(t) < \infty;$$

(β_3) 若 $x \in F_A$, $A > 0$,则 x_t 关于 t 在 $[0,A]$ 上是连续的.

在证明解的存在性、唯一性、连续依赖性、可微性、延拓定理时分别需要(α)、(β)两套公理中的一部分,结论和有界时滞类似.例如

定理13　设(β_1)、(β_2)成立,则无限时滞RFDE(f,Ω)过(σ,φ) $\in \Omega$ 的解存在.

定理14　设(β_1)、(β_3)成立,f 是局部利普希茨型的,亦即存在常数 L 使得 $\forall(t,\varphi),(t,\psi)\in\Omega$ 时有

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant L|\varphi - \psi|_B,$$

则存在连续函数 $L(t)$,使得

$$|x_t(\sigma,\varphi) - x_t(\sigma,\psi)|_B \leqslant L(t-\sigma)|\varphi - \psi|_B;\quad t \geqslant \sigma. \tag{5-22}$$

由(5-22)式即推出解的唯一性.

参 考 文 献

1　郑祖庥.泛函微分方程理论.合肥:安徽教育出版社,1994.

2　秦元勋,刘永清,王联等.带有时滞的动力系统的稳定性.北京:科学出版社,1989.

3　李森林,温立志.泛函微分方程.长沙:湖南科技出版社,1987.

4　Hale J.Theory of functional diffiential equations.New York:Springer-Verlag.

第 13 篇

偏微分方程的近代理论

编　者　周　笠
审校者　陈庆益

目　录

引　言

偏微分方程及其应用是一个广阔的领域，本篇不可能对近代研究情况作全面的反映，只限于列述现代科技及有关的数值计算等所需的一些理论及方法，也包括个别值得注意的否定结果.

由于偏微分方程的近代理论及数值解法都用到多种函数空间，所以本篇以介绍函数空间开始，它们也与这套手册中的"泛函分析"与"广义函数"两部分相呼应，也为其他有关内容作准备.

关于偏微分方程的数值近似解和解析近似解，本手册中另有专门的论述，本篇拟不涉及这两方面内容.

再强调一次，如本篇篇名所示，在此只列举一部分近代理论成果，它们将具有理论指导价值；而不能涉足应用方面，因为那将是一个庞大的领域.

1　函数空间

1.1　强及弱导数

定义 1　对给定的函数 $u(x)\in L_p(\Omega)$，$p\geq 1$，Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界域(连通开集)，若存在函数列 $\{\varphi_j(x)\}$，$\varphi_j\in C^\infty(\Omega)$ 及函数 $v_\alpha\in L_p(\Omega)$，$0\leq|\alpha|\leq m$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，使

$$\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j-u\|_p=\lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega|\varphi_j-u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=0;$$

$$\lim_{j\to\infty}\|\partial^\alpha\varphi_j-v_\alpha\|_p=0,\quad \delta^\alpha=\frac{\delta^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\delta x_1^{\alpha_1}\cdots\delta x_n^{\alpha_n}},$$

则称 $v_\alpha(x)$为 u 的第 α 阶强导数.

定义 2　设 $u\in L(\Omega)$，若存在函数 $w_\alpha(x)\in L(\Omega)$，使

$$\int_\Omega w_\alpha\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi\mathrm{d}x,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 w_α 为 u 的第 α 阶弱导数.

定理 1　若函数 $u\in L_p(\Omega)$有 α 阶强 L_p 导数 $v_\alpha(x)$，$|\alpha|\leq m$，则 u 也有 α 阶弱导数 w_α，且 $w_\alpha=v_\alpha$.

为建立逆定理，引进均值函数概念.

定义 3　记 $B_\rho(a)=\{x:|x-a|\leq\rho\}$，取

$$\omega_\rho(x)\in C_0^\infty(B_\rho(0)),\quad \rho^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\omega_\rho(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{1-1}$$

例如

$$\omega_\rho(x)=\begin{cases}C\exp\dfrac{\rho^2}{|x|^2-\rho^2}, & |x|<\rho;\\ 0, & |x|\geqslant\rho,\end{cases}$$

并选 C 使(1-1)式成立,对任一个 $u\in L_p(\Omega)$,记

$$u_\rho(x)=J_\rho u(x)=\rho^{-n}\int_\Omega u(y)\omega_\rho(x-y)\mathrm{d}y, \tag{1-2}$$

称 u_ρ 为 u 的**均值函数**;J_ρ 为**抹光算子**(mollifier operator).

定理 2　设 $u_\rho\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,则有

$$\|u_\rho\|_p\leqslant\|u\|_p,\ \|J_\rho\|=\sup_{\|u\|_p=1}|J_\rho u|=1,\ \lim_{\rho\to0}\|u_\rho-u\|_p=0.$$

若 u 有弱导数$\partial^\alpha u\in L_p(\Omega)$, $|\alpha|\leqslant m$,则对距 Ω 的边界$\partial\Omega$ 大于ρ 的任一点 x: $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\rho$,有

$$\partial^\alpha J_\rho u(x)=J_\rho\partial^\alpha u(x),\ |\alpha|\leqslant m. \tag{1-3}$$

定义 4　若域 Ω 中存在一内点x_0,使由 x_0 引出的每条半直线仅交$\partial\Omega$ 于一点,即称 Ω 为**星形域**.

定理 3　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界星形域.若 u 及其 m 阶以下弱导数 $\partial^\alpha u(x)$都属于 $L_p(\Omega)$,则存在序列$\{u_j\}\subset C^m(\Omega)$,使

$$\lim_{j\to\infty}\|\partial^\alpha u_j-\partial^\alpha u\|_p=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant m,$$

即弱导数为强导数.

1.2　索伯列夫空间

定义 5　**索伯列夫(Sobolev)空间** $W_p^m(\Omega)$定义为

$$W_p^m(\Omega)=\{u:\text{所有弱导数}\partial^\alpha u\in L_p(\Omega),0\leqslant|\alpha|\leqslant m\}.$$

这里 m 是非负整数:$m\in\mathbf{N}$;$p\geqslant1$.这个空间的范数为

$$\|u\|_{m,p}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{1-4}$$

定理 4　1° $W_p^m(\Omega)$关于范数(1-4)为完备空间;

2° $W_k^r(\Omega)\subset W_p^m(\Omega)$, $r\geqslant m$, $k\geqslant p$;

3° 若 $\Omega=\bigcup_j\Omega_j$, Ω_j 都是开集且 $\overline{\Omega}_j\subset\Omega_{j+1}$, $j=1,2,\cdots$,则空间 $W_p^m(\Omega)$是 $C^\infty(\Omega)$在范数(1-4)下的完备化.

定义 6　记空间 $C_0^\infty(\Omega)$在范数(1-4)下的完备化为 $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

定理 5　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界域,其边界$\partial\Omega$ 充分光滑,则有

当且仅当

$$\partial^{\alpha}u(x)|_{\partial\Omega}=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1\text{ 时}.$$

1° $\mathring{W}_p^m(\Omega)\subset W_p^m(\Omega)$，

函数 $u\in\mathring{W}_p^m(\Omega)$也在 $\mathring{W}_p^m$ 中.

2° $\forall u(x)\in\mathring{W}_p^m(\Omega),\exists v(x)\in W_q^m(\Omega),\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，使

$$\int_{\Omega}(\partial^{\alpha}u)v\mathrm{d}x=\int_{\Omega}(-1)^{|\alpha|}(\partial^{\alpha}v)u\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant m.$$

例 1　$W_p^0(\Omega)=L_p(\Omega)$.

1.3 嵌入定理

可期望，当 u 有充分高阶的弱导数时，u 本身连续. 这一点为嵌入定理所肯定.

定义 7　对 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域Ω，若存在 $\rho>0,\gamma>0$，使任一点 $x\in\overline{\Omega}$ 为具半径ρ、体积 $\gamma\rho^n$ 的锥 $K(x)$的顶点，且 $K(x)\subset\overline{\Omega}$，则称 Ω 满足锥条件或锥性质.

定理 6　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中具锥性质的域，$u\in W_p^m(\Omega)$，$mp>n$，则存在常数 $C>0$，使

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\leqslant C\|u\|_{m,p},\tag{1-5}$$

且嵌入映射 $E:W_p^m(\Omega)\subset C(\Omega)$为紧映射(映有界集为相对紧集的映射). 若$(m-k)p>n$，则有

$$\|u\|_{C^k_{(\Omega)}}\leqslant C\|u\|_{m,p},\tag{1-6}$$

且嵌入映射 $E:W_p^m(\Omega)\subset C_k(\Omega)$为紧映射.

定理 7　设 $u\in W_p^m(\Omega)$，Ω 具锥性质，$p>1$，$mp\leqslant n$，设 Γ_s 为 s 维光滑子流形(见Ⅱ卷第 3 篇)，且 $n-mp<s\leqslant n$，则有

1° $u(x)\in L_l(\Gamma_s),\forall l<ps/n-mp$;　(1-7)

2° 缩射 $R:W_p^m(\Omega)\to L_l(\Gamma_s)$为紧映射.

定理 8　设 Ω 如前，$|\beta|\geqslant m-\dfrac{n}{p}$，有

$$W_p^m(\Omega)\subset W^{|\beta|}_{\frac{np}{n-p(m-|\beta|)}}(\Omega).\tag{1-8}$$

例 2　**庞加莱(Poincare)不等式：**

$$\int_{\Omega}|u^2|\mathrm{d}x\leqslant c\int_{\Omega}|\operatorname{grad}u|^2\mathrm{d}x+c\left|\int_{\Omega}u\mathrm{d}x\right|^2,\forall u\in W_2^1(\Omega).\tag{1-9}$$

例 3　弗里德利克斯(Friedrichs)不等式：

$$\int_{\Omega}|u|^2\mathrm{d}x\leqslant c\int_{\Omega}|\operatorname{grad}u|^2\mathrm{d}x,\forall u\in\mathring{W}_2^1(\Omega).\tag{1-10}$$

1.4　希尔伯特空间

定义 8　$W_p^m(\Omega)$中当 $p=2$ 时，记作

$$H^m(\Omega)=W_2^m(\Omega), \tag{1-11}$$

并附以内积

$$(u,v)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(\partial^\alpha u,\partial^\alpha v)_{L_2}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega \partial^\alpha u\partial^\alpha v\mathrm{d}x, \tag{1-12}$$

于是 $H^m(\Omega)$成为内积空间，其中范数为

$$\|u\|_m=\sqrt{(u,u)_m}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|\partial^\alpha u|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1-13}$$

定义 9　记

$$\mathring{H}^m(\Omega)=\mathring{W}_2^m(\Omega), \tag{1-14}$$

它也附以内积(1-12)及范数(1-13).

定理 9　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，则

1° $H^m(\Omega)$关于范数(1-13)为完备空间，它是希尔伯特空间；

2° 若 $m_1\geqslant m_2>0$，则有

$$H^{m_1}(\Omega)\subseteq H^{m_2}(\Omega)\subset H^0(\Omega)=L_2(\Omega); \tag{1-15}$$

3° $H^m(\Omega)$是 $C^\infty(\Omega)$关于范数(1-13)的完备化.

定理 10　1° $\mathring{H}^m(\Omega)\subset H^m(\Omega)$；$\mathring{H}^m(\mathbf{R}^n)=H^m(\mathbf{R}^n)$；

2° $\mathring{H}^m(\Omega)$是 $C_0^\infty(\Omega)$关于范数(1-13)的完备化；

3° 函数 $u(x)\in H^m(\Omega)$也在 $\mathring{H}^m(\Omega)$中的充要条件是

$$\partial^\alpha u(x)|_{\partial\Omega}=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1.$$

1.5　对偶空间

为了讨论 $\mathring{H}^m(\Omega)$的对偶空间，须对任何实数 s 引进希尔伯特空间 H^s.

定义 10　对任何实数 s，记

$$H^s(\mathbf{R}^n)=\{u:u\in\varphi'(\mathbf{R}^n),(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\}, \tag{1-16}$$

其中 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$为缓增分布空间.

$$\hat{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x,\langle\hat{u},\hat{\varphi}\rangle=(2\pi)^n\langle u,\varphi\rangle,\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

空间(1-16)中的范数是

$$\|u\|_s=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)},|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2. \tag{1-17}$$

定理 11 范数(1-17)等价于范数(1-13)；故当 s 为非负整数时，空间(1-16)与空间(1-11)重合一致．空间(1-16)中的内积可取为

$$(u,v)_s = \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi),(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{v}(\xi)\right)_{L_2(\mathbf{R}^n)}. \tag{1-18}$$

定理 12 当 $s>r$ 时，$H^s(\mathbf{R}^n)$ 在 $H^r(\mathbf{R}^n)$ 中稠，即 H^r 中任一元可用 H^s 中序列按 H^r 中范数逼近．

定理 13 $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$ 是 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 的对偶空间，即 H^s 上连续线性泛函组成的空间，记作

$$H^{-s}(\mathbf{R}^n) = (H^s(\mathbf{R}^n))'. \tag{1-19}$$

$H^{-m}(\Omega)$ 是 $\mathring{H}^m(\Omega)$ 的对偶空间：

$$H^{-m}(\Omega) = (\mathring{H}^m(\Omega))'. \tag{1-20}$$

例 4 $\delta(x)\in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(-1,1),\varepsilon>0$.

事实上，$\langle\boldsymbol{\delta},v\rangle = v(0),\ \forall v\in\mathring{H}^\mu(-1,1)$，$\mu$ 待定．为使 $v(0)$ 确定，要求 $v(x)$ 连续．据嵌入定理，须有 $\mu>\dfrac{n}{p}=\dfrac{1}{2}$，故 $\mu=\dfrac{1}{2}+\varepsilon,\varepsilon>0$．随之

$$\delta\in H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(-1,1).$$

1.6 迹 定 理

对 $H^m(\Omega)$ 中函数是否可连续取到边界值的问题，迹定理给出回答．考虑半空间情形，记

$$\mathbf{R}^n_+ = \{x=(x',x_n): x'\in\mathbf{R}^{n-1}, x_n>0\};$$
$$\partial\mathbf{R}^n_+ = \{(x',x_n)=x: x_n=0\}.$$

定义 11 设 V、W 为二函数空间，用 $\mathscr{L}(V,W)$ 记由 V 到 W 中的连续线性映射所组成的向量空间．

定理 14 由下式

$$\gamma_0(\varphi)(x') = \varphi(x',0),\ \varphi\in C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+}),\ (x',0)\in\partial\mathbf{R}^n_+ \tag{1-21}$$

定义的迹算子 $\gamma_0: C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})\to C^0(\partial\mathbf{R}^n_+)$，可唯一地延拓为连续线性映射 $\gamma_0\in\mathscr{L}(H^1(\mathbf{R}^n_+),H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbf{R}^n_+))$，其值域在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathbf{R}^n_+)$ 中稠，且对任一 $\beta(x)\in C^1(\overline{\mathbf{R}^n_+})$，有

$$\gamma_0(\beta u) = \gamma_0(\beta)\gamma_0(u),\ \forall u\in H^1(\mathbf{R}^n_+). \tag{1-22}$$

定理 15 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，位于其边界的一侧，假定 $\partial\Omega$ 为 C^m 流形(见本卷第 5 篇)，γ 为其外法线方向，记 $\gamma(u)=(\gamma_0(u),\gamma_1(u),\cdots,\gamma_{m-1}(u))$，其中

$$\gamma_j(u) = \left.\frac{\partial^j u}{\partial\gamma^j}\right|_{\partial\Omega},\ 0\leqslant j\leqslant m-1,\ u\in C^m(\overline{\Omega}),$$

则迹算子 $\gamma: C^m(\overline{\Omega})\to\prod\limits_{j=0}^{m-1}C^{m-\frac{1}{2}-j}(\partial\Omega)$ 可唯一地延拓为

$$\gamma \in \mathscr{L}(H^m(\Omega),\quad \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-\frac{1}{2}-j}(\partial\Omega)),$$

且 γ 的核为 $\mathring{H}^m(\Omega)$，γ 的值域在 $\pi H_0^{m-\frac{1}{2}-j}\partial(\Omega)$ 中稠.

1.7 插补空间

在应用中出现的常常不是个别的函数空间，而是一簇函数空间，因此须引进一些概念.

定义 12 设 E 和 F 为两个巴拿赫(Banach)空间，其交 $E\cap F$ 在 E 及 F 中都稠. 记

$$E+F=\{w: w=u+v, \forall u\in E, \forall v\in F\}.$$

在 $E\cap F$ 及 $E+F$ 中可引进范数

$$\| u \|_{E\cap F}=\max(\| u\|_E, \| v\|_F);\ \| w\|_{E+F}=\inf_{u+v=w}(\| u\|_E+\| v\|_F).$$

它们也成为巴拿赫空间 E 及 F 的一个居间空间，记作 $[E,F]$. 它是具有性质

$$E\cap F\subset[E,F]\subset E+F \tag{1-23}$$

的任一巴拿赫空间.

定义 13 给定巴拿赫空间 E 及 F，若巴拿赫空间 G 对每个 $A\in\mathscr{L}(E,F)$ 使 $AG\subset G$，即称 G 为 E 及 F 间的一个插补空间.

定义 14 巴拿赫空间统是一簇巴拿赫空间 B_θ，θ 为实参数，$\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1$，而且具有下列性质：

1° 当 $\alpha>\theta$ 时，B_α 在 B_θ 中稠，且

$$\| u\|_\theta\leqslant C(\theta,\alpha)\| u\|_\alpha,\quad \forall u\in B_\alpha; \tag{1-24}$$

2° 当 $\theta_0\leqslant\theta<\alpha<\beta\leqslant\theta_1$ 时，有

$$\| u\|_\alpha\leqslant C(\theta,\alpha,\beta)\| u\|_\theta^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\theta}}\cdot\| u\|_\beta^{\frac{\alpha-\theta}{\beta-\theta}},\quad \forall u\in B_\beta. \tag{1-25}$$

(1-24)式和(1-25)式中的 C 都与 u 无关.

例 5 给定希尔伯特空间 E 及 F，且嵌入 $E\subset F$ 为稠及连续的，这时存在映射 $A: F\to E$，使

$$(u,Av)_E=(u,v)_F, \forall u\in E.$$

显然，A 为线性、有界、正定及自伴的：

$$(u,Au)_E=(u,u)_F>0, (u,v)_F=(v,Au)_E=(u,Av)_E, \forall u\in E,$$

故可利用谱表示定义，$T^\theta=(A^{-\frac{1}{2}})^\theta$，记

$$H_\theta=\{u: u\in D(T^\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant1\}, \tag{1-26}$$

其中 $D(T^\theta)$ 记算子 T^θ 的定义域，则 H_θ 为 E 及 F 的居间空间 $[E,F]_{1-\theta}$；H_θ 也是 E 及 F 间的插补空间 $E^\theta F^{1-\theta}$；$H_\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$ 还作为希尔伯特空间统.

定理 16 设 $H_\alpha(-\infty<\alpha<+\infty)$ 为希尔伯特空间统，则

1° 若 $\alpha<\beta$，有 $H_\beta\subset H_\alpha$，H_β 在 H_α 中稠，且

$$\|u\|_\alpha \leqslant \|u\|_\beta;$$

2° 若 $\alpha<\beta<\gamma$，则有

$$\|u\|_\beta \leqslant \|u\|_\alpha^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)} \|u\|_\gamma^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}, \quad \forall u \in H_\gamma;$$

3° H_α 和 $H_{-\alpha}$ 是相互对偶的(关于 H_0 中内积)：

$$|(u,v)_0| \leqslant \|u\|_\alpha \|v\|_{-\alpha}, u \in H_\alpha, \|v\|_{H_{-\alpha}}; \tag{1-27}$$

4° 具重迭代性质：

$$[[H_1,H_0]_{\theta_0},[H_1,H_0]_{\theta_1}]_\theta = [H_1,H_0]_{\theta\theta_1+(1-\theta)\theta_0}, \tag{1-28}$$

其中 $[H_1,H_0]_{1-\theta}=H_\theta,\theta\in[0,1]$.

注 1 H^α 为具 L_2 可积 α 阶广义导数的函数空间；H_α 则为具任意下标 α 的希尔伯特空间族；含义不同.

2 广 义 解

2.1 广义解的必要性

偏微分方程定解问题的古典解，要求方程中出现的导数在定义域内连续，而对于在定解条件中出现的导数，更要求它们在区域边界上也连续. 另一方面，在定解问题适定性讨论中，有时要求初值函数与边值函数以及其他给定的函数有相当高的光滑性. 这两方面的要求在实际应用时是过于苛刻的和不自然的. 事实上，定解问题通常由积分关系式表述，对光滑性的要求较低. 只是在较高光滑性的假定下，才引出偏微分方程光滑解问题. 此外，实际问题有时不存在这种光滑解，而只有适合某种积分守恒关系的广义解. 例如冲击波等间断现象，就只能在广义解的范畴下加以理解. 因此，降低光滑性的要求，扩大解的范围，引进广义解概念是十分必要的.

一般地讲，定解问题广义解的存在性是比较容易建立的；而许多定解问题的广义解必然是光滑的古典解，例如椭圆型方程及狭义抛物型方程的**光滑定解问题**(指所有给定函数及边界都充分光滑)就具有这种特性. 而激波等现象只能在广义解的范畴中存在，所以，广义解概念的引进具有十分重要的意义.

广义解有多种定义方式，主要地分为强解和弱解两类. 以波动方程定解问题为例引进强广义解概念.

2.2 强 解

定义 1 波动方程混合问题

$$\begin{cases}\Box u = u_{tt} - \Delta u = f(t,x,y,z), & t>0,(x,y,z)\in\Omega;\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), & u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z);\\ u|_{(\partial\Omega,t)}=g(p,t), & p\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2-1}$$

当 f,φ,ψ 和 g 仅为连续函数时，在 $C((0,\tau)\times\Omega)$ 中的强解 u，是下列问题

$$\begin{cases}\Box u_n = f_n(t,x,y,z);\\ u_n|_{t=0}=\varphi_n(x,y,z); \quad \left.\dfrac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_n(x,y,z), P\in\partial\Omega\\ u_n|_{(\partial\Omega,t)}=g_n(p,t),\end{cases}\tag{2-2}$$

的解序列 $\{u_n(t,x,y,z)\}$ 在 $[0,T]\times\Omega$ 上的一致极限(若它存在)，这里 T 是任一固定正数，f_n,φ_n,ψ_n,g_n 为充分光滑的函数列，分别一致收敛于 f,φ,ψ 和 g.

由数学物理方程的古典理论知：问题(2-2)对每个 n 有唯一的古典解 u_n 存在，且必然一致收敛于唯一的极限函数. 故这个定义有意义.

定义 2　问题(2-1)在 $L_2([0,T]\times\Omega)$ 中的强解，是问题(2-2)的古典解 u_n 在 L_2 中的极限(若它存在). 这里要求 f_n,φ_n,ψ_n 和 g_n 分别在 L_2 中收敛于 f,φ,ψ 和 g.

同样，在数学物理方程中关于波动方程混合问题的能量积分方法及解的适定性讨论，知序列 $\{u_n\}$ 在 L_2 中确有唯一的极限.

注 1　问题(2-1)在 $C([0,T]\times\Omega)$ 中的强解不一定二次连续可微，故不一定是古典解；而在 L_2 中的强解甚至不一定是连续函数，故强解类确实扩大了古典解的范围.

注 2　强解的定义也可用于其他方程的定解问题及其他的函数空间. 只要相应问题在所论空间的适定性得到解决，相应强解就存在. 由于强解定义中要求古典解序列的存在，就在一定程度上限制了强解概念的适用范围，故有必要引进弱解的概念.

2.3　弱　　解

定义 3　问题(2-1)在 $L_2([0,T]\times\Omega)$ 中的弱解 u，是对所有 $v\in V$,

$V=\{v: v\in W_2^2([0,T]\times\Omega), v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0, v|_{t=T}=v_t|_{t=T}=0\}$,

满足下列积分恒等式

$$\int_0^T\int_\Omega u\Box v\mathrm{d}V\mathrm{d}t-\int_\Omega\psi v(x,y,z,0)\mathrm{d}v-\int_\Omega\varphi v_t(x,y,z,0)\mathrm{d}v-\int_0^T\int_\Omega g\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega fv\mathrm{d}v\mathrm{d}t\tag{2-3}$$

的函数 $u\in L_2$(若这种 u 存在). 这里要求 f,φ,ψ 和 g 分别属于相应的 L_2 空间.

注 3　(2-3)式中的积分恒等式是由

$$\int_0^T\int_\Omega v\Box u\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega fv\mathrm{d}v\mathrm{d}t,$$

将其左边作两次分部积分得来的.

弱解定义适用于多种情况.

定义 4　半线性方程边值问题

$$\begin{cases} Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{\alpha} \partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}\partial^{\beta}u) = f(x,u); \\ \partial^{\alpha}u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m-1 \end{cases} \tag{2-4}$$

在 $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ 中的弱解 u,是对所有 $\varphi \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$ 使

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}\partial^{\beta}u\partial^{\alpha}\varphi \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x,u)\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2-5}$$

成为恒等式的函数 $u \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$(若这种 u 存在).

注 4 若问题(2-4)有古典解,$u \in C^{2m}(\Omega)$,则以 $\varphi \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$乘(2-4)中方程的两边,然后在 Ω 上积分,再把左边作分部积分.注意因 $\varphi, u \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$,分部积分中出现的边界$\partial\Omega$ 上积分为 0,即得(2-5)式.故古典解必为弱解.反之,弱解不一定充分光滑,故一般不是古典解,甚至不是强解,即 u 不一定属于 $W_2^m(\Omega)$.上述讨论对定义(2-3)也成立,它具有一般意义.

定义 5 方程

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x)\partial^{\alpha}u = f(x), x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, f \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

的弱解(分布解或广义函数解),是使下式

$$\langle u, L^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}(a_{\alpha}(x)\varphi) \tag{2-6}$$

成为恒等式的广义函数 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$(若这种 u 存在).

注 5 (2-6)式中的 L^* 是 L 的伴算子;$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示 $C_0^{\infty}(\Omega)$上的一个连续线性泛函关系,特别地,当 u 和f 取实值且都属于$L_2(\Omega)$时,$\langle \cdot, \cdot \rangle$取形如

$$\langle u, L^*\varphi \rangle = \int_{\Omega} uL^*\varphi \mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f\varphi \mathrm{d}x.$$

例 1 拟线性双曲方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = g(x) \tag{2-7}$$

的全局弱解 u 定义为使下式

$$\int_a^b [u(x,t) - g(x)]\mathrm{d}x + \int_0^t [f(u(b,t)) - f(u(a,t))]\mathrm{d}t = 0 \tag{2-8}$$

对任何 $t > 0$ 及任何实数 $a, b(a < b)$恒成立的如下函数 u:u 有有限条间断线及有限间断量.由这个定义可引出间断条件

$$f(u^-) - f(u^+) = S'(t)(u^- - u^+), \tag{2-9}$$

这里 $S = s(t)$为解 u 的某条孤立的间断线,$S' = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$;$u^- = u(S^-, t)$,$u^+ = u(S^+, t)$分别是 $u(x,t)$当 x 由 $S = s(t)$左侧或右侧趋向间断线上一点 $S(t)$时的极限值.为引出(2-9)式,可认为 u 及f 在 $S = s(t)$两侧近旁有连续导数,关于 t 微分弱解定义式(2-8)得

$$f(u(b,t))-f(u(a,t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{s(t)}u(x,t)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{s(t)}^b u(x,t)\mathrm{d}x$$
$$=u^-s'-u^+s'+\int_a^{s(t)}u_t(x,t)\mathrm{d}x+\int_{s(t)}^b u_t(x,t)\mathrm{d}x,$$

后二积分中的 u_t 是连续的，故当 $a\to s^-$，$b\to s^+$ 时，这两个积分都趋于零. 于是上式给出(2-9)式.

注 6 由(2-8)式定义的弱解不是唯一的. 例如，间断初值问题

$$u_t+uu_x=0,\ u(x,0)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0;\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

对任意的 $a\geqslant 1$，以间断函数

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & x\leqslant(1-a)t/2;\\ -a, & \dfrac{(1-a)t}{2}<x\leqslant 0;\\ a, & 0<x\leqslant\dfrac{(a-1)t}{2};\\ -1, & x>\dfrac{(a-1)t}{2}\end{cases}$$

为其弱解，并满足间断条件(2-9). 所以，为了保证初值问题(2-7)弱解的唯一性，还须附加条件. 在气体动力学中附加所谓的熵条件

$$\begin{cases}当 f''(u)>0 时, & u^->u^+;\\ 当 f''(u)<0 时, & u^-<u^+.\end{cases}\tag{2-10}$$

可核验，在解簇 $u_a(x,t)$ 中，仅 $u_1(x,t)$ 满足(2-10)式. 故例(2-7)所述间断初值问题(这里 $f(u)=\frac{1}{2}u^2$)只有唯一的弱解 $u_1(x,t)$.

3 线 性 方 程

3.1 椭圆型方程

3.1.1 正规椭圆边值问题

定义 1 给定线性偏微分算子

$$P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)\partial^\alpha,\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n,\ a_\alpha\in C^\infty(\Omega),$$

记相应于其主部(最高阶齐次部分)的多项式为

$$P_K(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha(x)\xi^\alpha,\quad \xi\in\mathbf{R}^n.\tag{3-1}$$

1° 若在点 $x_0\in\Omega$ 有

$$P_K(x_0,\xi)\neq 0,\quad 0\neq\xi\in\mathbf{R}^n,\tag{3-2}$$

则称 $P(x,\partial)$在点 x_0 为**椭圆型算子**,或简称为**椭圆算子**;

2° 若P在点x_0为椭圆算子,$k=2m$,即P为偶数阶的,且对任何两个线性无关的实向量ξ及η,关于λ的$2m$次代数方程

$$P_{2m}(x,\lambda\xi+\eta)=0\tag{3-3}$$

恰有$m=\frac{k}{2}$个根$\lambda_1^+,\lambda_2^+,\cdots,\lambda_m^+$具正的虚部,$m$个根$\lambda_1^-,\lambda_2^-,\cdots,\lambda_m^-$具负的虚部,则称$P$在点$x_0$为**适椭圆算子**;

3° 若P在点x_0为适椭圆算子,且存在与ξ无关的常数$\mu_0>0$,使对任何的$\xi\in\mathbf{R}^n$有

$$|R_eP_{2m}|(x_0,\xi)|\geqslant\mu_0|\xi|^{2m},\quad |\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2,\tag{3-4}$$

则称P在点x_0为**强椭圆算子**.

若上述定义时每一点$x\in\Omega$成立,则称P在Ω中为相应的椭圆算子.当(3-4)式中的μ_0不依赖于x_0时,则称P为Ω中的一致强椭圆算子.

例 1 $P=\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}$在$\mathbf{R}^2$中为椭圆算子,但非适椭圆算子.

例 2 $P=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}-\frac{\partial^4}{\partial z^4}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\right)$

为$\mathbf{R}^3$中适椭圆算子,但非强椭圆算子.

定义 2 设Ω为$\mathbf{R}^n$中有界域,边界$\partial\Omega$无限光滑,若边界算子组

$$B_j(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}b_{j\alpha}\partial^\alpha,\ b_{j\alpha}(x)\in C^\infty(\partial\Omega),\quad j=1,2,\cdots,r\tag{3-5}$$

具有下述性质:

$$0\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_r,$$

且对$\partial\Omega$上任一点x处的法向量γ_x,使

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}b_{j\alpha}(x)\gamma_x^\alpha\neq 0,\quad j=1,2,\cdots,r,\tag{3-6}$$

则称边界算子组(3-5)为**规范组**.

例 3 狄利克雷(Dirichlet)边界算子组

$$\{B_j\}=\left\{u,\frac{\partial u}{\partial\gamma},\cdots,\frac{\partial u}{\partial\gamma^r}\right\}$$

为规范组.

定义 3 设Ω如上,$P(x,\partial)$为Ω中$2m$阶适椭圆算子.记

$$a^+(x,\xi,\eta,\lambda)=\prod_{j=1}^m(\lambda-\lambda_j^+),$$

$$a^-(x,\xi,\eta,\lambda)=\prod_{j=1}^m(\lambda-\lambda_j^-).$$

若对每一点$x\in\partial\Omega$,相应法向量$v_x\neq 0$,切向量$\xi_x\neq 0$,即二向量是非零向量,且由下式确定的λ的多项式

$$b_j(x,\xi_x+\lambda\gamma_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j} b_{j\alpha}(\xi_x+\lambda\gamma_x)^\alpha,\quad j=1,2,\cdots,r,\tag{3-7}$$

关于模 $a^+(x,\xi_x,\upsilon_x,\lambda)(\bmod a^+)$为线性无关的，则称边界算子组(3-5)为相应于 P 的补足组.

例4 设 P 及 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 如上，μ_x 在 $x\in\Omega$ 不为切向量，r 为固定的非负整数，$0\leqslant r\leqslant m$，则

$$B_ju=\frac{\partial^{r+j-1}u}{\partial_{\mu_x}^{r+j-1}}+\sum_{|\alpha|<r+j-1} b_{j\alpha}(x)\partial^\alpha u,$$

$$b_{j\alpha}(x)\in C^\infty(\partial\Omega),\quad j=1,2,\cdots,m$$

为补足边界算子组.

定义4 设 $\Omega\subset\mathbf{R}$ 如上.若

1° $P(x,\partial)$为 Ω 中适椭圆算子；

2° 边界算子组(3-5)为规范组，且

$$r=m_j\quad m_j\leqslant 2m-1,\quad j=1,2,\cdots,m;$$

3° 定义3中的补足条件(也称罗帕挺斯基(Lopatinski)条件)得到满足，

则称算子 P 及边界算子组$\{B_j\}$为**正规椭圆组**，记作 $\mathscr{P}=(P;B_1,B_2,\cdots,B_m)$；相应的边值问题 $\mathscr{P}u=F$.方程

$$\begin{cases}Pu=f,x\in\Omega;\\F=(f;g_1,\cdots,g_m),\\B_ju=g_j,j=1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{3-8}$$

称为**正规椭圆边值问题**.

3.1.2 存在及正则性定理

为叙述正规椭圆边值问题解的存在性及正则性结果，引进伴边值问题.

定义5 给定正规椭圆组 $\mathscr{P}=(P;B_1,B_2,\cdots,B_m)$，取边界算子组$\{s_1,\cdots,s_m\}$，$s_k$ 的阶 $p_k\leqslant 2m-1$，使$\{B_1,B_2,\cdots,B_m;s_1,s_2,\cdots,s_m\}$作为 $2m-1$ 阶的狄利克雷组(例3).由分部积分有

$$\int_\Omega \bar{v}Pu\,\mathrm{d}x=\int_\Omega u\,\overline{P^*v}\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^m\int_{\partial\Omega}s_ju\,\overline{c_jv}\,\mathrm{d}A-\sum_{j=1}^m\int_{\partial\Omega}B_ju\,\overline{T_jv}\,\mathrm{d}A,\tag{3-9}$$

上式称为格林公式，其中

$$P^*v=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha(x)v)$$

为 $P=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ 的**伴算子**.由(3-9)式唯一确定规范边界算子组$\{c_j\}$及$\{T_j\}$，它们也作成狄里克雷组$\{c_j;T_j\}$.$\mathscr{P}^*=(P^*;c_1,c_2,\cdots,c_m)$称为 $\mathscr{P}$ 的**伴算子组**；相应的边值问题 $\mathscr{P}\bar{v}=F^*$ 称为(3-8)式的**伴边值问题**.$F^*=(f^*;g_1^*,g_2^*,\cdots,g_m^*)$为任意的光滑向量函数，不必与 F 有关.

定义6 给定正规椭圆组 $\mathscr{P}=(P;B_j)$，记

$$N=\{u: Pu=0, x\in\Omega; B_ju|_{\partial\Omega}=0, j=1,2,\cdots,m\};$$
$$N^*=\{v: P^*v=0, x\in\Omega; c_jv|_{\partial\Omega}=0, j=1,2,\cdots,m\};$$
$$\varkappa=\dim N-\dim N^*.$$

$\varkappa$ 称为 $\mathscr{P}$ 的指标，而且要求维数之一($\dim N$ 或 $\dim N^*$)为有限数.

1. 存在及唯一性定理

定理 1 正规椭圆边值问题 $\mathscr{P}u=F$,

$$Pu=f,\quad x\in\Omega;\quad B_ju|_{\partial\Omega}=g_j,\quad j=1,2,\cdots,m$$

有解 $u\in H^s(\Omega)(s\geqslant 2m)$ 的充要条件是

$$(f,v)_{H^0(\Omega)}+\sum_{j=1}^{m}(g_j,T_jv)_{L_2(\partial\Omega)}=0,\quad\forall v\in N^*,\tag{3-10}$$

这里 $H^0(\Omega)=L_2(\Omega)$，而

$$(f,v)_{H^0(\Omega)}=\int_\Omega f\bar{v}\mathrm{d}x;$$

$$(g_j,T_jv)_{L_2(\partial\Omega)}=\int_{\partial\Omega}g_jT_jv\mathrm{d}A,$$

其中 $\{T_j\}$ 为由(3-9)式所确定的边界算子组. 当(3-10)式成立时，存在唯一的解 $u\in H^s(\Omega)$，使 $\mathscr{P}u=F$，且

$$(u,v)_{L_2(\Omega)}=0,\quad\forall v\in N.\tag{3-11}$$

例 5 边值问题

$$-\Delta u=f, x\in\Omega; \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{\partial\Omega}=g,$$

γ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向，零值空间 N 及 N^* 都只含有常数元. 故这个问题对任何 $f\in H^{s-2}(\Omega)(s\geqslant 2)$ 有解 $u\in H^s(\Omega)$ 的充要条件是

$$\int_\Omega f\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}g\mathrm{d}A=0;$$

若要求 u 满足条件(3-11)：$\int_\Omega u\mathrm{d}x=0$，则解 u 为唯一的.

2. 正则性定理

定理 2 给定 $\mathscr{P}u=F$ 如上. 设 $f\in H^{s-2m}(\Omega)$，$g_j\in H^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，$s\geqslant 2m$，$m_j$ 为 B_j 的阶数，则有

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant c\left(\|f\|_{H^{s-2m}(\Omega)}+\sum_{j=1}^{m}\|g_j\|_{H^{s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\|u\|_{H^0(\Omega)}\right).\tag{3-12}$$

定理 3 设 Ω 如上，$P=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha\partial^\alpha$，$a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$，且取实值；$P$ 为 Ω 中适椭圆算子. 若 $u\in L_p(\Omega)$ 为狄里克雷问题(记 $\partial\Omega$ 的法线方向为 γ)

$$Pu=f,\quad f\in c^\infty(\Omega);\quad \partial_\gamma^\alpha u|_{\partial\Omega}=0,\quad \alpha=0,1,2,\cdots,m-1\tag{3-13}$$

的弱解，则实际有 $u\in W_p^{2m}(\Omega)$，且

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant c_1\|f\|_p+c_2\|u\|_p,\ c_1c_2>0, \tag{3-14}$$

c_1,c_2 与 u 无关. 若齐次问题

$$Pu=0,\ x\in\Omega;\ \partial_\nu^j u|_{\partial\Omega}=0,\quad j=0,1,\cdots,m-1$$

只有零解 $u\equiv 0$，则在(3-14)式中可取 $c_2=0$.

定理 4　设 Ω 及 P 如上，$f\in c^{0,\alpha}(\Omega)$，$0<\alpha\leqslant 1$，则有

$$c^{m,\alpha}(\Omega)=\left\{\varphi:|\varphi|_{m,\alpha}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{\Omega}|\partial^\alpha\varphi|+\sup_{|\beta|=m}\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|D^\beta\varphi(x)-D^\beta\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty\right\}. \tag{3-15}$$

$c^{m,\alpha}(\Omega)$称赫尔德空间. 若 $u\in c^{0,\alpha}(\Omega)$为(3-13)式的弱解，则实际有 $u\in c^{2m,\alpha}(\Omega)$，且

$$|u|_{2m,\alpha}\leqslant c_1|Pu|_{0,\alpha}+c_2|u|_{0,\alpha}. \tag{3-16}$$

同样，当齐次问题只有零解时，可取 $c_2=0$.

注 1　系数及$\partial\Omega$ 的 c^∞ 要求不是本质的，可减弱为适当光滑.

3. 固有值问题

偏微分算子的固有值问题，比常微分算子情形要复杂些. 这里只列述一些主要结果.

定理 5　设对充分大的$|x|$，有

$$q(x)\geqslant\beta,\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

则固有值问题

$$(-\Delta+q)\psi=\lambda\psi,\quad \psi\in L_2(\mathbf{R}^n) \tag{3-17}$$

的谱在区间 $\lambda<\beta$ 中为离散的(关于固有值问题及谱的定义，见泛函分析篇——本卷第 7 篇).

定理 6　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界域，边界$\partial\Omega$ 为分片利普希茨连续. 若 $q(x)$具有性质

$$\lim_{|x|\to\infty}q(x)=\infty,$$

则固有值问题

$$\begin{cases}(-\Delta+q)\psi=\lambda\psi,\ x\in\Omega;\\ \psi|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{3-18}$$

的谱为离散的，且具有下界. 这个结论对固有值问题(3-17)也成立.

定理 7　设 $q(x)=q(r)$，$r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，且对某个 $a>0$，有

$$\int_a^\infty|q(r)|\mathrm{d}r<\infty.$$

还假定 $q\in L_2(\Omega)$，Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中不含原点 $x=0$ 的任一有界域，则问题(3-17)没有严格正的固有值.

定理 8　记问题(3-17)的不超过 λ 的固有值的个数为 $N(\lambda)$，则有

$$N(\lambda)\sim\int_{q<\lambda}(\lambda-q(x)^{\frac{n}{2}})\,\mathrm{d}x\Big/\left[2^n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]. \tag{3-19}$$

定理 9 设定理6中条件成立.$f(x)$为 L_2 中任一函数.记

$$c_k=\int_\Omega f(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x.$$

Ω 可为 $\mathbf{R}^n$,ψ_k 为(3-17)式或(3-18)式的对应于固有值 λ_k 的固有函数 $\int_\Omega|\psi_k|^2\mathrm{d}x=1$.若

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{n}{2}}c_k^2<\infty, \tag{3-20}$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k(x)$收敛于 $f(x)$的充要条件是

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}\int_{r\leqslant R}f(y)\mathrm{d}y=f(x),\quad r=|x-y|.$$

注 2 由定理5推知,若 $\lim\limits_{|x|\to\infty}q(x)=0$,则谱在$(-\infty,0)$中是离散的;若 $\lim\limits_{|x|\to\infty}q(x)=-\infty$,则谱无下界.

定理 10 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有限个不相交开集的并,且每个开集具锥性质(见 1.3 的定义),$A(x,\partial)$为 Ω 中 m 阶线性椭圆算子,具有连续的主部系数而低阶系数仅要求有界可测.假定 A 在 $c_0^\infty(\Omega)$上为对称算子:$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)$,$\forall\varphi,\psi\in c_0^\infty(\Omega)$.设存在 $L_2(\Omega)$上的无界的自伴算子 P,使 $c_0^\infty(\Omega)\subset D(P)\subset H^m(\Omega)$,这里 $D(P)$是 P 的定义域,且当 $u\in D(P)$时有 $Pu=Au$.记

$$n'=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数;}\\ n+1, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

在 $m\leqslant n'$时,假定存在奇正数 k,使 $k>\frac{n'}{m}$,且 A 的系数属于 $c^{(k-1)m}(\Omega)\cap H^{(k-1)m}(\Omega)$,$D(P^k)\subset H^{km}(\Omega)$,则 P 的谱是离散的,且 P 的固有值具有有限重.记 $\{\lambda_j\}$为 P 的按重数编排的固有值序列;对 $\lambda>0$,记非负固有值 $\lambda_j\leqslant\lambda$ 的个数为 $N_+(\lambda)$,负固有值 $\lambda_j\geqslant-\lambda$ 的个数为 $N_-(\lambda)$,则有

$$N_\pm(\lambda)=c_\pm\lambda^{\frac{n}{m}}+O(\lambda^{\frac{n}{m}}),\quad\lambda\to\infty,$$

其中

$$c_\pm=(2\pi)^{-n}\int_\Omega\omega_\pm(x)\mathrm{d}x,$$

$$\omega_\pm(x)=\mathrm{mes}\{\xi:0\leqslant\pm A_m(x,\mathrm{i}\xi)<1\}.$$

注 3 $2m$阶形式自伴算子$A(x,\partial)=\sum\limits_{|\alpha|=m}\partial^\alpha(a_\alpha\partial^\alpha)$,附加狄里克雷边界条件($\gamma$ 为外法线方向)$\left(\frac{\partial^k u}{\partial\gamma^k}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0$,$0\leqslant k\leqslant m-1$,就可以作为定理 10 中的算子 P.

定义 7 记 $B(\theta,a)=\{re^{i\theta};0\leqslant a<r\}$.设 A 为希尔伯特空间 H 中的线性变换,向量 $e^{i\theta}$称为A 的预解式的极小增长方向,对某 $a>0$ 有

$$B(\theta,a)\subset\rho(A),\quad \|(\lambda-A)^{-1}\|=O(|\lambda|^{-1}),$$
$$\lambda\in B(\theta,a),\quad \lambda\to\infty,$$

这里 $\rho(A)$ 为 A 的预解集.

定理 11　设 Ω 如前，$A(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq 2m}a_\alpha\partial^\alpha$ 为 Ω 中 $2m$ 阶线性椭圆算子，具有实的主系数. 不妨认为

$$A_{2m}(x,\mathrm{i}\xi)>0,\quad x\in\Omega,\quad \xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}.$$

设 $a_\alpha(x)\in c^{|\alpha|}(\Omega)\cap H^{|\alpha|}(\Omega)$；$A^*$ 是 A 的伴算子. 设 P 为在 $L_2(\Omega)$ 中有稠定义域的闭算子，而有性质：

1° $D(P)\cup D(P^*)\subset H^{2m}(\Omega)$；

2° 对 $u\in D(P)$，有 $Pu=Au$；

　对 $u\in D(P^*)$，有 $P^*u=A^*u$；

3° 除正实轴外，复 λ 平面的任一方向是 P 的预解式 $(-P+\lambda I)^{-1}$ 的极小增长方向，I 为恒等算子；

4° 当 $2m<n+1$ 时，存在整数 $k>\frac{n+1}{2m}$，使 A 的系数属于 $c^{(k-1)2m}(\Omega)\cap H^{(k-1)2m}(\Omega)$，且 $D(P^k)\cup D(P^{*k})\subset H^{2mk}(\Omega)$，

则 P 的谱为离散的，且 P 的固有值都是有限重的. 对任何 $\epsilon>0$，只有有限个固有值位于角域 $|\arg\lambda|<\epsilon$ 外. 若 $\{\lambda_j\}$ 是 P 的按重数排列的固有值，则对 $\lambda>0$ 有

$$N(\lambda)=c_0\lambda^{\frac{n}{2m}}+O(\lambda^{\frac{n}{2m}}).$$

这里 $N(\lambda)$ 是 $\mathrm{Re}\lambda_j\leq\lambda$ 的 λ_j 的个数，而

$$c_0=(2\pi)^{-n}\int_\Omega \mathrm{mes}\{\xi:A_{2m}(x,\mathrm{i}\xi)<1\}\mathrm{d}x.$$

定理 12　(完备性定理)设 P 为在 $L_2(\Omega)$ 中稠定闭算子，且 $D(P)\subset H^m(\Omega)$. 假定 λ 复平面上除有限个方向外，都是 P 的预解式 $(-P+\lambda I)^{-1}$ 的极小增长方向. 当 $m'\leq\frac{n}{2}$ 时，还假定存在整数 $k>\frac{n}{2m}$，使 $D(P^k)\subset H^{2m}(\Omega)$，则 $S_P(P)=L_2(\Omega)$，这里 $S_P(P)$ 为 P 的广义固有向量列所张成的闭子空间. P 的对应于固有值 λ_j 的广义固有向量 ψ_j，是对某个正数 k 使

$$(I-\lambda_jP)^k\psi_j=0$$

的非零函数，$\psi_j\in L_2(\Omega)$.

3.2　双曲型方程

3.2.1　狭义双曲方程

先考虑常系数高阶微分算子

$$P(\partial_t,\partial_x)\equiv P_m(\partial_t,\partial_x)+Q(\partial_t,\partial_x),\quad t\in\mathbf{R}^1,x\in\mathbf{R}^n,\tag{3-21}$$

其中，P_m 为 P 的主部(齐 m 阶部分)，Q 为低阶部分.

定义 8 若对于任何实向量 $\xi\neq 0$,方程

$$P_m(\lambda,\xi)=0 \quad (P_m(1,0)\neq 0) \tag{3-22}$$

有 m 个相异的非零实根

$$\lambda_1(\xi)>\lambda_2(\xi)>\cdots>\lambda_m(\xi), \tag{3-23}$$

则称 P 关于 t 为**狭义双曲算子或严格双曲算子**.相应方程 $Pu=f$ 称为**狭义双曲方程**.

定理 13 (基本解)狭义双曲方程初值问题

$$P(\partial_t,\partial_x)E(x,t)=0;$$
$$\left.\frac{\partial^k E}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant k\leqslant m-2;\quad \left.\frac{\partial^{m-1}E}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\delta(x) \tag{3-24}$$

的基本解 E 如下确定(假定 $P_m(1,0)=1$):

$$E(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\displaystyle\int_H \delta^{(n-m)}(x\cdot\xi+t)\mathrm{d}s, \\ \qquad m<n+1, n \text{ 为奇数}; \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-m)!}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_H (x\cdot\xi+t)^{m-n-1}\mathrm{d}s, \\ \qquad m<n+1, n \text{ 为偶数}; \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}(m-n-1)!}\displaystyle\int_H (x\cdot\xi+t)^{m-n-1}\cdot\mathrm{sgn}(x\cdot\xi+t)\mathrm{d}s, \\ \qquad m\geqslant n+1, n \text{ 为奇数}; \\ \dfrac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n(m-n-1)!}\displaystyle\int_H (x\cdot\xi+t)^{m-n-1}\cdot\ln\left|\frac{x\cdot\xi+t}{x\cdot\xi}\right|\mathrm{d}s, \\ \qquad m\geqslant n+1, n \text{ 为偶数}, \end{cases} \tag{3-25}$$

其中积分域 $H=\{\xi:P_m(1,\xi)=0,|\xi|=1\}$.且由 E 可以构造方程

$$P(\partial_t,\partial_x)F=\delta(x)\delta(t) \tag{3-26}$$

的基本解 F 如下:

$$F(x,t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ E(x,t), & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{3-27}$$

定理 14 狭义双曲型方程初值问题

$$D(\partial_t,\partial_x)_u=f(x,t),\ t>0, x\in\mathbb{R}^n;\ P_m(1,0)=1;$$
$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=g_k(x),\quad k=0,1,\cdots,m-1 \tag{3-28}$$

的解可由(3-24)式的基本解 E 表示为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}E(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^j E(x-y,t)}{\partial t^j}f_j(y)\mathrm{d}y, \tag{3-29}$$

其中 $f_0(x),\cdots,f_{m-1}(x)$ 由下列关系递推确定

$$\begin{cases} f_{m-1}(x)=g_0(x); \\ f_{m-2}(x)+\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}E(x,0)*f_{m-1}(x)=g_1(x); \\ \cdots \\ f_1(x)+\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}E(x,0)*f_2(x)+\cdots+\dfrac{\partial^{2m-3}}{\partial t^{2m-3}}E(x,0)*f_{m-1}(x)=g_{m-2}(x); \\ f_0(x)+\dfrac{\partial^m}{\partial t^m}E(x,0)*f_1(x)+\cdots+\dfrac{\partial^{2m-2}}{\partial t^{2m-2}}E(x,0)*f_{m-1}(x)=g_{m-1}(x). \end{cases} \tag{3-30}$$

例 6 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x,0)=g_0(x),\ u_t(x,0)=g_1(x). \end{cases}$

据(3-25)式在 $m=2,n=1$ 的情形,可得基本解

$$E(x,t)=\frac{1}{2}[H(x+t)-H(x-t)], \tag{3-31}$$

其中 $H(x)$ 为赫维赛德(Heaviside)函数

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2}[\delta(x+t)+\delta(x-t)]_{t=0}=\delta(x);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t)\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2}[\delta'(x+t)-\delta'(x-t)]_{t=0}=0.$$

此外,按(3-30)式可算出

$$f_1(x)=g_0(x);\quad f_0(x)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,0)*f_1(x)=f_0(x)=g_1(x).$$

故得本例初值问题的解为

$$u(x,t)=E(x,t)*g_1(x)+\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)*g_0(x).$$

若 g_0 及 g_1 为连续函数,上式化为达朗贝尔(D'Alembert)公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g_1(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}[g_0(x+t)+g_0(x-t)].$$

再考虑常系数方程组

$$\begin{cases} u_t=P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u+F(x,t),\ u=(u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}},\ F=(F_1,\cdots,F_m)^{\mathrm{T}}; \\ P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)=A\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\sum\limits_{j=2}^{n}B_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \end{cases}$$

其中 A,B_j 都是 $m\times m$ 常方阵.

定义 9 若对所有实向量

$$\boldsymbol{w}=(w_1,\boldsymbol{w}'),\boldsymbol{w}'=(w_2,\cdots,w_n),|w|=1,$$

方阵

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{i}w)=\mathrm{i}Aw_1+\mathrm{i}\boldsymbol{B}(w'),\quad \boldsymbol{B}(w')=\sum_{j=2}^{n}B_jw_j$$

的固有值是相异的纯虚数,则称(3-31)式为**狭义双曲方程组**.

注 4 这个定义等价于:方程

$$\det|\mathrm{i}\lambda-\boldsymbol{P}(\mathrm{i}w)|=0$$

只有相异的非零实根.

假定方阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩的对角方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$$

且前 l 个对角元为负,后 $m-l$ 个对角元为正,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_l\end{bmatrix},\quad a_i<0,1\leqslant i\leqslant l;$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}a_{l+1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{l+2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & a_m\end{bmatrix},\quad a_j>0,l+1\leqslant j\leqslant m,\tag{3-32}$$

于是可叙述如下的定理.

定理 15 狭义双曲方程组的混合问题

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=A\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}+\sum_{j=2}^{n}B_j\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}+F(\boldsymbol{x},t),t>0,x_1>0,\boldsymbol{x}'\in\mathbf{R}^{n-1};$$
$$u(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),x_1>0,\boldsymbol{x}'\in\mathbf{R}^{n-1},\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}};$$
$$u^{\mathrm{I}}(0,\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{S}u^{\mathrm{II}}(0,\boldsymbol{x}',t),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}',t),\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_l)^{\mathrm{T}},\tag{3-33}$$

其中 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}=(u_1,\cdots,u_l)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}^{\mathrm{II}}=(u_{l+1},\cdots,u_m)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{S}$ 为 $l\times(m-l)$常数矩阵.在 L_2 中适定的充分及必要条件是

$$|\det\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}|\geqslant\delta>0,\tag{3-34}$$

这里 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ 如下确定.记

$$\boldsymbol{M}(w,\lambda)=\boldsymbol{A}^{-1}[\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}(w')],\tag{3-35}$$

设有么正变换 $\boldsymbol{U}$ 使

$$\boldsymbol{UMU}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{22}\end{bmatrix},\tag{3-36}$$

其中 $\boldsymbol{M}_{11}$为 $l\times l$ 方阵,$\boldsymbol{M}_{22}$为$(m-l)\times(m-l)$方阵.对相应的变换 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Uv}$,(3-33)式中的边界条件化为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\mathrm{U}v=\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{II}}v^{\mathrm{II}}=\boldsymbol{g},\boldsymbol{v}^{\mathrm{I}}=(v_1,\cdots,v_l)^{\mathrm{T}},\tag{3-37}$$

S^{I} 即如此确定. 当条件(3-34)成立时,有

$$\int_0^T \| u \|_{\mathbf{R}_+^n}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \| u(0,x',t) \|_{\mathbf{R}^{n-1}}^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant K(T)\left\{\int_0^T \| F(x,t) \|_{\mathbf{R}_+^n}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \| g(x',t) \|_{\mathbf{R}^{n-1}}^2 \mathrm{d}t + \| f(x) \|_{\mathbf{R}_+^n}^2\right\},$$

其中 $K(T)$ 仅与 $T>0$ 有关,而

$$\mathbf{R}_+^n = \{x : x_1 > 0, x' \in \mathbf{R}^{n-1}\}, \quad \| u \|_v^2 = \int_v |u|^2 \mathrm{d}v.$$

注 5 (3-33)式中的边界条件个数由方阵 A 的负固有值个数 l 所决定.

最后提一下变系数情形:

$$\begin{cases} Lu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \displaystyle\sum_{j=2}^n B_j(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_j} - c(x,t)u = F(x,t); \\ u = (u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}}, F = (F_1,\cdots,F_m)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{3-38}$$

A, B_j 和 c 都是具有光滑函数元的 $m\times m$ 方阵.

定义 10 若对所有的 $t\in[0,T]$, T 为任意正数,所有 $x_1>0$, $x'=(x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n-1}$ 及所有实向量 $w=(w_1,w')$, $|w|=1$, $w'=(w_2,\cdots,w_n)$, 方阵

$$P(\mathrm{i}w) = \mathrm{i}A(x,t)w_1 + \mathrm{i}B(x,t,w'),$$

$$B(x,t,w') = \sum_{j=2}^n B_j(x,t)w_j$$

只有相异的纯虚固有值,即称(3-38)式为狭义双曲方程组.

定理 16 混合问题

$$\begin{cases} Lu = F(x,t), t>0, x_1>0, x'\in\mathbf{R}^{n-1}; \\ u(x,0) = f(x), f=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}; \\ (u^{\mathrm{I}} - Su^{\mathrm{II}})|_{x_1=0} = g(x',t), g=(g_1,\cdots,g_l)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{3-39}$$

其中, l 为方阵 A 的负固有值的个数, S 为 $l\times(m-l)$ 矩阵,其相应方阵 S^{I} 满足条件(3-34),则有唯一强解 $u=(u_1,\cdots,u_m)\in L_2([0,T]\times\mathbf{R}_+^n)$,满足如下估计:

$$\| u \|_{k,\mathbf{R}_+^n,\alpha} + \sqrt{\alpha}\, \| u \|_{k,\mathbf{R}_+^n\times[0,T],\alpha} + \| u \|_{k,\mathbf{R}^{n-1}\times[0,T],\alpha}$$

$$\leqslant K(k)\left\{\| f \|_{k,\mathbf{R}_+^n,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\| F \|_{k,\mathbf{R}_+^n\times[0,T],\alpha} + \| g \|_{k,\mathbf{R}^{n-1}\times[0,T],\alpha}\right\}, \tag{3-40}$$

其中

$$\| \psi \|_{k,v,\alpha}^2 = \sum_{|\gamma|\leqslant k}\int_V |\partial^\gamma\psi| \mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}V, \alpha>0, \tag{3-41}$$

V 表示 $\mathbf{R}_+^n\times[0,T]$, $\mathbf{R}_+^n$, $\mathbf{R}^{n-1}\times[0,T]$ 中的一个, α 充分大.

3.2.2 广义双曲方程

广义双曲方程有多种定义方式,下面考察由整个算子而不是由其主部进行定义的一种.

定义 11 常系数线性偏微分算子

$$P(\mathrm{D})\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

若

$$P_m(N)=\sum_{|\alpha|=m}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}N_1^{\alpha_1}\cdots N_n^{\alpha_n}\neq 0,$$

且对某 $\tau_0\in\mathbf{R}$ 有

$$P(\xi+\mathrm{i}\tau N)\neq 0,\quad \xi\in\mathbf{R}^n,\quad \tau<\tau_0,\tag{3-42}$$

则称关于实向量 $N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$ 为双曲型算子.

例 7 $P(\mathrm{D})=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$.

记 $x_1=t,x_2=x$,相应多项式为

$$P(\xi)=\xi_1^2-\xi_2^2+\mathrm{i}\xi_2.$$

取 $N=(1,0)$,有 $P_2(N)=1\neq 0$.令

$$P(\xi+\mathrm{i}\tau N)=(\xi_1+\mathrm{i}\tau)^2-\xi_2^2+\mathrm{i}\xi_2=\xi_1^2-\tau^2-\xi_2^2+\mathrm{i}(\xi_1\tau+\xi_2),$$

当且仅当 $\xi_1^2=\tau^2+\xi_2^2,\xi_2=-2\xi_1\tau$ 时,$P(\xi+\mathrm{i}\tau N)=0$,消去 ξ_2 得

$$\xi_1^2-4\xi_1^2\tau^2-\tau^2=0,\ \xi_1^2=\frac{\tau^2}{1-4\tau^2}.$$

故当取 $\tau_0=-\dfrac{1}{2}$ 时确有

$$P(\xi+\mathrm{i}\tau N)\neq 0,\quad \tau<\tau_0=-\frac{1}{2};$$

即 P 关于 $N=(1,0)$ 为双曲方程.

例 8 $P(\mathrm{D})=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2$,相应的多项式是

$$P(\xi)=-(\xi_1-\xi_2)^2.$$

取 $N=(1,0)$,有 $P_2(N)=-1\neq 0$,且

$$P(\xi+\mathrm{i}\tau N)=-(\xi_1+\mathrm{i}\tau-\xi_2)^2\neq 0,\quad \tau<\tau_0=0,$$

故 P 为广义双曲算子,注意 P 不是狭义双曲算子.

定理 17 若 $P(\mathrm{D})$ 关于 N 为双曲的,则其主部 $P_m(\mathrm{D})$ 关于 N 也是双曲的.

定理 18 当且仅当 $P_m(N)\neq 0$ 且 $P(\xi+\tau N)=0$ 对实的 ξ 仅有实根时,$P_m(N)$ 关于 N 是双曲的.

定理 19 记 $H=\{x\mid x_1N_1+\cdots+x_nN_n\geqslant 0\}$.设 $P(\mathrm{D})$ 关于 N 为 m 阶双曲算子.若 $j\geqslant m,r=\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$,则对所有的 $f\in C^{j+r}(H),\varphi_k\in c^{m+j+r}(\partial H),k=0,1,\cdots,m-1$,初值问题

$$Pu=f;\partial_\gamma^k u|_{\partial H}=\varphi_k,\quad k=0,1,\cdots,m-1,\tag{3-43}$$

有唯一解 $u\in c^j(H)$,其中 γ 为 ∂H 的外法方向.

3.3　其他定型方程

3.3.1　狭义抛物方程

定义 12　给定常系数方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=P(\mathrm{D})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t),\quad t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\tag{3-44}$$

$$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}.$$

记方阵 $P(\xi+\mathrm{i}\eta)\equiv P(\zeta),\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 的特征方程为

$$\det|\boldsymbol{P}(\zeta)-\lambda I|=(-1)^m\lambda^m+P_1(\zeta)\lambda^{m-1}+\cdots+P_m(\zeta)=0.\tag{3-45}$$

设 $P_j(\zeta)$的次数为 p_j. 令

$$p=\max_{1\leqslant j\leqslant m}p_j;\ p_0=\max_{1\leqslant j\leqslant m}p_j/j;\tag{3-46}$$

$$\Lambda(\xi)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\mathrm{Re}\lambda_j(\zeta),\tag{3-47}$$

$\lambda_1(\zeta),\cdots,\lambda_m(\zeta)$为(3-45)式的 m 个根.若

$$\Lambda(\zeta)\leqslant -c|\xi|^h+c_1,\quad c>0;h>0,\tag{3-48}$$

则称方程组(3-44)为**狭义抛物方程组**.

热传导方程 $u_t=\Delta u$ 是狭义抛物方程的最简单的例子.

例 9　$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^p u,p>2.$

这个方程是狭义抛物的.事实上,

$$\lambda(\zeta)=-\zeta^2+\mathrm{i}\zeta^p,\ \Lambda(\xi)=-|\xi|^2,h=2.$$

定理 20　$p_0>1;h\leqslant p_0\leqslant p$.

定义 13　若不等式(3-48)可延拓于复域:

$$\Lambda(\xi+i\eta)\leqslant -c|\xi|^h+c_1,|\eta|\leqslant k(1+|\xi|)^\mu,\tag{3-49}$$

则使上式成立的最大的 μ 称为(3-44)式的格(genus).

定理 21　$\mu\geqslant 1+h-p_0$.

定理 22　设给定狭义抛物方程初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_t=P(\mathrm{D})\boldsymbol{u},t>0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n;\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}),\end{cases}\tag{3-50}$$

当 $\mu>0$ 时,若 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$的每个分量都属于函数类:

$$K_{p_1,b_0}=\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\in C^\infty(\mathbf{R}^n);|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\leqslant C\exp(b_0|\boldsymbol{x}|^{p_1})\},$$

$$p_1=p_0/(p_0-\mu),b_0>0,$$

则对充分小的 $t>0$,初值问题(3-50)在类 K_{p_1,b_1}中是适定的.这里 b_1 为大于 b_0 的任一个数.当 $\mu\leqslant 0$ 时,若 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$属于函数类:

$$K_{p_1,\epsilon}=\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|f(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n);|f(\boldsymbol{x})|\leqslant C(\epsilon)\exp(\epsilon|\boldsymbol{x}|^{p_1})\},$$

$$p_1=h/(h-\mu),$$

ε 为任一正数,充分小,则对充分小的 $t>0$,问题(3-50)在这个函数类中是适定的.

定理 23 给定狭义抛物方程混合问题

$$u_t+(-1)^m P_{2m}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u+Q\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x,t),$$
$$t>0,\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n;$$
$$u(x,0)=g(x);B_j\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u\bigg|_{\partial\Omega}=h_j,\quad j=1,2,\cdots,m,\tag{3-51}$$

其中 $(-1)^m P_{2m}(x,t,\mathrm{i}\xi)\geqslant c^2|\xi|^{2m},\xi\in\mathbf{R}^n,c>0,t>0,x\in\Omega$; Q 为阶数 $\leqslant 2m-1$ 的算子; $\{B_j\}$ 为关于 P_{2m} 满足根条件的规范边界算子组(见定义(3-5)).设 P_{2m},Q, B_j 中系数及 $f,g,h_j(j=1,2,\cdots,m)$ 都适当光滑,且 P_{2m} 的系数取实值,Ω 为有界域,边界 $\partial\Omega$ 适当光滑,则混合问题在 $C([0,T])\cap C^{2m}(\Omega)$ 中是适定的.

3.3.2 定型退化方程

定理 24 设在有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上给定椭圆-抛物退化型二阶线性方程(具实系数)

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x),$$
$$c(x)<0,$$
$$Q(x,\xi)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j>0,\quad x\in\Omega,\quad Q(x,\xi)\geqslant 0,\quad x\in\partial\Omega,$$
$$0\neq\xi\in\mathbf{R}^n,$$

即方程的类型在边界 $\partial\Omega$ 上出现退化情况,记

$$S_1=\{x\in\partial\Omega\,|\,Q(x,y)\neq 0,y\text{ 为}\partial\Omega\text{ 的内法线方向}\};$$
$$S_2=\left\{x\in\partial\Omega\setminus S_1\,\Big|\,b(x)\equiv\sum_{j=1}^{n}\left(b_j(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\right)y^j<0\right\};$$
$$S_3=\{x\,|\,x\in\partial\Omega\setminus S_1,b(x)\geqslant 0\},$$

则边值问题

$$Lu=f(x),\quad x\in\Omega;u|_{S_1\cup S_2}=g\tag{3-52}$$

在 $L_p(\Omega)(p\geqslant 1)$ 中是适定的.这里要求

$$a_{ij}(x)\in C^2(\overline{\Omega}),b_j(x)\in C^1(\overline{\Omega}),c(x)\in C(\overline{\Omega}),f,g\in L_p.$$

定理 25 双曲-抛物退化方程初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=t^{\alpha}k^2(x,t)u_{xx}+a(x,t)u_x+b(x,t)u_t+c(x,t)u+f(x,t),\quad t>0;\\u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\mathbf{R}^1,\end{cases}\tag{3-53}$$

$k\neq 0,k\in C^2([0,T]\times\mathbf{R}),a,b,c,f\in C([0,T]\times\mathbf{R})$,当 $\alpha<2$ 时为适定的.

定理 26 双曲-抛物退化方程初值问题

$$\begin{cases}u_{xx}-x^2u_{tt}+\lambda u_t=0,t>0,x\in\mathbf{R}^1;\\u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x).\end{cases}\tag{3-54}$$

当 $\lambda\neq1,3,5,\cdots$ 且 $\varphi,\psi\in C^{\infty}(\mathbf{R})$，$\varphi^{(j)}(0)=\psi^{(j)}(0)=0$，$j=1,2,\cdots$ 时，存在唯一的解 $u\in C^{\infty}$；当 $p=1,3,5,\cdots$ 时，解不唯一.

3.3.3 特里科米(Tricomi)方程

$$yu_{xx}+u_{yy}=0,\tag{3-55}$$

它当 $y>0$ 时为椭圆方程；当 $y<0$ 时为双曲方程；当 $y=0$ 时退化. 方程(3-55)当 $y<0$ 时的特征线方程

$$y\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2=0$$

有解(特征线)：

$$x=\mp\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+\text{const},y<0.\tag{3-56}$$

在椭圆域 $y>0$，经变量代换

$$\xi=x;\quad \eta=\frac{2}{3}y^{3/2},$$

可化方程(3-55)为标准型

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.\tag{3-57}$$

在双曲域 $y<0$，经变换

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2};\quad \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2},$$

可化方程(3-55)为欧拉-泊松方程(参看"经典数学卷")：

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0.\tag{3-58}$$

设在 $x-y$ 平面上给定域Ω，上半平面部分由过 x 轴上二点 $A(a,0)$，$B(b,0)$，$a<b$ 的曲线 σ 围成，下半平面部分由过点 A 的特征线 $x=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+a$ 及过点 B 的特征线 $x=-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+b$ 围成. 记此二特征线的交点为 C. 故域 Ω 的边界$\partial\Omega=\sigma\cup AC\cup BC$.

定理 27 特里科米方程边值问题

$$\begin{cases}yu_{xx}+u_{yy}=0;\\ u|_\sigma=f,u|_{AC}=g\end{cases}\tag{3-59}$$

对适当光滑的 f,g，有唯一的古典解.

注 6 (3-59)式中的条件 $u|_{AC}=g$ 可换为 $u|_{BC}=h$ 或其他类似条件 $u|_{PQ\cup PR}=g$，这里 P 为 AB 上任一点，只要求弧 PQ 及 PR 各与特征线 $x=\mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}+\text{const}$交于一点，而由 PQ 及 PR 上各点引出的二特征线只有一条与$\overline{AB}$相交，且交点集覆盖线段$\overline{AB}$.

3.3.4 拟抛物方程

拟抛物方程包含某些广义抛物方程，但难于给出统一的确切定义. 下面仅限于

考察几个具体方程.

定理 28 混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, a\neq 0, t>0, 0<x<1;\\ u(x,0)=u_0(x), u(0,t)=u(1,t)=0;\\ u_x(0,t)=u_x(1,t)C, |C|\leqslant 1,\end{cases}\tag{3-60}$$

当 $u_0(x)\in V=\{f(x)|f(x)\in H^2(0,1)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(0,1), f'(0)=Cf'(1)\}$ 时有唯一的弱解 $u\in V\cap C'(0,T)$, T 为任意正数.

定理 29 混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, a\neq 0, t>0, 0<x<1;\\ u(x,0)=u_0(x); u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\end{cases}\tag{3-61}$$

当 $u_0\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$ 时,有唯一的弱解

$$u\in \overset{\circ}{H}{}^2(0,1)\cap H^3(0,1)\cap C^1(0,T).$$

定理 30 混合问题

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta u+a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=F(x,t), t>0, x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n;\\ u(x,0)=u_0(x), u|_\Gamma=0, \Gamma \text{ 为 } \partial\Omega \text{ 的闭子集};\\ \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}(s,t)=\dfrac{\partial u_0(s)}{\partial\gamma}+\displaystyle\int_0^t g(s,t)\mathrm{d}\tau, s\in\partial\Omega\setminus\Gamma,\end{cases}\tag{3-62}$$

当 $u_0(x)\in V=\{f(x)|f\in H^1(\Omega), f|_\Gamma=0, \text{a.e. } \Delta f\in L_2(\Omega), \left.\dfrac{\partial t}{\partial\gamma}\right|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}=0\}$ 时有弱解 $u\in V\cap C'(0,\tau)$.

定理 31 混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, a\neq 0, t>0, 0<x<1;\\ u(x,0)=u_0(x); u(0,t)=u(1,t)=0,\end{cases}\tag{3-63}$$

当 $u_0\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$ 时有唯一弱解 $u\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,1)\cap C^1(0,T)$.

3.4 一般线性方程

3.4.1 无解的方程

近年来发现了一些无解(即令是弱解)方程.这是一件引人注目的事,下面举例说明.

例 10 一阶方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2\mathrm{i}(x_1 + \mathrm{i}x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3),$$

其中 $f(x_3)$ 是 x_3 的无穷可微但非解析的函数,如

$$f(x_3) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(x_3 - a_j), \varphi(x_3 - a_j) = \begin{cases} \exp\dfrac{-1}{(x^3 - a_j)^2}, & x_3 > a_j; \\ 0, & x_3 \leqslant a_j, \end{cases}$$

N 为任一有限的正整数,$a_1, a_2, \cdots, a_N$ 为任何 N 个实数,其中某几个可以任意接近. 这时 $Lu = f$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中的任一非空开域 Ω 中无分布解.

例 11　一阶方程

$$Mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathrm{i}x_1^k \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2),$$

当 k 为奇数时,对某些 f 无分布解.

由这些例子看出,即令是具多项式系数的线性偏微分方程,哪怕不附加任何定解条件,也可能无解存在.

3.4.2　解的光滑性问题

解的光滑性研究的意义在于,若能由不依赖于求解过程的准则来判定某类方程的广义函数解实际是无穷可微函数,则可由较易着手的弱解存在性的建立获知古典解的存在.

定义 14　具有无穷可微系数的线性偏微分算子

$$P(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

若对任一无穷可微函数 $f(x)$,方程 $Pu = f$ 的所有广义函数解 u 实际是古典的无穷可微函数,就称 P 为**亚椭圆算子**,相应方程 $Pu = f$ 称为**亚椭圆方程**.

注 7　由定义知齐次亚椭圆方程 $Pu = 0$ 的任一广义函数解为无穷可微函数. 由数学物理方程的古典讨论知 $\Delta u = 0$ 的任一个二次连续可微的解实际是解析函数. 故椭圆算子的光滑性结论比亚椭圆算子强得多,这正是亚椭圆性取名的来历.

亚椭圆算子的判定问题在常系数情形已得到彻底解决;变系数情形无满意的一般性结果.

定理 32　常系数偏微分算子

$$P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

为亚椭圆算子的充要条件是下列等价性质之一.

1° 沿零点集 $N = \{\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \mid P(\zeta) = 0\}$,有

$$|\xi| \to \infty \Rightarrow |\eta| \to \infty.$$

这里 $P(\zeta)$ 乃由 $P(\mathrm{D})$ 换 $\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 为 $\zeta_j = \xi_j + \mathrm{i}\eta_j$ 而得.

2° 对任何 $C > 0$,有 $A > 0$,使 $P(\zeta)$ 在域

$$\Omega = \{\zeta \mid |\eta| < C, |\xi| > A\}$$

中无零点.

3° $\sup\limits_{|\xi|\geq a}\left|\dfrac{\partial^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right| = 0(|\xi|^{-q|\alpha|}), 0<q\leq 1, a>0.$

4° $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\dfrac{P(\xi+\theta)}{P(\xi)} = 1, |\theta|\leq C, \theta\in\mathbf{C}^n.$

5° $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}|P(\xi+\mathrm{i}\eta)| = \infty, |\eta|\leq C.$

6° $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\dfrac{\nabla P(\xi)}{P(\xi)} = 0, \nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial\xi_n}\right).$

最便于应用的是准则 6°.

例 12 $P(\mathrm{D}) = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}.$

这个算子是亚椭圆的.事实上,$P(\xi) = \mathrm{i}\xi_1 + \xi_2^2$ 显然具有性质 6°.

由数学物理方程的讨论知热传导方程 $u_t = u_{xx}$ 的任一解确是无穷可微的,但关于 t 不是解析的.

同样易核验拉普拉斯算子 Δ 为亚椭圆算子.Δ 实际上是更强的椭圆算子.

波动算子$\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ 不是亚椭圆算子.事实上,

$$P(\xi) = \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 - \xi_1^2$$

不满足定理 32 中的要求 5°.因为当 $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$ 时,尽管 $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \to \infty$,但 $P(\xi) = 0$,故不具性质 5°.

例 13 $P(\mathrm{D}) = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^p, \quad p>2.$

相应的多项式为

$$P(\xi) = \mathrm{i}\xi_1 + \xi_2^2 + \mathrm{i}\xi_2^p = \xi_2^2 + \mathrm{i}(\xi_1 + \xi_2^p),$$

而具有性质 6°,故 P 为亚椭圆算子.

3.4.3 适定定解问题

定理 33 对任一常系数线性偏微分算子 $P(\mathrm{D})$ 或任一主部具有实系数的主型算子 $P(x,D)$ 及任一无穷可微流形,总存在适定的边值问题.

这个定理是相当一般的,因而也是相当空洞的.下面列举一些比较具体的结果.

定理 34 给定初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = P(\partial)u = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial^\alpha u, t>0, x\in\mathbf{R}^n; \\ u(x,0) = f(x),\end{cases} \tag{3-64}$$

a_α 为复常数.这个问题在 L_2 中适定的充要条件是:存在常数 $c>0$,使

$$\mathrm{Re}P(\mathrm{i}\xi)\leq c, \quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{3-65}$$

注 8 若换(3-64)式为方程组,则相应于(3-65)式的条件是,对方阵 $P(\mathrm{i}\xi)$ 的每个固有值 $\lambda_j(\xi)$,有

$$\mathrm{Re}\lambda_j(\xi)\leqslant c,\quad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{3-66}$$

定理 35　给定混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}P_j\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}u,\ t>0,x_1>0;\\ \left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=u_k(x),k=0,1,\cdots,r-1;\\ \left.\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}=w_k(t,x'),k=0,1,\cdots,p-1,\end{cases} \tag{3-67}$$

$$x'=(x_2,x_3,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n-1},$$

其中 r 是特征方程

$$\lambda^m=\sum_{j=0}^{m-1}P_k(\zeta_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\lambda^j$$

在域 $\mathrm{Im}\zeta_1=\eta_1<\beta$ 中具非正实部的根的个数，这里 β 选得使特征根所有枝点位于半空间 $\mathrm{Im}\zeta_1>\beta$ 内. 记

$$\mathrm{Re}\lambda_0\leqslant\mathrm{Re}\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\lambda_{r-1}\leqslant 0<\mathrm{Re}\lambda_r\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\lambda_{m-1},$$

P 为方程关于$\dfrac{\partial}{\partial x_1}$的最高阶数. 引进空间

$$H_+^{\beta,q}(x)=\{u\mid \|u\|_{\beta,q}^2\equiv\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\beta x_1}\|I^q u\|^2\mathrm{d}x_1<\infty\},$$

$$H_+^\beta=\bigcup H_+^{\beta,q};\quad Iu\equiv\int u(x)\mathrm{d}x,$$

则问题(3-67)在 H_+^β 中适定的充要条件是：原仅在域$\{\zeta\mid\mathrm{Re}\lambda_\gamma(\zeta)>0,\mathrm{Im}\zeta_1<\beta,\gamma=r,\cdots,m-1\}$中定义的函数

$$G_\gamma(\check{\zeta})=\int_0^\infty\exp(-\theta\lambda_\gamma(\check{\zeta}))g(\check{\zeta},\theta)\mathrm{d}\theta,\gamma=r,\cdots,m-1,$$

$$\check{\zeta}=(\zeta_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$

可解析延拓于整个半空间 $\mathrm{Im}\zeta_1<\beta$ 而仍属 $H_+^\beta(\check{\zeta})$. 上式中

$$g(\check{\zeta},t)=\sum_{j=0}^{p}Q_j\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)[\widehat{w}_{j-1}(t,\sigma')+\mathrm{i}\zeta_1\widehat{w}_{j-2}(t,\sigma')+$$

$$\cdots+(\mathrm{i}\zeta_1)^{j-1}\widehat{w}_0(t,\sigma')],\boldsymbol{\sigma}'=(\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n),$$

而 Q_j 则由改写方程而得：

$$\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}=\sum_{j=0}^{p-1}Q_j\left(\frac{\partial}{\partial t},D'\right)\frac{\partial^j}{\partial x_1^j},$$

$$D'=\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$Q_j\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\sigma'\right)$ 由 $Q_j\left(\dfrac{\partial}{\partial t},D'\right)$ 换 D' 为 σ' 得来，$\widehat{w}_j(t,\sigma')$是 $w_j(t,x')$关于 $x'=(x_2,x_3,$

$\cdots,x_n)$的傅里叶变换.

例 14 $u_{tt}=-a^2u_{xx},t>0,x>0.$

当 $a=\mathrm{i}$ 时得波动方程 $u_{tt}=u_{xx}$,特征根是 $\lambda_{1,2}=\mp\mathrm{i}\zeta$. 域 $\mathrm{Re}\lambda_1<0$ 重合于域 $\mathrm{Im}\zeta<0$,故还可任意给定 $w_0(t),w_1(t)$,这正是古典的混合问题(注意这时交换了变量 t 与 x 的地位,与通常用法相反).

当 $a=1$ 时得调和方程 $u_{tt}+u_{xx}=0$. 特征根是 $\lambda_{1,2}=\mp\zeta$. 适定的问题是:给定初值 $w_0(t),w_1(t)$,但须使分别定义于域 $\mathrm{Re}\zeta<0$ 及 $\mathrm{Re}\zeta>0$ 的函数

$$\int_0^\infty e^{\zeta t}[w_1(t)+\mathrm{i}\zeta w_0(t)]\mathrm{d}t;\quad \int_0^\infty e^{-\zeta t}[w_1(t)+\mathrm{i}\zeta w_0(t)]\mathrm{d}t$$

可解析延拓于半平面 $\mathrm{Im}\zeta<0$ 且属 H_+^0.

定理 36 给定方程

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=\sum_{j=0}^{m-1}P_j\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}u,\quad t>0,x\in\mathbf{R}^n. \tag{3-68}$$

把特征方程 $\lambda^m=\sum_{j=0}^{m-1}P_j(\sigma)\lambda^j$ 的根编号使 $\mathrm{Re}\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\lambda_m$. 记

$$G_j=\{\sigma\mid\mathrm{Re}\lambda_j(\sigma)\leqslant 0\},\quad G_1\supset\cdots\supset G_m.$$

设在每个 G_j 上给定 $v_j(\sigma)$,而可延拓于全空间 $\mathbf{R}^n$(例如延拓为零)使属于 $H=\bigcap_s H^s$,则方程(3-68)有解 $u\in H^1=\bigcup_s H^s$,使初值的傅立叶变换在 G_k 上于 $v_k(\sigma)$ 重合,且 u 对 t 仅具幂增率,并在这个函数类中是唯一的稳定解. 若 $v_j(\sigma)$ 为 $\left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}$ 的傅立叶变换,仅在真子集 $G'_j\subset G_j$ 中给定,$j=1,\cdots,r$,且 $G'_1\supset\cdots\supset G'_r$,则初值问题不适定.

例 15 $u_{tt}+\Delta u=0.$

这时 $\lambda_{1,2}=\mp|\sigma|$,有 $G_1=\mathbf{R}^n(\sigma),G_2=\{0\}$,故只能在 H^1 中给定一个边值 $u(x,0)$.

例 16 $u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$

这时 $\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{\sigma_3^2-\sigma_1^2-\sigma_2^2}$,有 $G_1=\mathbf{R}^3(\sigma),G_2=\{\sigma\mid\sigma_3^2\leqslant\sigma_1^2+\sigma_2^2\}$. 故可在 H^1 中任意给定 $u(x,0)$,而 $u_t(x,0)$ 则须给定使 $v_2(\sigma)=u_t(x,0)\in Q_\sigma^-$,即当 $\sigma\in G_2$ 时要求 $v_2(\sigma)\in H$,而当 $\sigma\bar{\in}G_2$ 时 $v_2\equiv 0$.

以上主要是常系数情形,下面提到变系数情形.

定义 15 给定一阶线性方程组

$$Ku\equiv\sum_{\rho=1}^{n}a_\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x_\rho}+\gamma(x)u=f(x),\quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n, \tag{3-69}$$

u 和 f 为 m 维向量函数,$a_\rho(\rho=1,2,\cdots,n)$和 γ 都是 $m\times m$ 方阵,a_ρ 都是对称的. 若方阵

$$k = \gamma - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \tag{3-70}$$

的对称部分$\frac{k+k'}{2}$是正定的，即对任何非零实向量 g，二次型

$$g'\frac{k+k'}{2}g = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{k_{ij}+k'_{ij}}{2} g_i g_j$$

为正定的(这里 k'，g' 分别为 k，g 的转置)，则称 K 为**正对称算子**；称(3-69)式为**正对称方程组**.

定义 16 设 $\mathbf{R}^n$ 中域Ω 有分片光滑的边界$\partial\Omega$，由其外法线单位向量 $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)'$作方阵

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\gamma_j \tag{3-71}$$

及某种分解：

$$\beta = \beta_+ + \beta_-, \quad \mu = \beta_+ - \beta_-.$$

若 μ 的对称部分$\frac{\mu+\mu'}{2}$非负定. 则称边界条件

$$\beta_- u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3-72}$$

为**半可许的**；若还存在方阵 $P_\pm$ 具有性质

$$P_+ + P_- = I, \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0, \quad \beta_\pm = \beta P_\pm,$$

则条件(3-72)称为**可许的**.

定理 37 设 $a_p(x) \in C^1(\Omega)$，$\gamma(x) \in C(\Omega)$，则

1° 正对称组在半许可边界条件下的古典解若存在，必为唯一的，且对 f 在 L_2 中为稳定的；

2° 对任一$f \in L_2$，即 f 的每个分量$f_j \in L_2(\Omega)$，正对称组 $Ku=f$ 在半许可条件(3-72)下有弱解 $u \in L_2$ 存在；

3° 任何一阶方程组在 L_2 中的强解与弱解重合一致.

4 非线性方程的奇性

4.1 分枝性和非唯一性

为说明问题，以下举常微分方程为例.

1° 杆在轴向压力下的欧拉问题：

$$y_{xx} + P_\rho y\sqrt{1-y_x^2} = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

这是一个比较典型的分枝问题，当 $P_\rho \leqslant \pi^2$ 时，问题只有一个零解 $y(x) \equiv 0$；当 $\pi^2(N+1)^2 \geqslant P_\rho > \pi^2 N^2$时，除零解外，上叙问题还有 N 个非零解$y = Y_n(x)(n=1,2,$

$\cdots,N)$. 函数 $Y_n(x)$在区间$[0,\frac{1}{2n}]$中满足

$$\frac{P_\rho}{2}x=\int_0^{Y_n(x)}\frac{d\xi}{\sqrt{(\gamma_n^2-\xi^2)(\bar{\gamma}_n^2-\xi^2)}},$$

其中, $\gamma_n=\frac{2}{\sqrt{P_\rho}}\sin\alpha_n,\bar{\gamma}_n=\frac{2}{\sqrt{P_\rho}}\cos\alpha_n$,而 α_n 是方程

$$\frac{\sqrt{P_\rho}}{2n}=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha z^2)}}$$

的根($n=1,2,\cdots,N$)(等式右边是完全椭圆积分). 每个非零解 $y=Y_n(x)$在区间$[0,1]$其余部分上只是在$[0,\frac{1}{2n}]$部分的正反重复表示而已.

2° 边值问题

$$u_{tt}+2u^3=0,\quad u(0)=u(A)=0,$$

除零解 $u\equiv0$外,还有可列无穷个不同的解 $u_k(t)$,当 $k\to\infty$时$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant A}|u_k(t)|\to\infty$. 事实上,这个问题的过(0,0)的解 $u(t)$应满足关系

$$t=\int_0^u[c^4-s^4]^{-\frac{1}{2}}ds,$$

故 u 为周期函数(椭圆函数),而在$[-c,c]$间变化,其周期为

$$T=\frac{2}{c}\int_{-1}^1(1-u^4)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{2}{c}\beta.$$

为使 $u(A)=0$,须取 $T=A/k,k=1,2,\cdots$. 故当 $c=\frac{2k}{A}\beta(k=1,2,\cdots)$时,问题除零解($u\equiv0$)外,还有可列个解 $u_k(t)$. 它们都是零解的分枝解(在 $u(0)=0$ 及 $u(A)=0$ 处分枝).

4.2 局部性和多值性

例如初值问题

$$u_t+uu_x=0,\quad u(x,0)=-\text{th}\frac{x}{2\epsilon}$$

的光滑解只当$0\leqslant t<2\epsilon$ 时局部存在. 事实上,对任一实数 x_0,过点$(x_0,0,-\text{th}\frac{x_0}{2\epsilon})$的特征线和过点$(-x_0,0,-\text{th}\frac{-x_0}{2\epsilon})$的特征线在$(x,t)$平面上的投影交于点 P:$(0,x_0/\text{th}\frac{x_0}{2\epsilon})$,且解 u 在点 P 有两个值(多值性):由过 P 的两条特征线得来的两个不同的值$\mp\text{th}\frac{x_0}{2\epsilon}$. 当 $x_0\to0$ 时, P 趋于点$(0,2\epsilon)$. 故单值的光滑解仅当$0\leqslant t<2\epsilon$ 时局部存在;而当 $t\geqslant2\epsilon$ 时,由于多值性而出现间断.

4.3 奇性和无界性

例如纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程的边值问题

$$u_{tt} + uu_t = 0, \quad u(0) = u(A) = 0,$$

除零解 $u \equiv 0$ 外,不存在无奇性的解.事实上,容易求出方程的通解为

$$u(t) = B(e^{Bt+C} - 1)/(e^{Bt+C} + 1),$$

B, C 为积分常数.为使 $u(0) = 0$,须取 $C = 0$,为使 $u(A) = 0$,须取 $B = -\infty$.故 u 无界而有奇性;且这种情况对任何 $A > 0$ 都存在.

4.4 参数的临界作用

例 1 $u_{tt} + \frac{1}{2}\lambda e^u = 0, u(0) = u(1) = 0.$

当 λ 大于某一临界值 $\lambda_0 > 0$ 时,无光滑解,当 $\lambda = \lambda_0$ 时,有唯一的光滑解,而当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时有两个光滑解.事实上,由方程积分一次知:过(0,0)的解应满足关系

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^u (c - e^s)^{-\frac{1}{2}} ds, \quad C = 1 + \frac{1}{\lambda} u_t^2(0).$$

这表明曲线 $u = u(t)$ 在某点 $t = t_1$ 达到最大值 $u(t_1) = \ln c$.因曲线关于 $t = t_1$ 对称,可要求

$$1 = 2t_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\ln C} \frac{ds}{(C - e^s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_1^C \frac{d\gamma}{\gamma \sqrt{C - \gamma}}, \gamma = e^s.$$

经简单的计算得

$$C = \operatorname{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c\lambda}}{4}\right).$$

讨论这个超越方程有无大于 1 的根 C,即可得到关于 λ 的结论.

4.5 非线性增长率与空间维数的关系

方程

$$\Delta u - u + |u|^\sigma u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \sigma > 0. \tag{4-1}$$

当 $\sigma \geqslant \frac{4}{n-2}$ 时,除 $u \equiv 0$ 外没有具下列性质的光滑解

$$|u| \to 0, \quad 当 |x| \to \infty 时. \tag{4-2}$$

为此证方程

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad n > 2. \tag{4-3}$$

若有满足性质(4-2)的解 u,则满足关系

$$\frac{2n}{n-2} \int_{\mathbf{R}^n} F(n) d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbf{R}^n} uf(u) d\boldsymbol{x}, F(u) = \int_0^u f(s) ds. \tag{4-4}$$

注意(4-3)式是泛函

$$J(u)=\int_{\mathbf{R}^n}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-F(u)\right]\mathrm{d}x$$

的变分问题的欧拉方程,故应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(u(\lambda x))\bigg|_{\lambda=1}=0,$$

即

$$-\frac{n-2}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+n\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\mathrm{d}x=0. \tag{4-5}$$

另一方面,以 u 乘(4-3)式,再分部积分得

$$\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}uf(u)\mathrm{d}x.$$

结合(4-5)式,得(4-4)式.现在利用(4-4)式去证明,方程(4-1)式没有具性质(4-2)式的光滑的非平凡解.若 u 为这种解,则因这时

$$f(u)=-u+|u|^\sigma u,$$

$$F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s=-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{\sigma+2}|u|^\sigma u^2.$$

于是由(4-4)式有

$$\left(\frac{2n}{n-2}-1\right)\int_{\mathbf{R}^n}u^2\mathrm{d}x=\left[\frac{2n}{(n-2)(2+\sigma)}-1\right]\int_{\mathbf{R}^n}|u|^\sigma u^2\mathrm{d}x.$$

为使 $u\neq 0$,应有 $2n>(n-2)(\sigma+2)$,即 $\sigma<\frac{4}{n-2}$.

4.6 在无限远处的衰减加强

非线性方程(4-1)还有一个特性,即解的衰减程度上的加强.事实上,设 $u(x)$ 为方程(4-1)的一个解,则它可看作线性方程

$$\Delta u-u+p(x)u=0,\quad p=|u|^\sigma$$

的具有性质(4-2)的解,这里 $p(x)$ 具有性质:

$$\lim_{|x|\to\infty}p(x)=0.$$

由线性椭圆型方程的讨论知,应有 $u(x)=O(|x|^{-\beta})$,β 为某正数,大于 σ.重复这种讨论,知对某 $\gamma>0$,有

$$u=O(\mathrm{e}^{-\gamma|x|}).$$

4.7 对称的原因不一定产生对称的结果

一个弹性薄圆板,沿边界夹紧,施以较强的轴对称压力,可以观察到不对称的稳定的平衡状态.这个弹性问题的理论分析归结为非线性椭圆型方程组的边值问题:

$$\Delta^2 F = \frac{-1}{2}[W, W];$$

$$\varepsilon^2 \Delta^2 W = [F, W], [f, g] = f_{yy}g_{xx} + f_{xx}g_{yy} - 2f_{xy}g_{xy};$$

$$\partial^\alpha F|_{\partial\Omega} = \lambda\psi_\alpha, \partial^\alpha W|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leqslant 1.$$

这里$\partial\Omega$ 为圆板的边界，ε^2 表示板的厚度，F 为应力函数，W 为板的中心面偏离平衡位置的铅直挠度(位移).

5 某些初等解法

由于非线性偏微分方程的高度复杂性，不存在一般的理论和解法. 这里及以后，只提到一些个别的结果.

5.1 基尔霍夫变换

考虑拟线性方程

$$\operatorname{div}[k(u)\operatorname{grad}u] \equiv \nabla \cdot [k(u)\nabla u] = 0. \tag{5-1}$$

尝试选择函数 $v = v(u)$，使(5-1)式线性化. 由

$$\nabla v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\nabla u$$

与(5-1)式比较，可看出应选择

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = k(u) \quad 或 \quad v = \int_a^u k(s)\mathrm{d}s, \tag{5-2}$$

其中 a 是任一固定实数. 于是(5-1)式化为方程

$$\Delta v = 0. \tag{5-3}$$

变换(5-2)称为基尔霍夫(Kirchhoff)变换. 在定解问题情形，还须对边界条件作相应的变换.

5.2 柯尔-霍夫变换

伯格斯(Burgers)方程

$$u_t + uu_x = \lambda u_{xx} \tag{5-4}$$

经代换 $u = v_x$，可化为方程

$$v_t + \frac{1}{2}v_x^2 = \lambda v_{xx}. \tag{5-5}$$

再令

$$v = -2\lambda \ln w, \tag{5-6}$$

可化(5-5)式为线性扩散方程

$$w_t = \lambda w_{xx}. \tag{5-7}$$

变换

$$u = v_x = (-2\lambda \ln w)_x \tag{5-8}$$

称为柯尔-霍夫变换.类似地,在高维及方程组情形,变换

$$\boldsymbol{u} = -2\gamma \nabla \ln w, \tag{5-9}$$

可将纳维-斯托克斯方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i, \quad i = 1,2,3 \tag{5-10}$$

化为线性方程

$$w_t = \nu \Delta w. \tag{5-11}$$

5.3 相似变换

例如对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{5-12}$$

尝试求如下形式的解

$$u = u(\eta), \quad \eta = x^\alpha t^\beta, \tag{5-13}$$

其中常数 α,β 待定,以便使(5-12)式能化成不显含 x,t 的常微分方程.变换(5-13)称为相似变换.计算导数:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta x^\alpha t^{\beta-1} u'(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} t^\beta u'(\eta);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}t^\beta D(u)u' + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)}t^{2\beta}(D(u)u')',$$

代入(5-12)式得

$$\beta x^\alpha t^{\beta-1} u' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}t^\beta D(u)u' + \alpha^2 x^{2(\alpha-1)}t^{2\beta}(D(u)u')'$$

或

$$\beta \frac{x^2}{t}\eta u' = \alpha(\alpha-1)\eta D(u)u' + \alpha^2\eta^2(D(u)u')', \tag{5-14}$$

为使方程不显含 x 和 t,须令

$$\frac{x^2}{t} = f(\eta). \tag{5-15}$$

由此可确定 α 和 β 的值.例如取 $f(\eta)=\eta$ 时,$\alpha=2,\beta=-1$;取 $f(\eta)=\eta^2$ 时,$\alpha=1$,$\beta=-\frac{1}{2}$.后一选择更为有利,因为这时(5-14)式右边第一项为零.变换

$$\eta = x/\sqrt{t} \tag{5-16}$$

特别称为波耳兹曼(Boltzmann)变换.它化方程(5-12)为常微分方程

$$\frac{d}{d\eta}\left[D(u)\frac{du}{d\eta}\right] + \frac{\eta}{2}\frac{du}{d\eta} = 0. \tag{5-17}$$

5.4 行　波　解

尝试求方程

$$u_t = (u^n u_x)_x \tag{5-17}$$

的行波解 $u = f(\xi)$

$$\xi = x + at. \tag{5-18}$$

计算导数 $u_t = af'$, $u_x = f'$,代入(5-17)式得常微分方程

$$af' = (f^n f')'.$$

积分一次并取积分常数为零,得 $f' = af/f^n$,再积分一次得

$$u = f(\xi) = \{n[a(x+at)+A]\}^{\frac{1}{n}}, \tag{5-19}$$

其中 A 为积分常数.

和相似变换一样,求行波解对大量方程都是可尝试的;也可用于高阶、高维情形,附加适当修订.例如对高维情形

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) = \nu(u_{xx} + u_{yy})$$

可尝试求如下形式的行波解(广义行波解)

$$u = f(\xi),\quad \xi = t + g(x) + h(y),$$

而对待定函数 $g(x)$和 $h(y)$作有利选择.

5.5 速度图变换

考虑力学中经常遇到的一类方程组

$$\begin{cases} F_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + F_2\dfrac{\partial u}{\partial y} + F_3\dfrac{\partial v}{\partial x} + F_4\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ G_1\dfrac{\partial u}{\partial x} + G_2\dfrac{\partial u}{\partial y} + G_3\dfrac{\partial v}{\partial x} + G_4\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{5-20}$$

若 $F_j, G_j(j=1,2,\cdots,4)$都只是 u 和 v 的函数,则在使

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$$

的任一区域中,交换(x,y)与(u,v)的地位,可化(5-20)式为线性方程组.事实上,令

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v), \tag{5-21}$$

将上二式对 x 微分得

$$1 = x_u u_x + x_v v_x,\quad 0 = y_u u_x + y_v v_x.$$

由此解出

$$u_x = Jy_v,\quad v_x = -Jy_u.$$

同样可得

$$u_y = -Jx_v,\quad v_y = Jx_u.$$

将其代入(5-20)式,得到关于 $x(u,v)$, $y(u,v)$的线性方程组

$$\begin{cases} F_1 y_v - F_2 x_v - F_3 y_u + F_4 x_u = 0; \\ G_1 y_v - G_2 x_v - G_3 y_u + G_4 x_u = 0. \end{cases} \tag{5-22}$$

在力学问题中,由于(u,v)为速度向量,因而变换(5-21)表示速度在(x,y)平面上的图形,故变换(5-21)称为**速度图变换**.

5.6 逆散射方法

初值问题

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, t > 0, x \in \mathbf{R}; \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5-23}$$

尝试取

$$u = \frac{\psi_{xx}}{\psi} + \mu^2, \tag{5-24}$$

将其代入(5-23)式中方程,并要求$\frac{d\mu^2}{dt} = 0$,得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi Q_x - \psi_x Q) = 0, \quad Q \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \mu^2)\psi_x.$$

由此积分,取积分常数为零,可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi Q_x - \psi_x Q) = 0.$$

再积分一次得

$$Q \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \mu^2)\psi_x = c\psi. \tag{5-25}$$

改写(5-24)式为

$$\psi_{xx} + (\mu^2 - u)\psi = 0, \tag{5-26}$$

故方程(5-23)的解 $u(x,t)$是方程(5-26)中的散射位势,t 作为参数.若要求 $u \in L_1$,且当$|x| \to \infty$时 $u \to 0$,则(5-26)式当 $\mu^2 < 0$ 时具离散谱(固有值集),当 $\mu^2 > 0$ 时具连续谱.现在限定(5-26)式的解如下

$$\psi \sim e^{i\mu x}(x \to \infty), \quad \text{Im}\mu > 0. \tag{5-27}$$

将其代入(5-25)式得 $C = -4i\mu^3$,于是

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \mu^2)\psi_x + 4i\mu^3\psi = 0. \tag{5-28}$$

这就是(5-26)式的固有函数随 t 变化的规律.我们希望由(5-26)式当 $u = u_0(x)$时的固有值问题的解,特别是由来自 $x = +\infty$的入射波的反射系数及离散谱的分布,来确定散射位势 $u(x,t)$.这就是逆散射方法.下面只列叙结果,略去推导和证明.由(5-26)式当 $u = u_0(x)$求具有如下性质的解

$$\psi(x,k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + \beta(k)e^{ikx}, & x \to \infty, \\ \alpha(k)e^{-ikx}, & x \to -\infty, \end{cases} \qquad k > 0, \mu = ik,$$

由此确定**反射系数** $\beta(k)$及**传输系数** $\alpha(k)$,于是

$$u(x,t)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x,t), \tag{5-29}$$

其中 K 满足线性积分方程

$$\begin{cases} K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty}B(z+y,t)K(x,z,t)\mathrm{d}z=0, y>x; \\ B(x+y,t)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j(t)\mathrm{e}^{-k_j(x+y)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+y)}\mathrm{d}k, \end{cases} \tag{5-30}$$

$\mu_j=\mathrm{i}k_j$ 为离散的固有值，$\psi_j(x)$为相应固有函数，再由(5-28)式及初值 $\psi_j(x,0)=\psi_j(x)$确定 $\psi_j(x,t)$. 于是有

$$c_j(t)=\mathrm{e}^{8ik_j^3t}\Big/\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_j^2(x)|\mathrm{d}x=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_j(x,t)|^2\mathrm{d}x\right\}^{-1},$$

$$\beta(k,t)=\beta(k)\mathrm{e}^{8ik^3t}.$$

例 1

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}-A, & |x|\leqslant\frac{l}{2}; \\ 0, & |x|>\frac{l}{2},\end{cases}$$

$u(x,0)$是宽 l、深 A 的位阱. 这时(5-26)的固有值应满足超越方程

$$\sin\mu=\pm\frac{2\mu}{s}, S=\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,0)|^2\mathrm{d}x=A^2l, \tan\mu>0,$$

其中 $\mu=\frac{S}{2}\sqrt{1-K^2/A}$或 $\cos\mu=\pm\frac{2\mu}{S}$, $\tan\mu>0$;因有值个数由参数 S 界定，当 S 增加时，孤波解 u 的个数增加. 一般，孤波数 N 与 S 有关系

$$N=\left[\frac{S}{\pi}+1\right].$$

5.7　贝克龙德变换

正弦戈登方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u. \tag{5-31}$$

作贝克龙德变换(对应于(5-31)式)

$$\begin{cases} v_\xi=u_\xi+2a\sin\frac{u+v}{2}, \\ v_\eta=-u_\eta+\frac{2}{a}\sin\frac{v-u}{2}, \end{cases} \quad a\in\mathbf{R}, a\neq0, \tag{5-32}$$

计算二阶混合导数:

$$v_{\xi\eta}=u_{\xi\eta}+a(v_\eta+u_\eta)\cos\frac{v+u}{2}=u_{\xi\eta}+2\sin\frac{v-u}{2}\cos\frac{v+u}{2};$$

$$v_{\eta\xi}=-u_{\xi\eta}+\frac{1}{a}(v_\xi-u_\xi)\cos\frac{v-u}{2}=-u_{\xi\eta}+2\sin\frac{v+u}{2}\cos\frac{v-u}{2},$$

上二式当 $u_{\xi\eta}=\sin u$ 时一致. 把上二式相加得

$$v_{\xi\eta}=\sin v.$$

故可利用(5-32)式由已知解 u 求出新解 v. $u\equiv 0$ 是(5-31)式的解,故将它代入(5-32)式得 v 的方程:

$$v_\eta=2a\sin\frac{v}{2},\quad v_\xi=\frac{2}{a}\sin\frac{v}{2}.$$

上面已核验这两个方程是相容的. 由此容易解出 v 的孤波:

$$v=4\arctan Ce^{a\eta+\frac{\xi}{a}}.$$

代 v 为(5-32)式中的 u,可求得(5-31)式的又一个解(若能简便解出);如此递推.

注 1 关于一般方程的贝克龙德变换,情况比较复杂,较少实用性,所以这里不作介绍,详见文献[4].

6 某些非线性方程的准确解

下面列举一些方程的准确解,有些是含任意的光滑实值函数的通解,有些是含任意常数 $a,b,\cdots$ 的全解,有些是含任意常数及任意函数的解,有些以显式给出,有些以隐函数形式确定.

(1) $u_{xy}+uu_x=0,\ u=\dfrac{2\psi'(y)}{\varphi(x)+\psi(y)}-\psi''(y)/\psi'(y).$

(2) $u_{xy}+e^u=0,\ e^u=-2\varphi'(x)\psi'(y)/[\varphi(x)+\psi(y)]^2.$

(3) $u_{xx}+u_{yy}+\lambda^2he^{2hu}=0,\ \lambda^2h^2e^{2hu}[1+\varphi^2(x,y)+\psi^2(x,y)]^2=\varphi_x^2+\varphi_y^2,$
刘维尔(Liouville)方程 $\varphi+i\psi=F(x+iy)$ 为解析函数.

(4) $u_{xy}+(g(x)e^u)_x=0,\ e^u=\psi'(y)/[\varphi(x)+g(x)\psi(y)].$

(5) $u_{xy}+(He^u)_x=0,$

$$e^u=\frac{\partial}{\partial y}\{H(\psi'(y)+\rho\psi)\}/\{H\varphi(x)+H^2(\psi'(y)+\rho\psi)\},$$

$$H=g(x)Q(y)+h(x)b(y),\ \rho=\frac{\partial}{\partial y}\{\ln\frac{a'b-ab'}{H}\}.$$

(6) $u_{xy}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha e^u)-\dfrac{\partial}{\partial y}(\beta e^{-u})=0,\ \alpha=\dfrac{\rho'(x)}{\rho(x)+\sigma(y)}\cdot\dfrac{h(x)}{k(y)},$

$$\beta=\frac{\sigma'(y)}{\rho(x)+\sigma(y)}\frac{k(y)}{h(x)},$$

$$e^u=\frac{\psi'(y)+\beta\varphi(x)+\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\psi}{\varphi'(x)+\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\varphi+\alpha\psi(y)}.$$

(7) $u_{xy}^2=4\lambda(x,y)u_xu_y,\ u=\displaystyle\int v^2dx+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2dy,$

v 为方程 $v_{xy}-\dfrac{1}{2\lambda}\lambda_{xy}v-\lambda v=0$ 的解.

(8) $u_y u_{xx} - u_x u_{xy} = 0, u = \varphi(x + \psi(y))$.

(9) $u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = 0, u = \varphi(y + \psi(x))$.

(10) $u_{xy} + (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 0, u = \xi\eta + \xi\varphi'(\xi) + \eta\psi'(\eta) - \varphi(\xi) - \psi(\eta)$,
$x = \varphi'(\xi) + \eta, y = \psi'(\eta) + \xi$.

(11) $u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = u_y^3, y + xu = \varphi(u) + \psi(x)$.

(12) $u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} = 0, y + x\varphi(u) = \psi(u)$.

(13) $u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} = u_x u_y^2, y = e^x\varphi(u) + \psi(u)$.

(14) $u_y(1 + u_y)u_{xx} - (1 + 2u_y)(1 + u_x)u_{xy} + (1 + u_x)^2 u_{yy} = 0$,
$x = \varphi(x + y + u) + \psi(x + u)$.

(15) $u_y u_{xx} - (1 + u_x + u_y)u_{xy} + (1 + u_x)u_{yy} = 0$,
$u = \varphi(x + u) + \psi(x + y)$.

(16) $(b + u_y)^2 u_{xx} - 2(a + u_x)(b + u_y)u_{xy} + (a + u_x)^2 u_{yy} = 0$,
$u = x\varphi(ax + by + u) + \psi(ax + by + u)$.

(17) $(e^x - 1)(u_y u_{xx} - u_x u_{xy}) = u_x u e^x$,
$u = \varphi[x - e^x - \psi(y)]$.

(18) $u_y(1 + u_y)u_{xx} - (1 + u_x + u_y + 2u_x u_y)u_{xy} + u_x(1 + u_x)u_{yy} = 0$,
$u = \varphi(x + u) + \psi(y + u)$.

(19) $(u_{xx} - u_x u_{yy})^2 = u_y^2 u_{xx} u_{yy}$,

$$u = \frac{1}{3}(2\eta - \xi^3)\varphi'(\eta) + \int \psi'(\xi)\xi^4 d\xi - \frac{2}{3}\varphi(\eta),$$

$$x = \frac{1}{\xi}\varphi'(\eta) + \psi(\xi), y = \xi\varphi'(\eta) - \int \xi^2\psi'(\xi)d\xi.$$

(20) $(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$　(极小曲面方程),

$$u = i\int \{1 + \psi'^2(\xi)\}^{1/2}d\xi + i\int \{1 + \varphi'^2(\eta)\}^{1/2}d\eta \quad \text{(Monge)},$$

$x = \xi + \eta, y = \psi(\xi) + \varphi(\eta)$.

(21) $u_{xx} + u_x u_{yy} - u_y u_{xy} = 0$,
$u = \xi^2\psi''(\xi) - 2\xi\psi'(\xi) + 2\psi(\xi) + \eta^2\varphi''(\eta) - 2\eta\varphi'(\eta) + 2\varphi(\eta)$,
$-x = \psi''(\xi) + \varphi''(\eta), -y = \xi\psi'' - \psi' + \eta\varphi'' - \varphi'$.

(22) $(u_y + yu_{yy})(1 + u_{xx}) = (yu_{xy} - u_x - x)u_x$,

$$u = \xi x - \frac{x^2}{2} + \varphi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right),$$

ξ 满足方程：$x + \varphi'(\xi) - \frac{1}{y}\psi'(\xi/y) = 0$.

(23) $(u_y u_{xy} - u_x u_{yy})u = u_x u_y^2, y = \varphi(u) + u\psi(x)$.

(24) $xu_y u_{xx} - (x + y)u_{xy} + yu_x u_{yy} + xy(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 1 - u_x u_y$,

$$u = a\ln x + bx + \frac{1}{b}y + \varphi(xby).$$

(25) $5u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 4(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 6$,
$8u = 5x^2 - 2xy + 5y^2 + 2ax + \varphi(y + bx)$.

(26) $yu_{xx}-u_xu_{xy}+u_{yy}+y(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)=-1$,

$$6a^2u=2y^3-3a^2y^2+6axy+6by+\varphi\left(ax+\frac{1}{2}y^2\right).$$

(27) $u_{xx}-u_{tt}=\sin u$(正弦 Gordon 方程),

$$x-at=\sqrt{1-a^2}\int_0^u\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(b-\cos u)}}.$$

(28)(立方 Schrödinger 方程)

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+v|u|^2u=0,$$

$$u=\exp\left[\mathrm{i}\frac{a}{2}x-\mathrm{i}\left(\frac{a^2}{4}-b\right)t\right]\sqrt{\frac{2b}{v}}\operatorname{sech}\sqrt{b}(x-at).$$

(29) $u_t+uu_x+u_{xxx}=0$ (Kdv 方程),

$$u=b\operatorname{Sech}^2\frac{x-at}{2\sqrt{a}}+C.$$

7 非线性问题的某些结果及应用

7.1 非线性弹性翘曲问题

定理 1 弹性薄板翘曲问题

$$\begin{cases}\Delta^2F=-\frac{1}{2}[w,w];\\ \epsilon^2\Delta^2w=[F+\lambda F_0,w];\quad (x,y)\in\Omega,\\ [f,g]\equiv f_{xx}g_{yy}+f_{yy}g_{xx}-2f_{xy}g_{xy};\\ w=w_x=w_y=F=F_x=F_y=0,沿\partial\Omega.\end{cases}\tag{7-1}$$

其中,$F+\lambda F_0$ 为应力函数,F_0 给定,w 为板的中心面偏离平衡状态的铅直位移(挠度),Ω 为平面的有界域.对问题(7-1)及相关的固有值问题

$$\begin{cases}w=\lambda Lw,\ Lw\equiv[F_0,w],(x,y)\in\Omega;\\ w=w_x=w_y=0,沿\partial\Omega,\end{cases}\tag{7-2}$$

则有下列结论.

1° 设 λ_n 为(7-2)式的一个固有值,则 $(0,\lambda_n)$ 即 $w=0$, $F=\lambda_nF_0$ 为非线性问题(7-1)的一个分支点,而存在 ϵ 的解析函数族 $(w_\epsilon,F_\epsilon,\lambda_\epsilon)$:

$$w_\epsilon=\sum_{j=1}^{\infty}w_j\epsilon^j,\quad F_\epsilon=\sum_{j=1}^{\infty}F_j\epsilon^j,\quad \lambda_\epsilon=\lambda_n+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\epsilon^j,$$

其中 w_1 为(7-2)式的对应于 $\lambda=\lambda_n$ 的一个解.当 λ_n 为 m 重固有值时,则存在 m 族分支解

$$(w_\epsilon^{(j)},F_\epsilon^{(j)},\lambda_\epsilon^{(j)}),\quad j=1,2,\cdots,m.$$

2° 问题(7-1)对于 $\lambda\in(\lambda_{-1},\lambda_1)$ 时无解,这里 λ_{-1} 及 λ_1 分别是问题(7-2)的绝

对值最小的负及正固有值.

3° 在 $w=0,\lambda=\lambda_N$ 附近,非线性问题(7-1)当 $\lambda_N>0$ 时对 $\lambda\leqslant\lambda_N$ 无解;当 $\lambda_N<0$ 时对 $\lambda\geqslant\lambda_N$ 无解.

定理 2 弹性薄壳翘曲问题

$$\begin{cases}\Delta^2 F=-\dfrac{1}{2}[w,w]-(k_1w_x)_x-(k_2w_y)_y;\\ \Delta^2 w=[F+\lambda F_0,w]+(k_1F_x)_x+(k_2F_y)_y; \quad (x,y)\in\Omega,\\ w=w_x=w_y=F=F_x=F_y=0,\text{沿}\partial\Omega,\end{cases}\tag{7-3}$$

其中 k_1 及 k_2 为壳在平衡状态时分别与平面 (x,z) 及 (y,z) 的截线的曲率. 对于与(7-3)相关联的固有值问题:

$$\begin{cases}w+L_1w=\lambda Lw, \quad (x,y)\in\Omega;\\ w=w_x=w_y=0, \quad \text{沿}\partial\Omega;\\ L_1w\equiv-(k_1w_x)_x-(k_2w_y)_y, Lw=[F_0,w],\end{cases}\tag{7-4}$$

则有下列结论.

1° 设 λ_N 为问题(7-4)的一个固有值,则 $(0,\lambda_N)$ 即 $w=0,F=\lambda_N F_0$ 为问题(7-3)的一个分支点,对小的 $\varepsilon>0$,存在解析函数族 $\{W_\varepsilon^{(N)},F_\varepsilon^{(N)},\lambda_\varepsilon^{(N)}\}$:

$$W_\varepsilon^{(N)}=\varepsilon w_N(x,y)+O(\varepsilon^2);$$
$$F_\varepsilon^N=O(\varepsilon^2); \quad \lambda_\varepsilon^{(N)}=\lambda_N+O(\varepsilon),$$

其中 W_N 为(7-4)式对应于 λ_n 的归一化固有函数.

2° 平凡解 $(w,\lambda)=(0,\lambda)$ 当 $0<\lambda\leqslant\lambda_0^+$ 时使位能达到绝对极小值,这里 λ_0^+ 为方程 $w=\lambda Lw$ 的最小正固有值,平凡解 $(0,\lambda)$ 一般不能使位能达到绝对极小值,而只能取到相对极小值,这里 λ_1 为问题(7-4)的最小正固有值.

7.2 纳维-斯托克斯方程的定常流

定理 3 粘性流体的定常问题

$$\begin{cases}\upsilon\Delta u=(u\cdot\nabla)u+\nabla p+f;\\ \operatorname{div}u=0;\\ u\,|_{\partial\Omega}=a, x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n, n=2,3.\end{cases}\tag{7-5}$$

未知函数是速度向量 u 及压强 p. 设 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 为光滑的旋转面,但不含旋转轴 O_z 上的点,则存在向量 f 及 a,使问题(7-5)的轴对称定常解不是唯一的.

定理 4 在以 z 轴为中心轴的无限长二同心圆柱面 $r=r_1,r=r_2(r_1<r_2)$ 间,若 $w_2r_2^2<w_1r_1^2$,这里 w_1 及 w_2 分别是圆柱面 $r=r_1$ 及 $r=r_2$ 的旋转角速率,则问题(7-5)有关于 Z 具周期性的解.

7.3 奇摄动情形

定理 5 有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的边值问题

$$\begin{cases}\epsilon^2\Delta u + u - g^2(x)u^3 = 0, g > 0, x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}\tag{7-6}$$

对充分小的 $\epsilon>0$ 有唯一的光滑正解 $u(x,\epsilon)>0$，当 $\epsilon\to0$ 时，在边界$\partial\Omega$ 的具宽度 $O(\epsilon)$的边界层外趋于$\frac{1}{g(x)}$.

定理 6 设有界区域 Ω 中的边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2F = -\frac{1}{2}[w,w], \epsilon^2\Delta^2 w = [w,F]+g, (x,y)\in\Omega;\\ D^\alpha w|_{\partial\Omega} = 0, 0\leqslant|\alpha|\leqslant1; F_{\tau\tau}|_{\partial\Omega} = T, F_{\tau\eta}|_{\partial\Omega} = S.\end{cases}\tag{7-7}$$

当 $\epsilon=0,\alpha=0$ 时有正解(w_0,F_0)：$w_0>0,\frac{\partial^2F_0}{\partial x^2}>0,[F_0,F_0]<0$，这里 τ 和 η 分别表示$\partial\Omega$ 上的切向和法向，则当 $\epsilon>0$ 充分小时，问题(7-7)有唯一一组正解(w_ϵ,F_ϵ)，在 Ω 中除$\partial\Omega$ 的近旁外，当 $\epsilon\to0$ 时，一致收敛于(w_0,F_0).

7.4 其他结果

定理 7 有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中的边值问题

$$-\Delta u = f(x,u),\quad u|_{\partial\Omega} = 0.\tag{7-8}$$

假定边界$\partial\Omega$ 光滑，f 满足下列条件：

1° f 在 $\overline{\Omega}\times\mathbf{R}$ 中局部利普希茨连续；

2° 存在常数 $c_1,c_2\geqslant0$ 及 $s<\frac{n+2}{n-2}$，使

$$|f(x,\xi)|\leqslant c_1+c_2|\xi|^s,\quad \forall(x,\xi)\in\overline{\Omega}\times\mathbf{R};$$

3° $f(x,\xi)=O(|\xi|),\xi\to0$；

4° 存在常数 $\mu>2$ 及 $r>0$，使

$$0<\mu\int_0^\xi f(x,\eta)\mathrm{d}\eta\leqslant\xi f(x,\xi),\quad |\xi|>r.$$

则问题(7-8)除零解 $u\equiv0$ 外，还有一个非平凡的古典解.

定理 8 设 Ω 如上.考虑问题

$$-\Delta u = \lambda f(u),\quad u|_{\partial\Omega} = 0,\tag{7-9}$$

假定 f 满足定理 7 中条件 1°、3°及条件：存在 $\xi_0>0$ 使在$(0,\xi_0)$中，$f(\xi)>0$，则对所有大的 $\lambda>0$，问题(7-9)除零解 $u\equiv0$ 外，至少还有两个不同的正解.

定理 9 不可压缩的粘性流体定常流动问题

$$\begin{cases}-\gamma\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p = g, x\in\Omega\subset\mathbf{R}^3;\\ \mathrm{div}u = 0;\\ u|_{\partial\Omega} = \beta(x), x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{7-10}$$

Ω 为有界域，$\partial\Omega$ 属 C^2 类，即$\partial\Omega$ 由 C^2 中函数给出参数表示.设 $g\in L_2(\Omega)$，$\beta(x)$为定义在 $\overline{\Omega}$ 上的函数 $\alpha(x)$的边值，且$\nabla\alpha$ 为赫尔德(Hölder)连续，并有下列二性质之一：

1° 或$|\alpha|$充分小，或$|\nabla\alpha|$充分小；

2° $\alpha = r_0 t\gamma(x)$，$\gamma\in C^1(\overline{\Omega})$，

则问题(7-10)在$L_2(\Omega)$中存在弱解(u,p). 若g在$\overline{\Omega}$上赫尔德连续，则这组弱解在Ω内以及$\partial\Omega$的充分光滑部分处为光滑函数.

定理10 有界域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$中的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^2 f(x,u), f\geqslant\beta>0(\text{当 } u\geqslant 0\text{ 时}); \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7-11}$$

若f对固定的x为u的非降函数，且当$u\geqslant 0$时，$f(x,u)\geqslant g(x)u$，则存在一个有限的临界值$\lambda_c>0$，使$\lambda<\lambda_c$时，问题(7-11)至少有一个正解$u>0$；而当$\lambda>\lambda_c$时，(7-11)无正解.

定理11 重力作用下的定常周期波问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x,y)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2; \\ \dfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + gy = \text{const}, \text{沿}\partial\Omega \end{cases} \tag{7-12}$$

有周期解存在，但尖锋顶的左右切线交角θ应满足

$$0<\theta<\frac{\pi}{b},$$

且波形关于过此尖点的铅垂轴对称，这种波当弗劳德(Froude)数$F=\dfrac{v^2}{lg}$相当大时不存在，这里v为流速，l为波长，g为重力加速度值.

定理12 给定边值问题

$$\begin{cases} \mathrm{L}u = \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(-1)^{\alpha}\partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\partial^{\beta}u) = -f(u)+g(x), x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n; \\ \partial^{\alpha}u|_{\partial\Omega} = 0, 0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1. \end{cases} \tag{7-13}$$

设f具有性质：

$$\lim_{s\to\pm\infty} f(s) = f(\pm\infty)<\infty,\quad f(-\infty)<f(s)<f(+\infty),$$

则问题(7-13)有解的充要条件是：对满足

$$\mathrm{L}v=0;\quad \partial^{\alpha}v|_{\partial\Omega}=0, |\alpha|\leqslant m-1,\quad \|v\|_{L_2}=1$$

的每个$v\in L_2(\Omega)$，有

$$\int_{\Omega} gv\,\mathrm{d}x < f(+\infty)\int_{v>0}|v|\,\mathrm{d}x - f(-\infty)\int_{v<0}|v|\,\mathrm{d}x. \tag{7-14}$$

定理13 用Ω记矩形$\{(x,y)|0<x<a,|y|<b\}$，设$f(\xi)$为定义于$[0,\infty)$的赫尔德连续非降函数，$f(0)=0$，且当$|\xi|\to\infty$时仅具幂增率：$f(\xi)=O(|\xi|^k)$，则定常涡流问题

$$\begin{cases} u_{rr} - \dfrac{1}{r}u_r + u_{zz} - \lambda r^2 f\left(u - \dfrac{1}{2}cr^2 - \lambda\right) = 0; \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{7-15}$$

对每个$\lambda\geqslant 0$有光滑解$u>0$，且u为z的偶函数.(7-15)式中的c为给定常数.

定理 14 设 $f(x,v^2)$ 满足下述条件之一：

1° 对所有实的 v，

$$0<f(x,v^2)\leqslant g(x)|v|^{\sigma},\quad 0<\sigma<\frac{4}{n-2},x\in\mathbf{R}^n,$$

其中 $g(x)$ 当 $|x|\to\infty$ 时趋于零；

2° $f(x,v^2)$ 与 x 无关，且

$$f(v^2)=g|v|^{\sigma},\quad \sigma<\frac{4}{n-2},$$

g 为正的常数，则方程

$$(\Delta-\beta)v+f(x,v^2)v=0,\beta>0 \tag{7-16}$$

有一解 $v\in L_2(\mathbf{R}^n)$.

注 1 利用这个定理，令 $u=e^{i\lambda t}v(x)$，得可解方程

$$u_{tt}=\Delta u-m^2u+f(x,|u|^2)u,\quad \beta=\lambda^2-m^2; \tag{7-17}$$

$$-iu_t=\Delta u+f(x,|u|^2)u,\quad \beta=\lambda. \tag{7-18}$$

定理 15 设方程(7-16)中的 f 取如下形式

$$f(x,v^2)=\sum_{j=1}^{K}g_j(x)|v|^{\sigma_j},\quad 0<\sigma_j<\frac{4}{n-2},\quad g_j\geqslant 0,$$

且 1° 当 $|x|\to\infty$ 时，$g_j(x)\to 0$，或 2° 每个 g_j 为常数，则方程(7-16)当 $k=1$ 时有可列无穷个不同的解，而当 $k>1$ 时，解仅有固有值因子的差异.

定理 16 记 (M,g) 为具有度量张量 $g=(g_{jk})$ 的二维紧黎曼流形，则方程

$$\Delta u-K(x)-e^{2u}=0 \tag{7-19}$$

有解的充要条件是

$$\int_M K(x)\mathrm{d}v_g<0. \tag{7-20}$$

这里 $\mathrm{d}v_g$ 是 M 关于度量 g 的面元.

定理 17 设在有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中给定具有充分光滑实系数的 $2m$ 阶椭圆方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases}\mathrm{L}u=\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\partial^{\beta}u)=f(x,u);\\ \partial^{\alpha}u|_{\partial\Omega}=0,0\leqslant|\alpha|\leqslant m-1.\end{cases} \tag{7-21}$$

若 $f(x,u)\in C^{0,1}(\Omega\times\mathbf{R})$，且对大的 $|u|$ 有

$$|f(x,u)|\leqslant C(1+|u|^{\sigma}),\quad 0<\sigma<\frac{n+2m}{n-2m},$$

则问题(7-21)的任一弱解 $u\in\mathring{H}^m(\Omega)$ 在 Ω 中及 $\partial\Omega$ 的充分光滑部分为古典解. 若 $\sigma>\frac{n+2m}{n-2m}$，则(7-21)式可有在 Ω 中不连续的弱解.

定理 18 给定如下的自由边界问题：求有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 及函数 $u(x,y)$，使

$$\begin{cases} -\Delta u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}, r^2=x^2+y^2,(x,y)\in\Omega; \\ u|_{\partial\Omega}=0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=-F\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}, \theta=\arctan\dfrac{y}{x}; \\ u(0)=\nu, 0=(0,0)\in\Omega, \end{cases} \tag{7-22}$$

其中 ν 为$\partial\Omega$ 的外法线方向，s 为$\partial\Omega$ 上弧长，ν 给定. 若 $F\in C^2(\mathbf{R}^2)$，并满足下列条件：

$$r^{-2}F(x,y)\in C^2(\mathbf{R}^2), \inf_{\mathbf{R}^2} r^{-2}F(x,y)>0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}\geqslant 0,(x,y)\in\mathbf{R}^2, F(0,0)=\frac{\partial F}{\partial r}(0,0)=0,$$

则存在域 Ω 及函数 $u\in W_\infty^2(\mathbf{R}^2)$，满足(7-22)式，但边界条件在普遍意义下成立.

定理 19　在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中给定边值问题

$$\begin{cases} Au\equiv-\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum\limits_{j=1}^n a_j(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}+a(x)u=f(x,u), x\in\Omega; \\ Bu\equiv\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+bu=g(x,u), x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{7-23}$$

其中 A 为 Ω 中一致强椭圆算子，$a_{ij}=a_{ji}\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$，$a_j\in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$，$a\in C^\alpha(\overline{\Omega})$，$\beta_j\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$为$\partial\Omega$ 上向量，与$\partial\Omega$ 不相切，$\dfrac{\partial u}{\partial\beta}=\sum\limits_{j=1}^n\beta_j(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$，$b\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$，若存在函数 m 及 r：

$$m\in C^2(\overline{\Omega}),\quad r\in \mathrm{Lip}(\partial\Omega),\quad m>0, r>0,$$

这里 $\mathrm{Lip}(\partial\Omega)$表示$\partial\Omega$ 上的利普希茨连续函数，且有 $\mu\geqslant 0$，使

$$a+\mu m>0,\quad b+\mu r>0, \tag{7-24}$$

则当对某 $\lambda<\lambda_0(m,r)$有

$$\begin{aligned} &f(x,\xi)-f(x,\eta)\leqslant\lambda(\xi-\eta); \\ &g(x,\xi)-g(x,\eta)\leqslant\lambda(\xi-\eta), \end{aligned}\quad \forall\,\xi,\eta\in\mathbf{R}, \eta<\xi \tag{7-25}$$

时，问题(7-23)恰有一个解.

定理 20　考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u(1-u)[u-a(x)],\quad t>0, x\in\mathbf{R}; \\ u(x,0)=\psi(x). \end{cases} \tag{7-26}$$

如果 $a'(x)\leqslant 0(\equiv 0)$，记

$$\limsup_{x\to+\infty} a(x)=a^+\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$\liminf_{x\to-\infty} a(x)=a^-\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

令 $\psi(x)$为与(7-26)式相关的定常问题

$$\begin{cases} u''+u(1-u)[u-a(x)]=0; \\ u(-\infty)=0, u(+\infty)=1 \end{cases} \tag{7-27}$$

的唯一解,假定

$$\liminf_{x\to\infty}\psi(x)>a^+,\quad \limsup_{x\to-\infty}\psi(x)<a^-,$$

则问题(7-26)的解有

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t;\psi)=\psi(x).$$

参 考 文 献

1 霍曼德尔.线性微分算子.北京:科学出版社,1980.

2 Oden J T, Reddy J N. An introduction to the mathematical theory of finite elements. New York: John Wiley and Sons, 1976.

3 Showalter R E. Hilbert space methods for partial differential equations. Pitman, 1977.

4 Ames W F. Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol 1, Vol Ⅱ. New York: Acad Press, 1972.

5 Berger M S. Nonlinearity and functional analysis. New York: Acad Press, 1977.

·近代数学卷·

第14篇

分支理论

编　者　李大华
审校者　雷晋干

目　录

引　言

自然科学和工程技术中的许多问题,常常需要用含有一个或多个参数的方程(组)描述.参数的变化标志着系统的构成部件或单元特征的变化,反应了环境的改变或系统的"老化"等等.而当参数变化到一定程度(达到临界值)时,常常引起系统的定性行为的改变.人们不仅要关心由于方程中参数的变化,从一个解变到多个解的分支(或分叉),还要关心在分支前后稳定性的改变.这种分支问题涉及固体力学、流体力学、天体物理、激光和等离子物理、生态学、化学反应以及经济社会系统等广泛的领域.分支现象就是复杂系统由于高度的非线性所呈现的共性.因此,分支问题的研究是广大科技工作者十分关注的课题.

分支理论已有很大的发展,其数学理论已逐渐成为一个独立的研究领域,并且还在不断地推动着数学基础理论的发展.本篇将介绍分支问题的若干基本理论及方法,并给出一些应用的例子.

1　问题的提法及例

1.1　分支点和分支解

1.1.1　基本解

考虑方程

$$F(\lambda, x) = 0, \tag{1-1}$$

其中 $F: \mathbf{R} \times X \to Z$ 是一个非线性连续映射, X 及 Z 是巴拿赫(Banach)空间, $\mathbf{R}$ 为全体实数之集合.称集合

$$F^{-1}(0) = \{(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times X \mid F(\lambda, x) = 0\}$$

为方程(1-1)的**解集**.如果存在一条已知的连续的简单曲线

$$\Gamma = \{(\lambda, x(\lambda)) \mid \lambda \in \mathbf{R}\},$$

它属于 $F^{-1}(0)$,则称 Γ 为方程(1-1)的一个**基本解**.

1.1.2　分支点和分支解

设 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$.如果在 $(\lambda_0, x(\lambda_0))$ 的每一个邻域内都存在一个不在 Γ 上的解 (λ, x),则称 λ_0 为方程(1-1)关于基本解 Γ 的**分支点**(有时亦称 $(\lambda_0, x(\lambda_0))$ 为分支点),而解 (λ, x) 则称为方程(1-1)在 λ_0 处发自 Γ 的**分支解**.

分支理论的基本问题有:

1° 对于给定的 λ 值，方程(1-1)是否有解；

2° 如果有解，有多少个解；

3° 解的个数如何随 λ 的变化而变化；

4° 在分支点附近，解集 $F^{-1}(0)$ 的结构与性态如何，分支解稳定否？

1.2　例

例 1　设有映射 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 定义为

$$f_1(x_1,x_2)=16x_1+12x_1^3+24x_1x_2^2=\lambda x_1,$$
$$f_2(x_1,x_2)=12x_2+9x_2^3+18x_1^2x_2=\lambda x_2.$$

考察非线性方程 $f(x)=\lambda x$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$ 是参数，$x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$. 由计算知，当 $12<\lambda<16$ 时，$f(x)=\lambda x$ 有非平凡解

$$x_1=0,\quad x_2^2=\frac{1}{9}(\lambda-12);$$

当 $\lambda>16$ 时，有非平凡解

$$x_1^2=\frac{1}{12}(\lambda-16),\quad x_2=0.$$

它们都是从平凡解 $(x_1,x_2)=(0,0)$ 分支出来的. 而当 $\lambda>24$ 时，方程 $f(x)=\lambda x$ 还有非平凡解

$$x_1^2=\frac{1}{108}(5\lambda-48),\quad x_2^2=\frac{1}{54}(\lambda-24).$$

它不是从平凡解分支出来的，而是从 $\lambda>16$ 的那一枝解分支出来的(见图 1-1). 这种现象称为二级分支.

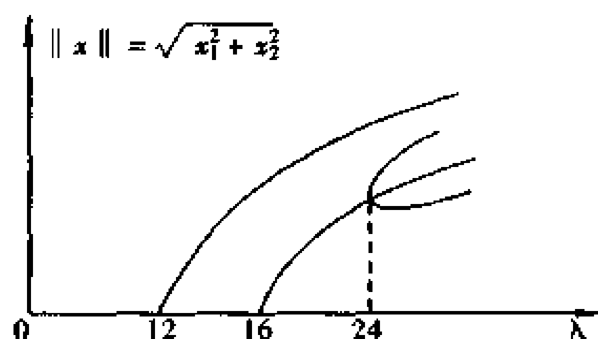


图 1-1

例 2　欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)杆.

图 1-2 表示一根长为 l 的弹性不可拉伸细杆，左端固定铰支，右端活动铰支，即它可以自由地沿着 x 轴移动. 用 s 表示杆的弧长，$\varphi(s)$ 表示杆上单位切向量与 x 轴的夹角. 设曲率与力矩成正比，则杆的形状变化由方程

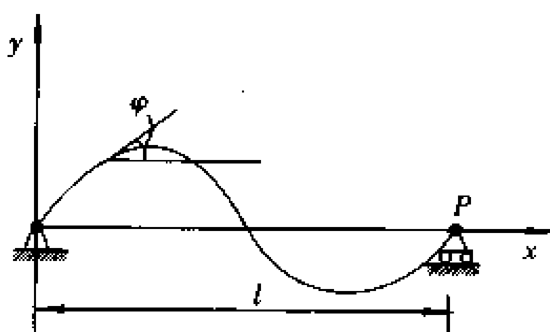


图 1-2

$$\begin{cases} Py = -k\dfrac{d\varphi}{ds}; \\ \dfrac{dy}{ds} = \sin\varphi \end{cases} \tag{1-2}$$

刻划，其中 P 是轴向外力，k 是常数. 边界条件为

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{1-3}$$

当 $P\neq 0$ 时，由方程(1-2)及边界条件(1-3)可导出问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda\sin\varphi = 0, \lambda = \dfrac{P}{k}, \\ \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0. \end{cases} \tag{1-4}$$

设 $C^k[0,l] \overset{\text{def}}{=\!=} \{f:[0,l]\to\mathbf{R} \mid f$ 及其直到 k 阶导数皆连续$\}$（此处符号 $\overset{\text{def}}{=\!=}$ 表示定义，以下同）. 对于任意的 $f\in C^k[0,l]$，引进范数

$$|f|_k = \max\{\sup(|f^{(j)}(s)|) \mid 0\leqslant s\leqslant l, j = 0,1,\cdots,k\}.$$

设 $X \overset{\text{def}}{=\!=} \{f\in C^2[0,l] \mid f'(0) = f'(l) = 0\}$，$Z = C^0[0,l]$. 定义

$$F:\mathbf{R}\times X\to Z,$$

$$F(\lambda,\varphi) = \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda\sin\varphi, \tag{1-5}$$

则问题化为求方程

$$F(\lambda,\varphi) = 0, \quad (\lambda,\varphi)\in\mathbf{R}\times X \tag{1-6}$$

在平凡解 $\varphi = 0$ 附近的一切解.

为此，首先考虑线性化问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda\psi = 0; \\ \psi'(0) = \psi'(l) = 0. \end{cases} \tag{1-7}$$

容易验证，当且仅当 $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}(n = 0,1,\cdots)$ 时，问题(1-7)有非平凡解 $\psi_n(s) = A\cos\sqrt{\lambda_n}s$，其中 A 为任意常数.

其次，通过计算可以看到，原来的非线性问题(1-4)在参数 λ 越过 λ_n 时均有新的解出现（见图 1-3）. 而对于线性化问题(1-7)，相应的解的图形如图 1-4 所示. 从

定性上看，图 1-3 与图 1-4都体现了分支的现象，即当 λ 未达到临界值λ_n 之前，杆没有弯曲(即只有平凡解). 当 λ 达到并超过临界值时，就产生了弯曲(非平凡解). 那些描述弯曲状态的分支曲线就是发自平凡解的分支解.

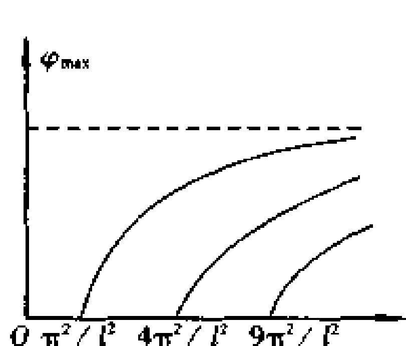


图 1-3

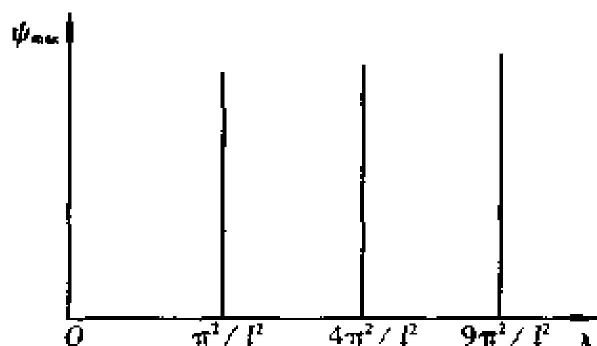


图 1-4

2　非线性分析中的某些课题

本章作为预备知识，为以后各章叙述分支理论及方法提供必要的基础.

2.1　巴拿赫空间中的微分学

设 X, Y 是巴拿赫空间，$L(X, Y)$表示映 X 到 Y 中的有界线性算子组成的巴拿赫空间.

定义 1　设 U 为 X 中的开集，称映射 $f: U \to Y$ 在点 $x_0 \in U$ 是**弗雷歇(Fréchet)可微的**，是指存在一个线性算子 $Df(x_0): X \to Y$, $Df(x_0) \in L(X, Y)$，使得对任意的 $h \in X, x_0 + h \in U$, 当 $\| h \| \to 0$ 时，有 $\| f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h \| = o(\| h \|)$，算子 $Df(x_0)$称为 f 在 x_0 的**弗雷歇导数**，有时亦记作 $f'(x_0)$.

弗雷歇导数的性质类似于有限维空间中导数的性质，例如链式法则成立等等.

定义 2　设 $X = \prod_{k=1}^{N} X_k$ 及 Y 为巴拿赫空间，$f: X \to Y$. 设 $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, $x_i \in X_i (i = 1, \cdots, N)$，则 f 关于 x_i 的**弗雷歇偏导数**定义为算子 $D_i f(x) \in L(X_i, Y)$，满足关系

$$\| f(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N) - D_i f(x) h_i \| = o(\| h_i \|),$$

当 $\| h_i \| \to 0$ 时.

如果 $Df(x)$, $D_i f(x)$均存在，且 $h = (h_1, h_2, \cdots, h_N) \in X$，其中 $h_i \in X_i$，则有

$$Df(x)h = \sum_{i=1}^{N} D_i f(x) h_i.$$

定义 3　设 X, Y 是巴拿赫空间，U 是 X 中的开集，$f: U \to Y$ 有弗雷歇导数 $Df(x)$, $x \in U$. 如果算子 $Df(\cdot): U \to L(X, Y)$在 x_0 点有弗雷歇导数，则称映射 f 在

x_0 点有二阶弗雷歇导数,记作 $D^2f(x_0)$(或 $f''(x_0)$).

显然,$D^2f(x_0)\in L(X,L(X,Y))\overset{\text{def}}{=\!=}L^2(X,Y)$.类似地可以用归纳的方法定义 N 阶弗雷歇导数 $D^Nf(x_0)$.

定理 1(泰勒(Taylor)公式) 设 $f\in C^n(U,Y)$(意即 f 有 n 阶连续弗雷歇导数),则对于 $x\in U$, $x+sh\in U$, $0\leqslant s\leqslant 1$,有公式

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)h+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(x)h^{n-1}+R_n(x,h),\quad(2\text{-}1)$$

其中

$$\begin{aligned}R_n(x,h)&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-s)^{n-1}D^nf(x+sh)h^n\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{n!}D^nf(x)h^n+o(\|h\|^n).\end{aligned}\quad(2\text{-}2)$$

定义 4 设 X,Y 是复数域上的巴拿赫空间,U 是 X 的连通子集.如果对于每一个 $x\in U$, $h\in X$,存在 $\delta(x,h)>0$,使得对于每一个 $y^*\in Y^*$(Y^* 为 Y 的共轭空间),$f(x)$ 是单值函数,并且 $(y^*,f(x+th))$ 是 t 的解析函数,$|t|<\delta(x,h)$,则称函数 $f:X\to Y$ 在 U 内是**解析**的.

定理 2 设 U 是 X 的开子集,$f:U\to Y$ 是单值的且局部有界,则下列各条件等价:

1° f 在 U 内是解析的;

2° f 在 U 内是弗雷歇可微的;

3° f 有无穷阶弗雷歇导数.

2.2 隐函数定理

定理 3 设 U 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 中的开集,$(\lambda_0,x_0)\in U$.设 $F\in C^1(U,\mathbf{R}^n)$, $F(\lambda_0,x_0)=0$.设弗雷歇偏导数 $D_xF(\lambda_0,x_0):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 有有界逆(等价的说法是雅可比(Jacobi))矩阵 $D_xf(\lambda_0,x_0)$ 非奇异),设存在数 $r,\delta>0$,使得

1° 点 (λ_0,x_0) 的邻域 $V=\{(\lambda,x)\mid|\lambda-\lambda_0|<\delta,\ \|x-x_0\|<r\}$ 含于 U 内,而 $D_xf(\lambda,x)$ 对每个 $(\lambda,x)\in V$ 都有逆;

2° 对于每一个满足 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 的 λ,存在唯一的 $x=h(\lambda)$, $\|x-x_0\|<r$,使得 $F(\lambda,x)=0$;

3° 由此得到的隐函数 $h(\lambda)$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 内是连续可微的.

由定理 3 可直接推出发自平凡分支的分支的一个必要条件:

定理 4 若 $D_xF(\lambda_0,0)$ 非奇异,则 $(\lambda_0,0)$ 不是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的分支点.

定理 5(巴拿赫空间中的隐函数定理) 设 X,Y 及 Λ 都是实巴拿赫空间,U 是 $\Lambda\times X$ 中的开集,$(\lambda_0,x_0)\in U$.设 $f:U\to Y$ 连续,f 对变元 x 可微,且弗雷歇导数 $D_xf(\lambda,x)$ 在点 (λ_0,x_0) 连续.设 $f(\lambda_0,x_0)=0$, $D_xf(\lambda_0,x_0):X\to Y$ 有有界逆.则存在数 $r>0$, $\delta>0$,使得当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时,方程

$$f(\lambda,x)=0\quad(2\text{-}3)$$

在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(\lambda)$.如果 $f\in C^k$, $k\geqslant1$,则 $g(\lambda)$ 在 $|\lambda$

$-\lambda_0| < \delta$ 内有 k 阶连续的弗雷歇导数.

2.3 拓 扑 度

分支是非线性方程所特有的现象,为了对非线性方程的多解现象加以描述,需引进映射的拓扑度概念.

设 Ω 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集,$f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是连续映射($\overline{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包),$p\in\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$,$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.我们要对方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内是否有解以及有多少个解作一个估计,并且要求这个估计数值在方程有小的摄动时保持不变.为此将称这估计数值为映射 f 关于 Ω 对点 p 的**拓扑度**,记作 $\deg(f,\Omega,p)$.

在某些情形,古典分析已提供了解决这个问题的办法.

例1 设 $\Omega=(-1,1)\subset\mathbf{R}$,$f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$p\in\mathbf{R}$.当 $x=\pm1$ 时,$f(x)\neq p$.设方程

$$f(x)=p \tag{2-4}$$

的解集 $f^{-1}(p)$ 由 k 个不同的点 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in(-1,1)$ 组成.对每个 $x_i,i=1,2,\cdots,k$,引进数

$$\sigma_i=\begin{cases}1, & \text{若 } f \text{ 在 } x_i \text{ 处为上升;}\\ -1, & \text{若 } f \text{ 在 } x_i \text{ 处为下降;}\\ 0, & \text{若 } f \text{ 在 } x_i \text{ 处有局部极值.}\end{cases}$$

定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i, \tag{2-5}$$

则这个数值在小摄动下不变.图2-1给出了一个例子,其中 $\sigma_1=-1,\sigma_2=0,\sigma_3=1$,于是 f 的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)=0$.

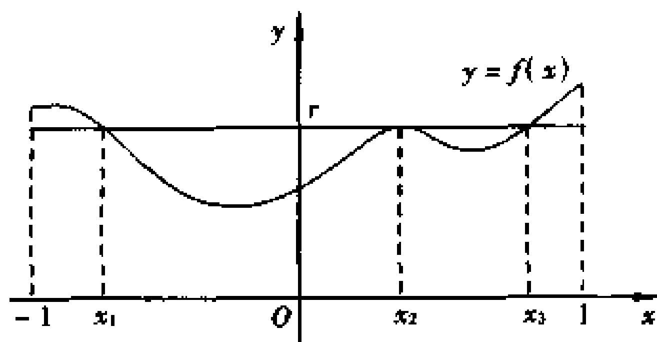


图2-1

如果函数 $f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}$ 是连续可微的,且当 $x\in\partial\Omega$ 时,$f(x)\neq p$,又若对 $x\in f^{-1}(p)$,$f'(x)\neq0$,则 $f^{-1}(p)$ 是有限集,这时公式(2-4)等价于下列式子:

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}f'(x).$$

2.3.1 布劳威尔(Brouwer)度的定义

1. f 连续可微,p 是正则值的情形

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集,$f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是连续映射,且对所有的 $x\in\Omega$,偏导数 $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ 均存在且连续,则记 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$.

$f(x)$ 在 $x\in\Omega$ 处的雅可比矩阵为 $f'(x)$,用 $J(f(x))$ 表示 $f'(x)$ 的行列式.

定义 5 1° $Z=\{x\in\Omega\mid J(f(x))=0\}$ 称为 f 的临界点集.

2° $\Omega\setminus Z$ 称为 f 的正则点集.

3° $f(Z)$ 称为 f 的临界值集.

4° $\mathbf{R}^n\setminus f(Z)$ 称为 f 的正则值集.

定义 6 设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$,$p\in\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)\setminus f(Z)$,则定义 f 关于 Ω 对于点 p 的拓扑度为

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sign}J(f(x)). \tag{2-6}$$

由定义 6 可见,拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 是整数值的. 以下把拓扑度简称为**度或度数**.

定理 6 设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$,$p\in\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)\setminus f(Z)$,度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 由(2-6)式定义,则必存在一个正数 r,使得对每一个连续函数 $\psi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$\psi$ 在 $\{y\in\mathbf{R}^n\mid\|y-p\|>r\}$ 上等于零,$\int_{\mathbf{R}^n}\psi(y)\mathrm{d}y=1$,并且成立等式

$$\deg(f,\Omega,p)=\int_{\Omega}\psi(f(x))J(f(x))\mathrm{d}x. \tag{2-7}$$

由定理 6 可知,定义 6 中的(2-6)式右端可改写为积分形式(2-7). 因此,通常也把(2-7)式作为度数的定义.

2. f 连续可微,p 是临界值的情形

定义 7 设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$,$p\in\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$,$K\subset\mathbf{R}^n$ 是开立方体,K 的闭包 $\overline{K}\subset\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$,$p\in K$. 又设 $g\in K\setminus f(Z)$,而 $\deg(f,\Omega,g)$ 由(2-6)式定义. 则定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,q). \tag{2-8}$$

注意 这个定义不依赖于 K 及 q 的选取. 由定义 7 还可推知,度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 是 p 的一个局部恒为常数(整数)的函数.

定理 7 设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C(\Omega)$,则 $\deg(f,\Omega,p)$ 在 $\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的每个连通区域上都是 p 的常值函数. 特别地,在 $\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的无界连通区域上,度数 $\deg(f,\Omega,p)=0$.

由定理 7 知,如果 V 是 $\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的一个连通区域,$p\in V$,则可以用 $\deg(f,\Omega,V)$ 来代替 $\deg(f,\Omega,p)$.

定理 8 设 $f\in C(\overline{\Omega})\cap C(\Omega)$,$V$ 是 $\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的连通区域. 设 $\psi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一个紧支集在 V 内的连续函数,且 $\int_{\mathbf{R}^n}\psi(y)\mathrm{d}y=1$. 则

$$\deg(f,\Omega,V)=\int_{\Omega}\psi(f(x))J(f(x))\mathrm{d}x. \tag{2-9}$$

3. f 是连续映射的情形

定义 8　设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$p\in \mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$，选取数 $r>0$，使得对于 $y\in f(\partial\Omega)$，有 $\|y-p\|>r$. 设

$$V=\{g\in C(\overline{\Omega})\mid \max_{x\in\overline{\Omega}}\|g(x)-f(x)\|<r\},$$

选取 $g_0\in V\cap C^1(\Omega)$，而 $\deg(g_0,\Omega,p)$ 由定义 7 给出. 则定义

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g_0,\Omega,p), \tag{2-10}$$

并且称 $\deg(f,\Omega,p)$ 为 f 关于 Ω 对点 p 的**布劳威尔度**.

注意　这个定义也不依赖于 r 及 g_0 的选取. 度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 是三变元 f,Ω,p 的整值函数，而且也是局部为常值的函数.

2.3.2　布劳威尔度的性质

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开子集，$f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是连续映射，$p\in\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$. 度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 由定义 8 给出.

性质 1(标准性)　若 $p\in\Omega$，则 $\deg(\mathrm{id},\Omega,p)=1$，
其中 id 表示恒等映射.

证　因为 id 是连续可微映射，且 p 是它的正则值，故由公式(2-6)可得

$$\deg(\mathrm{id},\Omega,p)=\begin{cases}1, & \text{当 } p\in\Omega \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } p\bar{\in}\Omega \text{ 时}.\end{cases}$$

性质 2(可加性)　若 Ω_1,Ω_2 为 Ω 的不相交的开子集，$p\bar{\in}f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p).$$

性质 3(同伦不变性)　设 $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 连续，$h_t(x)=H(x,t)$. 设 $\theta:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 连续，且当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\theta(t)\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$，则 $\deg(h_t,\Omega,\theta(t))$ 与 t 无关.

这个性质表明，在 $\theta(t)=p$ 的简单情形，当 $h_0(x)$ 连续地变化为 $h_1(x)$ 时，只要在变化过程中保持 $p\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$，则对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，度数 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 的值均相同.

性质 4(切除定理)　设闭集 $K\subset\Omega$ 满足 $p\bar{\in}f(K)$，则 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\setminus K,p)$.

这个性质表明，若方程 $f(x)=p$ 在 K 内无解，则在计算度数时可把 K 挖掉.

性质 5(克罗内克(Kronecker)存在定理)　若 $f^{-1}(p)$ 是空集，则 $\deg(f,\Omega,p)=0$；若 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内至少有一个解.

性质 6(连通区性质)　当 p 在 $\mathbf{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的一个连通区内变动时，度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 不变. 特别是当 p 属于无界连通区时，$\deg(f,\Omega,p)=0$.

性质 7(边界值性质)　度数 $\deg(f,\Omega,p)$ 只与 f 在边界 $\partial\Omega$ 上的值有关. 即是说，当 $x\in\partial\Omega$，$f(x)=g(x)\neq p$ 时，则有 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$.

性质 8(乘积定理)　设 $f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，$g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 均为连续映射. 设 $V_1,V_2,\cdots$ 表示

$\mathbf{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$的有界连通区域,且设$p \bar{\in} gof(\partial\Omega)$.则

$$\deg(gof,\Omega,p) = \sum_i \deg(f,\Omega,V_i)\cdot\deg(g,V_i,p).$$

性质 9(简化定理) 设 $m<n$,$\mathbf{R}^m$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的有界开子集,$F:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^m$ 连续.设$f(x)=x-F(x)$,$p\in\mathbf{R}^m\setminus f(\partial\Omega)$,而 g 为f在 $\mathbf{R}^m\cap\Omega$ 上的限制.则 n 维空间中的度数与 m 维空间中的度数有如下关系:

$$\deg_n(f,\Omega,p)=\deg_m(g,\mathbf{R}^m\cap\Omega,p). \tag{2-11}$$

性质 9 也可以这样理解:低维空间中的度数可以扩大成为高维空间中的度数,因此,简化定理成为以后定义无穷维空间中的度数的基本出发点.

2.3.3 孤立解的指数

定义 9 设$f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是连续映射,$p\in\mathbf{R}^n$.如果 $x_0\in\Omega$ 是$f^{-1}(p)$的一个孤立点,则定义 f 在x_0 点关于 p 的指数为

$$\mathrm{ind}(f,x_0,p)=\deg(f,B_r(x_0),p), \tag{2-12}$$

其中 $B_r(x_0)$是以 x_0 为中心、r 为半径的开球,且 $B_r(x_0)\subset\Omega$,$f^{-1}(p)\cap B_r(x_0)=\{x_0\}$.

定理 9 设$f\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$,$p\in\mathbf{R}^n$.如果 $x_0\in\Omega$ 是$f^{-1}(p)$的孤立点,且 $J(f(x_0))\neq 0$,则

$$\mathrm{ind}(f,x_0,p)=\mathrm{sign}J(f(x_0))=(-1)^\beta, \tag{2-13}$$

其中 β 是线性算子$f'(x_0)$所有负本征值的代数重数之和.

定理 10 设$f\in C(\overline{\Omega})$,如果 $f^{-1}(p)$只有有限多个点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,且这些点均含于 Ω 内,则有下列指数公式

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{i=1}^m \mathrm{ind}(f,x_i,p). \tag{2-14}$$

2.3.4 勒瑞-绍德尔(Leray-Schauder)度

定义 10 设 X,Y 是巴拿赫空间,$D\subset X$.如果映射$f:D\to Y$ 的值域含于 Y 的有限维子空间内,则称 f 为**有限维映射**.

定理 11 设 M 为 X 中的有界闭集,$f:M\to Y$ 连续.则 f 为全连续映射的充分且必要条件是对任意的$\epsilon>0$,存在有限维的有界连续映射 $f_n:M\to Y^n$,使得

$$\sup_{x\in M}\|f(x)-f_n(x)\|<\epsilon,$$

其中 Y^n 是 Y 的有限维子空间.

这个定理表明,全连续映射可以用有限维的有界连续映射一致逼近,这使得我们有可能把有限维空间中的度数扩张成无穷维空间中的度数.

定义 11 设 X 为巴拿赫空间,Ω 为 X 中的有界开集,$F:\overline{\Omega}\to X$ 为全连续映射.令 $f=\mathrm{id}-F$,$p\in X\setminus f(\partial\Omega)$.设 X^n 为 X 的有限维子空间,$p\in X^n$,$F_n:\overline{\Omega}\to X^n$ 有界连续,且满足

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|F(x)-F_n(x)\|<\mathrm{dis}(p,f(\partial\Omega))$$

(此处 dis 表示距离),则对于 $f_n = \mathrm{id} - F_n$,所有的度数 $\deg_n(f_n, \Omega \cap X^n, p)$ 是同一个值,称此值为 f 关于 Ω 对点 p 的**勒瑞-绍德尔度**,记作

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg_n(f_n, \Omega \cap X^n, p). \tag{2-15}$$

注意 由于假设 $p \bar{\in} f(\partial\Omega)$,故 $p \bar{\in} f_n(\partial\Omega)$,从而 n 维布劳威尔度 $\deg_n(f_n, \Omega \cap X^n, p)$ 有意义,并且还可进一步证明这个 n 维度与 X^n 及 F_n 的选取无关.

布劳威尔度的几个性质均可推广到勒瑞-绍德尔度,只有性质3的叙述略有不同.

性质3'(紧同伦不变性) 设 $H: \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ 是紧连续映射,$h_t(x) = x - H(x,t)$. 设 $\theta(t): [0,1] \to X$ 连续,$\theta(t) \bar{\in} h_t(\partial\Omega)$. 则度 $\deg(h_t, \Omega, \theta(t))$ 与 t 无关.

2.3.5 不动点定理

由度理论可推得下列不动点定理.

定理12(布劳威尔不动点定理) 设 $\overline{\Omega}$ 是 n 维实线性赋范空间中的有界闭凸集,$F: \partial\Omega \to \Omega$ 是连续映射,则 F 在 $\overline{\Omega}$ 内必存在不动点.

定理13(绍德尔不动点定理) 设 D 为巴拿赫空间 X 中的有界闭凸集,$f: D \to X$ 为全连续映射.此外,f 还满足下列两个条件之一:

1° D 含有内点,$f: \partial D \to D$;

2° $f: D \to D$,

则 f 在 D 上有不动点.

定义12 设 f 为定义11中所述的映射,x_0 为 f 在 Ω 内的唯一零点,则定义指数

$$\mathrm{ind}(f, x_0, 0) = \deg(f, B_r(x_0), 0). \tag{2-16}$$

定理14 设 x_0 是可微全连续映射 F 的不动点,且1不是 $A = F'(x_0)$ 的本征值,则 x_0 是映射 $f = \mathrm{id} - F$ 的孤立零点,且

$$\mathrm{ind}(f, x_0, 0) = \mathrm{ind}(\mathrm{id} - A, 0, 0) = (-1)^{\beta}, \tag{2-17}$$

其中 β 为开区间(0,1)内全连续线性算子 A 的所有本征值的代数重数之和.

3 线性化方法

线性化是分支理论的基本方法之一,其基本思想是用线性算子描述非线性算子的局部性质,根据线性算子的某些信息而得出非线性问题的某些结论.

在应用中常遇到以下几个类型的方程:

$$F(\lambda, x) = 0,$$

其中 F 的线性部分为

$$\mathrm{B}x - \lambda \mathrm{I} \quad 或 \quad \mathrm{B}x - \lambda \mathrm{A}x \quad 或 \quad \mathrm{B}x - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathrm{A}_j x,$$

而 $\mathrm{B}, \mathrm{A}, \mathrm{A}_j$ 是有界线性算子. 本章将通过对线性部分的讨论,来研究非线性方程

$F(\lambda,x)=0$的分支问题.

3.1 本征值的概念

设 X,Z 是巴拿赫空间, X 连续地嵌入 Z,即存在一个连续的单射 $\mathrm{I}: X\to Z$, I为恒等映射. I的逆映射记作 J. 以下均假设 B, A 以及 $\mathrm{A}_j(j=1,2,\cdots,N)$是 X 到 Z 的有界线性算子.

3.1.1 B的本征值

使得 $\mathrm{B}-\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}$ 有有界逆的一切 $\lambda\in\mathbf{C}$(此处 $\mathbf{C}$ 表示复数域)所成之集 $\rho(\mathrm{B})$称为 B 的**预解集**. B 的**谱** $\sigma(\mathrm{B})=\mathbf{C}\setminus\rho(\mathrm{B})$. 对于点 $\lambda\in\mathbf{C}$,如果存在一个非零向量 $x\in X$,使得$(\mathrm{B}-\lambda)x=\mathbf{0}$,则称 λ 为 B 的一个**本征值**. 也就是说, $\mathrm{B}-\lambda$ 的零空间$N(\mathrm{B}-\lambda)$至少是一维的. 任意的 $x\in N(\mathrm{B}-\lambda)$称为**本征向量**. 如果 $\lambda\in\mathbf{C}$ 是 B 的一个本征值,同时又是 B 的谱中的孤立点,则称 λ 为 B 的**孤立本征值**.

设 λ 是 B 的本征值. 令 $N(\mathrm{B}-\lambda)^k$ 和 $R(\mathrm{B}-\lambda)^k$ 分别表示算子$(\mathrm{B}-\lambda)^k$ 的零空间和值域. 使得 $N(\mathrm{B}-\lambda)^{k+1}=N(\mathrm{B}-\lambda)^k$ 成立的最小整数 k 称为 B 的**里斯(Riesz)指数**,记作 $\delta(\mathrm{B})$.

子空间 $N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}$称为 B 的**广义本征空间**,而子空间 $R(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}$称为 $\mathrm{B}-\lambda$ 的**广义值域**.

子空间 $N(\mathrm{B}-\lambda)$的维数称为本征值 λ 的**几何重数**,而子空间 $N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}$的维数则定义为 λ 的**代数重数**. 如果 λ 的几何重数与代数重数都等于 1,则称这个 λ 为 B 的**简单本征值**.

可以证明,若 λ 是 B 的简单本征值,则其等价的说法就是

$$\dim N(\mathrm{B}-\lambda)=1=\operatorname{codim}^{①}R(\mathrm{B}-\lambda),$$

且

$$Z=I[N(\mathrm{B}-\lambda)]\oplus R(\mathrm{B}-\lambda).$$

设 $X=Z$,且 B 的里斯指数 $\delta(\mathrm{B})$存在:

$$N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})-1}\subsetneqq N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}=N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})+1},$$

$$\dim N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}<+\infty,$$

则称 λ 为 B 的**正规本征值**,且

$$X=N(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}\oplus R(\mathrm{B}-\lambda)^{\delta(\mathrm{B})}.$$

有界线性算子 $\mathrm{B}: X\to Z$ 的**弗雷德霍姆(Fredholm)指数** $i(\mathrm{B})$定义为

$$i(\mathrm{B})=\dim N(\mathrm{B})-\operatorname{codim}R(\mathrm{B}).$$

如果 λ 是 B 的正规本征值,则必有 $i(\mathrm{B}-\lambda)=0$.

3.1.2 (B, A)的本征值

使得 $\mathrm{B}-\lambda\mathrm{A}$ 有有界逆的一切 $\lambda\in\mathbf{C}$ 所成之集 $\rho(\mathrm{B},\mathrm{A})$称为算子偶(B, A)的预

---

① 符号 codim 表示余维数, X 的子空间 E 的余维数等于商空间 X/E 的维数.

解集.(B,A)的谱 $\sigma(B,A)=C\setminus\rho(B,A)$.若0是 $B-\lambda A$ 的本征值,则 $\lambda\in\sigma(B,A)$称为(B,A)的本征值,这时有 $\dim N(B-\lambda A)\geqslant 1$.

若 A=I,则 λ 是(B,I)的简单本征值的充分且必要条件是:0是 $B-\lambda I$ 的简单本征值,亦即

$$\dim N(B-\lambda)=1=\operatorname{codim}R(B-\lambda),$$
$$I[N(B-\lambda)]\oplus R(B-\lambda)=Z.$$

如果 $\dim N(B-\lambda A)=1=\operatorname{codim}R(B-\lambda A)$,

$$A[N(B-\lambda A)]\oplus R(B-\lambda A)=Z,$$

则称 $\lambda\in C$ 为(B,A)的简单本征值.

例1 设 $X=Z=\mathbf{R}^2$,$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$,$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.则 $\lambda=0$ 是 $\mathbf{B}-\lambda\mathbf{A}$ 的简单本征值,但0不是(**B**,**A**)的简单本征值.

3.1.3 $(B,A_1,A_2,\cdots,A_N)$的本征值

设
$$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)\in\mathbf{C}^N,$$
$$L(\boldsymbol{\lambda})=B-\sum_{j=1}^{N}\lambda_jA_j.$$

如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 及 $L(\boldsymbol{\lambda})$满足下列条件:

1° $L(\boldsymbol{\lambda})$有弗雷德霍姆指数 $1-N$;

2° $\dim N(L(\boldsymbol{\lambda}))=1$;

3° $[A_1N(L(\boldsymbol{\lambda})),\cdots,A_NN(L(\boldsymbol{\lambda}))]\oplus R(L(\boldsymbol{\lambda}))=Z$,

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为$(B,A_1,A_2,\cdots,A_N)$的简单本征值.这里符号[ ]表示由某些子空间张成的子空间.

例2 设 $X=\mathbf{R}^2$,$Z=\mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix},$$

则 $y_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$是零空间 $N(\mathrm{B})$的基,而$\{\mathbf{A}_1y_0,\mathbf{A}_2y_0\}$则是值域 $R(\mathbf{B})$的补空间的基.因此,$\boldsymbol{\lambda}=(0,0)\in\mathbf{R}^2$ 是$(\mathbf{B},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$的简单本征值.

3.2 简单本征值处的分支

定理1 设 X,Z 是实(或复)巴拿赫空间,Λ 是 **R**(或 **C**)中的开集,$B:X\to Z$ 是有界线性算子,$F\in C^m(\Lambda\times X,Z)$,$m\geqslant 2$.设

$$\begin{cases}F(\lambda,x)=Bx-\lambda x+G(\lambda,x),\\ G(\lambda,0)=0,D_xG(\lambda,0)=0.\end{cases}\tag{3-1}$$

如果 λ_0 是 B 的一个简单本征值,$y_0\neq 0$是相应的本征向量,则$(\lambda_0,0)$是 $F(\lambda,x)=0$ 的一个分支点,并且对于$0\in\mathbf{R}$附近的 u,存在 C^{m-1}函数

$$x^*(u)=uy_0+O(u^2),\quad \lambda^*(u)=\lambda_0+O(|u|),\tag{3-2}$$

满足 $F(\lambda^*(u),x^*(u))\equiv 0$.在$(\lambda_0,\mathbf{0})$附近,$F$ 的零点或者是平凡解 $x=\mathbf{0}$,或者由(3-2)式给出.最后,如果在$(\lambda_0,\mathbf{0})$附近,F 是λ,x 的解析函数,则 $\lambda^*(u),x^*(u)$亦在 $u=0$ 附近解析.

在应用中,(3-1)式中的映射 G 常常依赖于另一个参数 w,而 $G=O(|w|+|x|)$(当 $w,x\to 0$时).这时有下面的结论.

定理 2 设 X,Z,W 是实(或复)巴拿赫空间,Λ 是 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)中的开集,$F\in C^m(\Lambda\times W\times X,Z)$,$m\geqslant 2$.设

$$\begin{cases}F(\lambda,w,x)=\mathrm{B}x-\lambda x+G(\lambda,w,x);\\ G(\lambda,w,0)=0,\mathrm{D}_xG(\lambda,0,0)=0.\end{cases}\tag{3-3}$$

如果 λ_0 是 B 的简单本征值,$y_0\neq\mathbf{0}$是相应的本征向量,则存在 $\delta>0$ 及 C^{m-1}函数

$$\begin{aligned}&\lambda^*(w,u)=\lambda_0+O(|w|+|u|),\\&x^*(w,u)=uy_0+O((|w|+|u|)|u|),\end{aligned}\tag{3-4}$$

$|u|<\delta,|w|<\delta$,使得 $F(\lambda^*(w,u),x^*(w,u))\equiv 0$.在$(\lambda_0,\mathbf{0})$附近,$F$ 的所有零点或为$(\lambda,w,\mathbf{0})$,或为$(\lambda^*(w,u),w,x^*(w,u))$.

上述结果还可以推广到以下两种情形.

定理 3 设 $F\in C^m(\Lambda\times X,Z)$,$m\geqslant 2$,$\Lambda\subset\mathbf{R}$ 是一个区间,X 和 Z 是实巴拿赫空间.设

$$\begin{cases}F(\lambda,x)=\mathrm{B}x-\lambda\mathrm{A}x+G(\lambda,x);\\ G(\lambda,\mathbf{0})=0,\mathrm{D}_xG(\lambda,\mathbf{0})=0.\end{cases}\tag{3-5}$$

如果 λ_0 是(B,A)的简单本征值,则定理 1 的结论成立.如果 $G=G(\lambda,w,x)$如(3-3)式中所设,且 λ_0 是(B,A)的简单本征值,则定理 2 的结论成立.

定理 4 设 X,Z 是巴拿赫空间,$\Lambda\subset\mathbf{R}$ 是一个开区间,$F\in C^m(\Lambda\times X,Z)$,$m\geqslant 2$.设

$$\begin{cases}F(\lambda,x)=\mathrm{B}x-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\mathrm{A}_jx+G(\lambda,x);\\ G(\lambda,\mathbf{0})=0,\mathrm{D}_xG(\lambda,\mathbf{0})=0.\end{cases}\tag{3-6}$$

如果 $\lambda_0\in\mathbf{R}^N$ 是$(\mathrm{B},\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_N)$的简单本征值,$y_0\neq\mathbf{0}$是相应的本征向量,则$(\lambda,x)=(\lambda_0,\mathbf{0})$是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的分支点,并且对于 0 附近的实数 u,存在 C^{m-1}函数

$$\lambda^*(u)=\lambda_0+O(|u|),\quad x^*(u)=uy_0+O(|u|),\tag{3-7}$$

使得 $F(\lambda^*(u),x^*(u))\equiv 0$.在$(\lambda_0,\mathbf{0})$附近,$F$ 的所有零点或为平凡解 $x=\mathbf{0}$,或由(3-7)式给出.如果 F 在$(\lambda_0,\mathbf{0})$的邻域内解析,则 $\lambda^*(u),x^*(u)$在 $u=0$ 的附近亦解析.如果 $G=G(\lambda,w,x)$满足(3-3)式,则对于 $\lambda^*(w,u)=\lambda_0+O(|w|+|u|)$,$x^*(w,u)=uy_0+O((|w|+|u|)|u|)$有相同的结论成立.

例 3 设 $X=Z=\mathbf{R}^3$,$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$G:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 是一个 C^2 映射,满足

$G(\lambda,0)=D_xG(\lambda,0)=0$. 由于 $\lambda_0=1$ 是 $\mathbf{B}$ 的简单本征值，故根据定理1，点 $(1,0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ 是方程 $\mathbf{B}x-\lambda x+G(\lambda,x)=0$ 的一个分支点.

例4 设 $\mathbf{B}$，G 如例3所述，点 $\lambda_0=0$ 是 $\mathbf{B}$ 的二重本征值，故不能用定理1. 另一方面，设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

不难验证 $\lambda_0=0$ 是 $(\mathbf{B},\mathbf{A})$ 的简单本征值. 于是由定理3知，点 $(1,0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ 是方程 $\mathbf{B}x-\lambda\mathbf{A}x+G(\lambda,x)=0$ 的分支点.

例5 设 $X=\mathbf{R}^2$，$Z=\mathbf{R}^3$，

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{\lambda}_0=(0,0)$ 是 $(\mathbf{B},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$ 的简单本征值. 据定理4，对于任意的 $G\in C^m(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$，点 $(\boldsymbol{\lambda}_0,0)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$ 是方程 $\mathbf{B}x-\lambda_1\mathbf{A}_1x-\lambda_2\mathbf{A}_2x+G(\lambda,x)=0$ 的分支点.

例6 设 $Z=C([0,\pi],\mathbf{R})$，$X=\{x\in C^2([0,\pi],\mathbf{R})\mid x(0)=x(\pi)=0\}$，$F:\mathbf{R}\times X\to Z$ 定义为

$$F(\lambda,x)(t)=-x''(t)-\lambda x(t)+f(\lambda,x(t),x'(t)),0\leqslant t\leqslant\pi,$$

其中 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^2 函数，$f(\lambda,0,0)=0$. 方程 $F(\lambda,x)=0$ 等价于边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+\lambda x-f(\lambda,x,x')=0,0<t<\pi;\\x(0)=x(\pi)=0.\end{cases}\tag{3-8}$$

设 $\mathrm{B}:X\to Z$ 定义为 $(\mathrm{B}x)(t)=-x''(t)$. 可以算出，n^2 是 B 的简单本征值，故根据定理1，点 $(n^2,0)\in\mathbf{R}\in X$ 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的分支点. 也就是说，存在点 $(n^2,0)$ 的一个邻域 $U\subset R\times X$，使得存在 $(\lambda^*,x^*)\in U$，$x^*\neq 0$，当 $\lambda=\lambda^*$ 时，x^* 满足(3-8)式. 此外，所有的非零解都可表为

$$\lambda^*=n^2+O(|u|),\quad x^*=u\sin nt+O(|u|^2)(u\to 0),$$

其中 u 是实参数，而 $x_n(t)=\sin nt$ 则是零空间 $N(B)$ 的基向量.

关于简单本征值处的分支定理，在实用上还常常用到以下形式的结果.

定理5 设 U 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的开子集，$F\in C^2(U,\mathbf{R})$ 定义为

$$F(\lambda,x)=\mathrm{B}_0x+(\lambda-\lambda_0)\mathrm{A}x+r(\lambda,x),\tag{3-9}$$

其中 $r(\lambda,0)=0$，$D_xr(\lambda_0,0)=D_\lambda D_xr(\lambda_0,0)=0$. 设 B_0 的零空间 $N(\mathrm{B}_0)$ 由 x_0 张成，$\mathrm{A}x_0$ 不属于 B_0 的值域. 设 Z 是满足 $\mathbf{R}^n=\mathrm{span}\{x_0\}\oplus Z$ 的子空间. 则存在 $\delta>0$ 及 C^1 曲线 $(\lambda,\varphi):(-\delta,\delta)\to\mathbf{R}\times Z$，使得

1° $\lambda(0)=\lambda_0$；

2° $\varphi(0)=0$；

3° 对于 $|s|<\delta$，$F(\lambda(s),s(x_0+\varphi(s)))=0$.

此外，还存在 $(\lambda_0,0)$ 的一个邻域，在此邻域内，F 的任何零点或位于这条曲线上，或为形如 $(\lambda,0)$ 的平凡解.

定理 6 设 $U=S\times V$ 是 $\mathbf{R}\times X$ 的开子集，$F\in C^2(U,Y)$，其中 X,Y 是巴拿赫空间. 设 $F(\lambda,\mathbf{0})\equiv 0,\lambda\in S\subset\mathbf{R}$. 令 $\mathrm{B}_0=\mathrm{D}_xF(\lambda_0,\mathbf{0}),\mathrm{A}=\mathrm{D}_\lambda\mathrm{D}_xF(\lambda_0,\mathbf{0})$，而 F 的形式仍如(3-9)式. 设下列条件成立：

1° $N(\mathrm{B}_0)$是一维的，由 x_0 张成；

2° $\mathbf{R}(\mathrm{B}_0)$是余一维的，即 $\dim(Y/\mathbf{R}(\mathrm{B}_0))=1$；

3° $\mathrm{A}x_0\bar{\in}\mathbf{R}(\mathrm{B}_0)$.

设 Z 是 X 的任一闭子空间，满足 $X=[\mathrm{span}\{x_0\}]\oplus Z$(即任何 $x\in X$ 可唯一地表为 $x=\alpha x_0+z,\alpha\in\mathbf{R},z\in Z$). 则定理 5 的结论成立.

例 7 设区间$[0,1]\subset\mathbf{R}$，$C_0^2=\{u\in C^2\mid u'(0)=u'(1)=0\}$. 设 $F:\mathbf{R}\times C_0^2\to C^0$ 定义为

$$F(\lambda,u)=u''+\lambda[u+u^2h(u)],$$

其中 h 是光滑的. 则对于一切 $\lambda\in\mathbf{R}$，有 $F(\lambda,0)=0$，$\mathrm{D}_uF(\lambda,0)v=v''+\lambda v$，$\mathrm{D}_\lambda\mathrm{D}_uF(\lambda,0)v=v,v\in C_0^2$. 于是当且仅当 $\lambda\neq n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$时，$\mathrm{D}_uF(\lambda,0)$是非奇异的. 此外，

$$N(\mathrm{D}_uF(n^2\pi^2,0))=[\cos n\pi x],$$

$$R(\mathrm{D}_uF(n^2\pi^2,0))=\{u\in C^0\mid \int_0^1 u(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=0\}.$$

因此，$\cos n\pi x\bar{\in}\mathbf{R}(\mathrm{D}_uF(n^2\pi^2,0))$. 若定义

$$Z=\{u\in C_0^2\mid \int_0^1 u(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=0\},$$

则定理 6 所有假设条件均满足，从而分支将在每一点$(n^2\pi^2,0)\in\mathbf{R}\times C_0^2$处出现.

例 8 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开区域. 考虑问题

$$\Delta u-\lambda\varphi(u)=0,\quad 在\ \Omega\ 内；$$

$$au+b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上,$$

其中 $a^2+b^2\neq 0$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$是 u 在$\partial\Omega$ 的法线方向上的导数，这里 φ 是光滑的，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)\neq 0$.

令 $F(\lambda,u)=\Delta u-\lambda\varphi(u)$，则 F 的定义域和值域类似于例 7 的情形. 在 $u=0$ 处，线性化算子是

$$\mathrm{D}_uF(\lambda,0)v=\Delta v-\lambda\varphi'(0)v,\quad 在\ \Omega\ 内；$$

$$av+b\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

若 λ_0 是其本征值，且有由 u_0 张成的一维零空间，则因为线性化算子是自共轭的，故 $R(\mathrm{D}_uF(\lambda_0,0))$是由满足条件

$$\int_\Omega vu_0\mathrm{d}x=0$$

的 v 所组成的集合. 因 $\mathrm{D}_\lambda\mathrm{D}_uF(\lambda_0,0)v=-\varphi'(0)v,\varphi'(0)\neq 0$，故 $\mathrm{D}_\lambda\mathrm{D}_uF(\lambda_0,0)u_0\bar{\in}\mathbf{R}(\mathrm{D}_uF(\lambda_0,0))$. 于是定理 6 的假设条件全部满足，从而$(\lambda_0,0)$是一个分支点.

3.3　线性化稳定性

3.3.1　线性化稳定性原理

(1) 稳定性　考虑发展方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(\lambda,x),\tag{3-10}$$

其中 $F:\mathbf{R}\times X\to Y$ 是 C^1 映射，X 与 Y 是巴拿赫空间. 如果点 $(\lambda_0,x_0)\in\mathbf{R}\times X$ 使 $F(\lambda_0,x_0)=0$，则称 x_0 是方程(3-10)的一个**定态解**. 本节讨论方程(3-10)从平凡的定态解分支出来的非平凡定态解分支的稳定性.

设对任意的 $t>0$，$x(t)$是方程(3-10)带有初值 $x(0)=v$ 的解，定义 $S(t):X\to X$ 为

$$S(t)v=x(t).$$

方程(3-10)的定态解 $x=\bar{x}$ 称为**稳定的**，是指对 $\bar{x}$ 的任意邻域 U，存在 $\bar{x}$ 的邻域 V，使得对一切 $t>0$，有 $S(t)v\subset U$. 否则就称 $\bar{x}$ 是**不稳定的**. 如果 $\bar{x}$ 是稳定的，并且对于任意的 $v_0\in V$，成立

$$\lim_{t\to+\infty}S(t)v_0=\bar{x},$$

则称定态解 $\bar{x}$ 是**渐近稳定的**.

(2) 李雅普诺夫(Liapunov)线性化稳定性原理　设算子 $\mathrm{D}_xF(\lambda,\bar{x})$仅有点谱，则

1° 当谱集 $\sigma(\mathrm{D}_xF(\lambda,\bar{x}))\subset\{z\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Re}z\leqslant0\}$ 时，$\bar{x}$ 是稳定的；

2° 当谱集 $\sigma(\mathrm{D}_xF(\lambda,\bar{x}))\subset\{z\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Re}z<0\}$ 时，$\bar{x}$ 是渐近稳定的；

3° 设

$$\lambda=\lambda(s),\quad x=x(s)(s\in(-\delta,\delta))\tag{3-11}$$

是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的连续解. 对于 $s_0\in(-\delta,\delta)$，若 $x(s_0)$是方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(\lambda(s_0),x)$$

的稳定的(或渐近稳定的，或不稳定的)定态解，则称解(3-11)在参数 s_0 处是稳定的(或渐近稳定的，或不稳定的).

3.3.2　稳定性判据

设本章定理6的所有假设条件均成立.

当 λ 在 λ_0 附近时，方程 $F(\lambda,x)=0$ 关于平凡解$(\lambda,0)$的线性化问题为

$$\mathrm{D}_xF(\lambda,0)v(\lambda)=\sigma(\lambda)v(\lambda).\tag{3-12}$$

当 s 在 0 附近时，方程 $F(\lambda,x)=0$ 关于分支解$(\lambda(s),x(s))$的线性化问题为

$$\mathrm{D}_xF(\lambda(s),x(s))w(s)=\eta(s)w(s).\tag{3-13}$$

由定理6的条件可知，$\sigma(\lambda_0)=0$，$\eta(0)=\eta_0=0$，$\lambda_0=\lambda(0)$，并且 $\eta_0=0$ 是$(\mathrm{D}_xF(\lambda_0,$

0), I)的简单本征值.

判据 1　在定理6的条件下,$\sigma'(\lambda_0)\neq 0$. 这意味着 $F(\lambda,x)=0$ 的平凡解 $x=0$ 至少在 λ_0 的一侧是不稳定的.

判据 2　在定理6的条件下,若对于 $\mathbf{0}$ 附近的 s, $\eta(s)\neq 0$,则有

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\lambda'(s)\sigma'(\lambda_0)}{\eta(s)}=-1, \tag{3-14}$$

其中 $\lambda'(s)\neq 0$. 这表明由(3-14)式可确定本征值 $\eta(s)$在 $s=0$ 附近的符号,从而可获知分支解$(\lambda(s),x(s))$的稳定性.

3.3.3　超临界分支与亚临界分支

若 $\lambda(s)>\lambda_0$,则称$(\lambda(s),x(s))$在 s 点是**超临界分支解**;若 $\lambda(s)<\lambda_0$,则称该解为**亚临界分支解**.

如果 $\sigma'(\lambda_0)>0$,即当 λ 从临界参数值λ_0 的左边变到 λ_0 的右边时,平凡解从稳定变成不稳定,那么由(3-14)式可推知:超临界分支稳定,而亚临界分支不稳定.

4　多重本征值处的分支

4.1　分支点出现的条件

4.1.1　必要条件

设 X,Y 是巴拿赫空间, $F:\mathbf{R}\times X\to Y$ 是 C^m 映射, $m\geq 1$. 若$(\lambda_0,\mathbf{0})\in\mathbf{R}\times X$ 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的分支点,则算子 $\mathrm{D}_xF(\lambda_0,\mathbf{0}):X\to Y$ 没有有界逆.

这是隐函数定理的直接推论.

设 X 是巴拿赫空间, $f:X\to X$ 是 C^m 映射, $m\geq 1$. 若$(\lambda_0,\mathbf{0})\in\mathbf{R}\times X$ 是方程$f(x)=\lambda x$ 的分支点,则 λ_0 必为有界线性算子 $f'(\mathbf{0})$的本征值.

4.1.2　充分条件

设 X 是巴拿赫空间, U 是 $\mathbf{R}\times X$ 中的开集,映射 $F\in C(U,X)$定义为

$$F(\lambda,x)=x-\lambda\mathrm{L}x+\mathrm{h}(\lambda,x).$$

假设:1° $\mathrm{L}:X\to X$ 是紧线性算子, $\mathrm{h}:\mathbf{R}\times X\to X$ 是全连续算子;

2° $\dfrac{1}{\lambda_0}\in\mathbf{R}$ 是 L 的奇代数重数的本征值;

3° 当 $\|x\|\to 0$ 时,在 λ 的有界区间内一致地成立

$$\mathrm{h}(\lambda,x)=o(\|x\|)\ (\text{当}\ \|x\|\to 0\ \text{时}).$$

又设 $x=\mathbf{0}$是 $F(\lambda_0,x)$的孤立零点. 则 λ_0 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的分支点.

上述结论的证明需借助拓扑度理论及孤立解的指数公式.

4.2 全局分支

应用拓扑度及指数的理论,可证明下面的全局分支定理,它是由拉宾诺维奇(Rabinowitz)给出的.

设 X 是巴拿赫空间,$F:\mathbf{R}\times X\to X$ 满足下列条件:

1° $F(\lambda,x)=x-\lambda Ax+g(\lambda,x)$;

2° $A:X\to X$ 是紧线性算子;

3° $g:\mathbf{R}\times X\to X$ 全连续,且在 λ 的有界区间内一致地有

$$g(\lambda,x)=o(\|x\|)(当\|x\|\to 0时).$$

设 $1/\lambda_0$ 是算子 A 的奇代数重数的本征值,S 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的非平凡解集的闭包,C 为 S 中含点 $(\lambda_0,0)\in\mathbf{R}\times X$ 的极大闭连通子集,则以下两条必居其一.

1° C 是非紧的;

2° C 与点 $(\bar\lambda,0)$ 相交,其中 $\bar\lambda\neq\lambda_0$,且 $1/\bar\lambda$ 是 A 的另一个本征值.

4.3 渐近分支点

4.3.1 渐近分支点的概念

设 X,Y 为实线性赋范空间,$F:X\to Y$.如果存在有界线性算子 $A:X\to Y$,使得

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|F(x)-Ax\|}{\|x\|}=0,$$

则称 F 为**渐近线性的**,并称 A 为 F 的**渐近导算子**,记作 $A=F'(\infty)$.

若 $F:X\to Y$ 是全连续的渐近算子,则 $A=F'(\infty):X\to Y$ 是全连续线性算子.

设 X 为巴拿赫空间,$F:\mathbf{R}\times X\to X$.考虑方程

$$F(\lambda,x)=0,$$

设以下条件成立:

1° $F(\lambda,x)=x-\lambda Ax+g(x,\lambda)$;

2° $A:X\to X$ 为全连续线性算子;

3° $g:\mathbf{R}\times X\to X$ 全连续,且在 λ 的有界区间内一致地有

$$\|g(\lambda,x)\|=o(\|x\|)(当\|x\|\to\infty时).$$

如果对任意的 $\varepsilon>0,\rho>0$,存在 (λ,x) 满足方程 $F(\lambda,x)=0$,且 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$,$\|x\|>\rho$,则称 λ_0 为方程 $F(\lambda,x)=0$ 的**渐近分支点**.

注意,当映射 F 满足上述的条件 2°和 3°时,F 对于任何 λ 都是渐近线性的,并且其渐近导算子为 $\mathrm{id}-\lambda A$.

4.3.2 渐近分支点出现的条件

设映射 $F:\mathbf{R}\times X\to X$ 满足前述的三个条件,若 λ_0 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的渐近分支点,则 $1/\lambda_0$ 是算子 A 的本征值.

设映射 $F:\mathbf{R}\times X\to X$ 满足前述的三个条件，若 $1/\lambda_0$ 是 A 的奇代数重数的本征值，则 λ_0 是方程 $F(\lambda,x)=0$ 的渐近分支点.

5 李雅普诺夫-施密特方法

李雅普诺夫-施密特(Schmidt)方法的基本思想是把无穷维问题化为有限维问题来解决. 即把方程 $F(\lambda,x)=0$ 化为两个联立方程，其中的一个方程在分支点附近有唯一解，而另一个方程是有限维方程，在某些特殊情形，这个有限维方程可以用较初等的方法求解. 以下把这个方法简称为 LS 方法，亦称为 LS 约化过程.

5.1 有限维情形

设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 考虑方程

$$F(\lambda,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-\lambda\boldsymbol{x}=0. \tag{5-1}$$

设 λ_0 是 $f'(\mathbf{0})$ 的一个本征值. 令

$$r(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f'(\mathbf{0})\boldsymbol{x}, \tag{5-2}$$

则有 $r(\boldsymbol{x})=o(\|\boldsymbol{x}\|)$(当 $\|\boldsymbol{x}\|\to 0$ 时). 令

$$\lambda=\lambda_0+\tau,\quad \mathrm{L}=f'(0)-\lambda_0 I, \tag{5-3}$$

其中 I 为 $\mathbf{R}^n$ 上的恒等映射，则 L 是线性算子. 于是方程(5-1)可写成等价的形式

$$\mathrm{L}\boldsymbol{x}=h(\tau,\boldsymbol{x}) \tag{5-4}$$

其中

$$h(\tau,\boldsymbol{x})=\tau\boldsymbol{x}-r(\boldsymbol{x}). \tag{5-5}$$

5.1.1 空间 $\mathbf{R}^n$ 的分解

设本征值 λ_0 的几何重数为 $d\leqslant n$，L 的零空间 $N(\mathrm{L})$ 的维数为 m，值域 $R(\mathrm{L})$ 的维数为 $n-m$. 则可选取两个子空间 M 和 E，使得

$$\mathbf{R}^n=M\oplus N(\mathrm{L}),\qquad \mathbf{R}^n=E\oplus R(\mathrm{L}).$$

一种可能的取法是 $M=N(\mathrm{L})^{\perp}$，$E=\mathbf{R}(\mathrm{L})^{\perp}$

5.1.2 LS 约化过程

定义投影算子

$$P:\mathbf{R}^n\to N(\mathrm{L}),\quad Q=\mathrm{id}-P.$$

令 L^* 表示 L 的共轭算子，$N(\mathrm{L}^*)$ 为 L^* 的零空间，$\varphi_1^*,\varphi_2^*,\cdots,\varphi_m^*$ 是 $N(\mathrm{L}^*)$ 的基. 则 P 的具体定义如下：

$$P\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\langle\boldsymbol{x},\varphi_i^*\rangle\varphi_i,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n.$$

此处 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积.

方程(5-4)等价于下列联立方程组：

$$\begin{cases} Ph(\tau,p+q)=0; \\ Lq=Qh(\tau,p+q), \end{cases} \tag{5-6}$$

其中 $x=p+q, p=Px\in N(L), q=Qx\in M$. (5-6)式又可写成如下的形式:

$$\begin{cases} \langle h(\tau,p+q),\varphi_i^*\rangle=0, \quad i=1,2,\cdots,m; & (5\text{-}7)_1 \\ Lq=Qh(\tau,p+q). & (5\text{-}7)_2 \end{cases}$$

称(5-7)式为**LS方程**.

由于 λ_0 是 $f'(0)$ 的本征值,故 $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 没有逆.我们引进所谓"拟逆" L^{-1}: $\mathbf{R}(L)\to M$.将 L^{-1} 作用于 $(5\text{-}7)_2$ 的两端,得

$$q=L^{-1}h(\tau,p+q). \tag{5-8}$$

应用隐函数定理,对于充分小的 $|\tau|$ 和 $\|p\|$,存在唯一的 C^1 函数 $q=\widehat{q}(\tau,p)$ 满足 $(5\text{-}7)_2$ 式.将这个函数代入 $(5\text{-}7)_1$ 式,得

$$\langle h(\tau,p+\widehat{q}(\tau,p)),\varphi_i^*\rangle=0, \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{5-9}$$

这是一个以 τ,p 为未知量的、有 m 个方程的方程组,称(5-9)式为**分支方程**.

这样,通过LS约化过程,原来的 n 维问题就化成了较低维的 m 维问题.

5.2 无穷维情形

5.2.1 弗雷德霍姆算子

设 X,Y 为巴拿赫空间,$A:X\to Y$ 是有界线性算子.如果A是闭值的(指A的值域 $R(A)$ 是 Y 中的闭集),且A及其共轭算子 A^* 的零空间 $N(A)$ 及 $N(A^*)$ 均为有限维子空间,则称A为**线性弗雷德霍姆算子**.A的指数定义为

$$\mathrm{ind}A=\dim N(A)-\dim N(A^*)=\dim N(A)-\dim R(A)^{\perp}.$$

设 U 是 X 中的连通开子集,映射 $F\in C^1(U,Y)$ 称为**非线性弗雷德霍姆算子**,是指F的弗雷歇导数 $F'(x)$ 是线性弗雷德霍姆算子.这时 $F'(x)$ 的指数为

$$\mathrm{ind}F(x)=\dim N(F'(x))-\mathrm{codim}R(F'(x)), \quad x\in U.$$

例1 有限维巴拿赫空间之间的任何光滑算子都是弗雷德霍姆算子.

例2 巴拿赫空间之间的微分同胚是指数为零的弗雷德霍姆算子.

如果 $A:X\to Y$ 是线性弗雷德霍姆算子,则A是双裂的,即

$$X=X_1\oplus X_2, \quad X_2=N(A);$$
$$Y=Y_1\oplus Y_2, \quad Y_1=R(A).$$

由此可知,$A:X_1\to Y_1$ 是满值、一对一的,故它有有界逆.

5.2.2 LS约化过程

设 X,Y 为巴拿赫空间,$F:\mathbf{R}\times X\to Y$ 为 C^p 映射,$p\geqslant 1$.考虑方程

$$F(\lambda,x)=0, \quad F(\lambda_0,x_0)=0 \tag{5-10}$$

在 $(\lambda_0,x_0)\times\mathbf{R}\times X$ 附近的局部小解问题.

设 $A = D_xF(\lambda_0, x_0): X \to Y$ 是弗雷德霍姆算子.

(1) 定义投影算子.根据前述的空间分解,定义

$$P: Y \to Y_2, \quad Q = id - P: Y \to Y_1.$$

则 P,Q 为投影算子.方程 $F(\lambda, x) = 0$ 等价于联立方程组

$$\begin{cases} PF(\lambda, x) = 0; \\ QF(\lambda, x) = 0. \end{cases} \tag{5-11}$$

(2) 应用隐函数定理求解方程

$$QF(\lambda, x_0 + v + u) = 0, \tag{5-12}$$

其中 $x = x_0 + v + u, v \in X_1, u \in X_2$,即得:存在正数 τ, σ_1, σ_2,使当 $|\lambda - \lambda_0| < \tau$, $\| u \| < \sigma_2$时,方程(5-12)在 $\| v \| < \sigma_1$ 内存在唯一的 C^p 解

$$v = V(\lambda, u), \quad V(\lambda_0, 0) = 0.$$

(3) 当 $|\lambda - \lambda_0| < \tau$, $\| v \| < \sigma_1$, $\| u \| < \sigma_2$,并且 $x = x_0 + v + u$ 时,如果(λ, x)是方程(5-10)的解,则(λ, u)必满足方程

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, u) = PF(\lambda, x_0 + V(\lambda, u) + u) = 0; \\ \varphi(\lambda_0, 0) = PF(\lambda_0, x_0 + V(\lambda_0, 0)) = 0. \end{cases} \tag{5-13}$$

反之,若 $|\lambda - \lambda_0| < \tau$, $\| u \| < \sigma_2$ 时,(λ, u)满足(5-13)式.则(λ, x)满足(5-10)式.

方程(5-13)称为分支方程,它是有限维的.

(4) 可以验证,有

$$\varphi(\lambda_0, 0) = 0, \quad D_u\varphi(\lambda_0, 0) = 0. \tag{5-14}$$

下一章将介绍所谓牛顿(Newton)图方法,它可用来求解满足条件(5-14)的一类一维分支方程.

6 牛 顿 图

本章介绍求二元解析方程的局部小解的方法.

6.1 局部解的解析性

讨论方程

$$F(x, y) = 0 \tag{6-1}$$

在点(x_0, y_0)附近的解的性质及求解方法,其中 $F(x, y)$可以是实变元的实值函数,也可以是复变元的复值函数.F 满足条件

$$F(x_0, y_0) = 0, \tag{6-2}$$

且在点(x_0, y_0)处是解析的,即 $F(x, y)$在(x_0, y_0)的某邻域内可表示为一致收敛的幂级数:

$$F(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}(x - x_0)^i(y - y_0)^j, \tag{6-3}$$

其中系数 F_{ij} 由偏导数 $\frac{\partial^{(i+j)}F}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0)$ 的值所确定.

定理 1　假设

$$F_{10} = D_x F(0,0) \neq 0. \tag{6-4}$$

则对于 $y_0 = 0$ 的某邻域中的任何 y,方程(6-1)在 $x_0 = 0$ 的某邻域中存在唯一解 $x = \Phi(y)$,且函数 $\Phi(y)$ 在 $y_0 = 0$ 是解析的,即 $\Phi(y)$ 在 $y_0 = 0$ 的某邻域内可以表示为一致收敛的幂级数

$$\Phi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k y^k, \quad v_k = \frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(0).$$

在实际求解方程(6-1)时,常使用待定系数法,即将表达式 $x = \sum_{k=1}^{\infty} v_k y^k$ 代入(6-1)式,然后通过比较 y 的同次幂系数,依次确定出系数 v_k. 在这个过程中,条件 $F_{10} \neq 0$ 起着关键的作用.

6.2　牛顿图方法

本节讨论 $F_{10} = 0$ 时,方程(6-1)的求解方法.

6.2.1　问题的提出

设有复解析方程

$$F(u, \lambda) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij} u^i \lambda^j = 0, \quad F_{ij} \text{ 为复数}. \tag{6-5}$$

$F: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. 求方程(6-5)在 $\lambda = 0$ 附近满足条件 $\lim_{\lambda \to 0} u(\lambda) = 0$ 的全部连续解 $u(\lambda)$. 换句话说,寻求常数项为零的,可表为 λ 的正升幂形式的级数解.

不妨补充假设

$$\begin{cases} F_{00} = 0; \\ F_{0j} = 0 (j < m), F_{0m} \neq 0; \\ F_{i0} = 0 (i < n), F_{n0} \neq 0. \end{cases} \tag{6-6}$$

事实上,若 $F_{00} \neq 0$,则方程(6-5)没有小解. 若 m 不存在,即所有的 $F_{0j} = 0 (j = 0, 1, \cdots)$,则方程(6-5)必含有 u 的因子;若 n 不存在,即所有的 $F_{i0} = 0 (i = 0, 1, \cdots)$,则(6-5)式必含有 λ 的因子. 我们可以消去这些因子后再进行讨论.

设想所求的解可表为级数

$$u = u_\varepsilon \lambda^\varepsilon + u_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + u_{\varepsilon''} \lambda^{\varepsilon''} + \cdots, \quad \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \cdots, \tag{6-7}$$

将它代入方程(6-5),比较 λ 的相同幂来确定 u_ε 等. 这样得到的级数自然形式地满足(6-5),亦即为形式解. 如果级数收敛,那么它就是真实解,即在其收敛域内满足方程(6-5). 但是,由于 ε 未定,故并不知道哪些项是 λ 的同次幂. 下面用牛顿图的几何方法来寻找 λ 的最低次幂.

6.2.2 方程(6-5)的牛顿图

在平面上引进直角坐标(i,j)，画出非负整数格点. 若 $F_{ij}\neq 0$，就将格点(i,j)标记并称为**有效点**. 例如由(6-6)式可知，$(0,m)$及$(n,0)$都是有效点.

将 j 轴绕点$(0,m)=(i_0,j_0)$逆时针旋转，直到遇到一个有效点为止，得到直线 L_1. 记 L_1 上诸有效点中之 i 坐标最大者为(i_1,j_1)，则 L_1 是点(i_0,j_0)与点(i_1,j_1)的连线. 它的斜率 $\alpha_1=\frac{j_1-j_0}{i_1-i_0}$为有理数. 令 $\varepsilon_1=-\alpha_1=\frac{p_1}{q_1}$，则 L_1 在 j 轴上的截距为 $l_1=\varepsilon_1 i_1+j_1=\varepsilon_1 i_0+j_0=m$.

将 L_1 绕点(i_1,j_1)逆时针旋转，直到遇到一个有效点为止，得到直线 L_2. 记 L_2 上诸有效点中之 i 坐标最大者为(i_2,j_2)，则 L_2 是点(i_1,j_1)与点(i_2,j_2)的连线，它的斜率 $\alpha_2=\frac{j_2-j_1}{i_2-i_1}$是有理数. 令 $\varepsilon_2=-\alpha_2=\frac{p_2}{q_2}$，则 L_2 在 j 轴上的截距为 $l_2=\varepsilon_2 i_2+j_2=\varepsilon_2 i_1+j_1$.

再将 L_2 绕点(i_2,j_2)逆时针旋转，直到遇到一个有效点为止，得到直线 $L_3,\cdots$，如此继续下去，可作出一系列的

直线：$L_1,L_2,L_3,\cdots$；

顶点：$(i_0,j_0),(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots$；

相应的 $\begin{cases}\varepsilon_k=-\alpha_k=p_k/q_k, p_k \text{ 与 } q_k \text{ 为整数：}\\ l_k=\varepsilon_k i_k+j_k=\varepsilon_k i_{k-1}+j_{k-1}.\end{cases}$

它们称为方程(6-5)的**牛顿图**(见图 6-1).

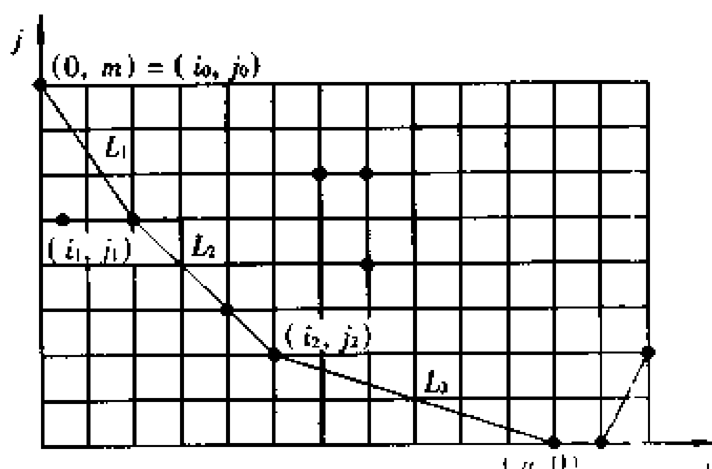


图 6-1

6.2.3 牛顿图的特点

由(6-6)式易见，$(n,0)$必为一顶点(有效点)，即有 $\hat{k}$ 存在，使得$(i_{\hat{k}},j_{\hat{k}})=(n,0)$，而且恰好是 $k=1,2,\cdots,\hat{k}$时，$\varepsilon_k>0$. 换句话说，牛顿图中具有负斜率的直线只

有有限多条(对于讨论局部小解,我们只关心负斜率直线).

任取牛顿图中的一条直线 L 及相应的 ϵ 和 l,设 (i^*,j^*) 为 L 上的有效点,(i,j) 为不在 L 上的有效点.过 (i,j) 作平行于 L 的直线,则它交于 j 轴(截距恰为 $\epsilon i+j$).按牛顿图的作法,恒有

$$\epsilon i + j > \epsilon i^* + j^* = l.$$

这表明 $\epsilon i + j$ 的极小值在 $(i,j)\in L$ 达到.

6.2.4 构造形式解

1. 确定首项

画出方程(6-5)的牛顿图.任取其上一条负斜率直线 L,相应地确定出 $\epsilon = p/q$ 及 l.作代换 $u = v\lambda^\epsilon$,则方程(6-5)写成

$$\begin{aligned} F(u,\lambda) &= F(v\lambda^\epsilon,\lambda) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{ij}v^i\lambda^{\epsilon i+j} \\ &= \Big(\sum_{(i,j)\in L} F_{ij}v^i\Big)\lambda^l + \sum_{(i,j)\bar{\in} L} F_{ij}v^i\lambda^{\epsilon i+j} \\ &= \varphi(v)\lambda^l + o(\lambda^l) = 0. \end{aligned}$$

最后一等式是由于 $(i,j)\bar{\in}L$ 时 $\epsilon i + j > l$,而

$$\varphi(v) = \sum_{(i,j)\in L} F_{ij}v^i.$$

称 $\varphi(v)=0$ 为相应于此 ϵ 值的**定义方程**.只要选 u_ϵ 为定义方程的非零解,则 $u_\epsilon\lambda^\epsilon$ 就可作为(6-7)式的首项,也即将(6-7)式代入(6-5)式时,可使 λ 的最低幂系数为零.

注意　若上面选定的直线 $L = L_k$ 上两端的顶点为 (i_{k-1},j_{k-1}) 与 (i_k,j_k),则

$$\varphi(v) = v^{i_{k-1}}\left(F_{i_{k-1}j_{k-1}} + \cdots + F_{i_kj_k}v^{i_k-i_{k-1}}\right), \tag{6-8}$$

它是 v 的 i_k 次多项式,有 i_{k-1} 重零因子.

2. 确定高次项

为了确定(6-7)式的第二项,可利用代换

$$u = (u_\epsilon + U)\eta^p,\quad \lambda = \eta^q.$$

于是方程(6-5)可写成

$$\begin{aligned} 0 &= F(u,\lambda) = F((u_\epsilon + U)\eta^p,\eta^q) \\ &= A_0(\eta) + A_1(\eta)U + A_2(\eta)U^2 + \cdots \\ &= \sum_{J=J_0}^{\infty}A_{0J}\eta^J + \sum_{J=J_1}^{\infty}A_{1J}\eta^J + \sum_{J=J_2}^{\infty}A_{2J}\eta^J + \cdots. \end{aligned} \tag{6-9}$$

这是 U,η 的整幂解析方程,即在形式上与(6-5)式完全相同,故可仿照前面的作法,利用方程(6-9)的牛顿图(确切地说,是从(6-9)式消去因子 η^{lq} 后的方程的牛顿图)确定(6-9)的形式解

$$U = U_\tau\eta^\tau + U_{\tau'}\eta^{\tau'} + \cdots$$

的首项 $U_\tau\eta^\tau$.回到原来的变量 λ,即得(6-5)式的形式解

$$
\begin{aligned}
u = (u_\varepsilon + U)\eta^\rho &= (u_\varepsilon + U_\tau \eta^\tau + U_{\tau'}\eta^{\tau'} + \cdots)\eta^\rho \\
&= u_\varepsilon \eta^\rho + U_\tau \eta^{\rho+\tau} + \cdots \\
&= u_\varepsilon \lambda^\varepsilon + U_\tau \lambda^{\varepsilon + \frac{\tau}{q}} + \cdots
\end{aligned}
$$

的前两项. 注意,此处要求 τ 由新方程的牛顿图的负斜率直线所决定.

把上述步骤继续作下去,就可得到形式解(6-7)中的各项.

6.3 例

例 1 求方程

$$F(u,\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 u + \lambda u^2 - u^4 = 0$$

的局部小解 $u = u_\varepsilon \lambda^\varepsilon + u_{\varepsilon'}\lambda^{\varepsilon'} + \cdots$ 的前两项.

解 首先作方程的牛顿图(见图 6-2),可知有两条负斜率直线相应于 $\varepsilon = 1$, $\frac{1}{2}$. 对 $\varepsilon = 1$ 作代换 $u = v\lambda$,则方程化为

$$F(v\lambda,\lambda) = (1 + 2v + v^2)\lambda^3 - \lambda^4 v^4 = 0,$$

故相应于 $\varepsilon = 1$ 的定义方程为

$$\varphi(v) = 1 + 2v + v^2 = 0,$$

它有非零解 $u_\varepsilon = -1$(重根).

对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 作代换 $u = v\lambda^{\frac{1}{2}}$,方程化为

$$F(v\lambda^{\frac{1}{2}},\lambda) = \lambda^3 + 2v\lambda^{5/2} + (v^2 - v^4)\lambda^2 = 0,$$

相应于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 的定义方程为

$$\varphi(v) = v^2(1 - v^2) = 0,$$

它有两个非零解 $u_\varepsilon = 1, -1$(单根).

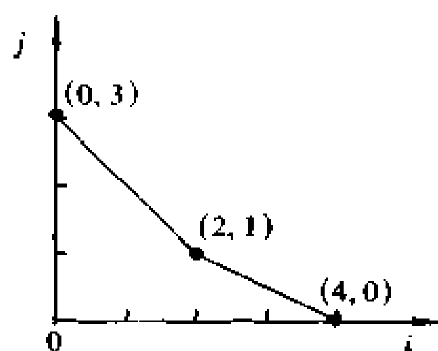


图 6-2

综上所述,形式解的首项可取三种值: $-\lambda, \lambda^{\frac{1}{2}}, -\lambda^{\frac{1}{2}}$.

下面求第二项 $u_{\varepsilon'}\lambda^{\varepsilon'}$. 相应于首项的三种值,我们分三种情况讨论.

(1) 对首项 $u_\varepsilon \lambda^\varepsilon = -\lambda$,作代换 $u = (u_\varepsilon + U)\lambda$,代入方程并消去 λ^3 的因子后,得

$$G(u,\lambda) = -\lambda + 4\lambda U + U^2 - 6\lambda U^2 + 4\lambda U^3 - \lambda U^4 = 0.$$

此方程的牛顿图(见图 6-3)只有一条负斜率直线,它相应于 $\tau = 1/2$. 同前面的方法一样,可求得相应于 $\tau = 1/2$ 的定义方程为

$$\varphi(v) = v^2 - 1 = 0.$$

它有两个非零解 $U_\tau = 1, -1$. 于是形式解 U 的首项可取为 $U_\tau \lambda^\tau = \lambda^{\frac{1}{2}}, -\lambda^{\frac{1}{2}}$,从而原方程的形式解 u 的前两项为

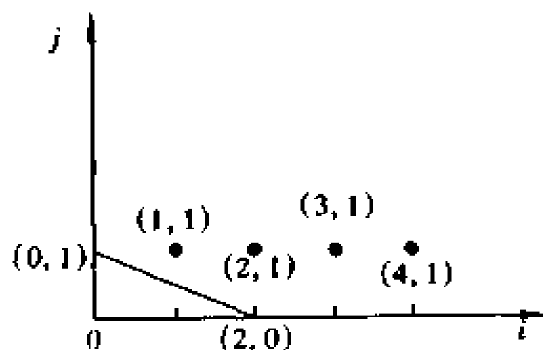


图 6-3

$$u=(u_\varepsilon+U)\lambda=(-1\pm\lambda^{\frac{1}{2}}+\cdots)=-\lambda\pm\lambda^{\frac{3}{2}}+\cdots$$

(2) 对首项 $u_\varepsilon\lambda^\varepsilon=\lambda^{\frac{1}{2}}$，作代换 $u=(u_\varepsilon+U)\eta,\lambda=\eta^2$. 代入方程并消去因子 η^4 后，得

$$G(U,\eta)=\eta^2+2\eta+2\eta U-2U-5U^2-4U-U^4=0.$$

此方程的牛顿图(见图 6-4)只有一条负斜率直线，它相应于 $\tau=1$，而相应的定义方程为

$$\varphi(v)=2-v=0,$$

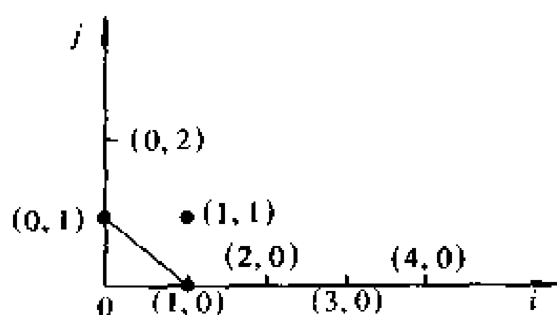


图 6-4

其非零解为 $U_\tau=1$. 因此，形式解 U 的首项为 $U_\tau\eta^\tau=-\tau$. 从而原方程形式解 u 的前两项为

$$u=(u_\varepsilon+U)\eta=\eta-\eta^2+\cdots=\lambda^{\frac{1}{2}}+\lambda+\cdots$$

(3) 对首项 $u_\varepsilon\lambda^\varepsilon=-\lambda^{\frac{1}{2}}$ 可类似地求得

$$u=(u_\varepsilon+U)\eta=-\eta-\eta^2+\cdots$$
$$=-\lambda^{\frac{1}{2}}-\lambda+\cdots$$

最后我们指出，可以在理论上证明，按牛顿图方法可以作出方程(6-5)的局部小解，并且(6-5)的全部小解都可按此法作出.

7　霍普夫分支

发自某个自治常微分方程的平衡点的周期轨道分支，叫做**霍普夫(Hopf)分支**. 这种形式的分支是非线性振动理论中最基本的问题之一.

7.1　主要理论结果

7.1.1　n 维情形

考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+f(\lambda,\boldsymbol{u})=\mathbf{0} \tag{7-1}$$

的周期解分支问题.

设 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射，Ω 是 $(0,\mathbf{0})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的某个开邻域，对每个 $(\lambda,\mathbf{0})\in\Omega$，有 $\boldsymbol{f}(\lambda,\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 于是方程(7-1)有一族平凡解 $\{(\lambda,\mathbf{0})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\mid(\lambda,\mathbf{0})\in\Omega\}$.

问题是：在什么条件下，从上述平凡分枝可以分支出非平凡的周期解？这里周期本身也是未知的.

基本想法是在适当的函数空间中寻找周期解. 为此，把未知周期 $2\pi\rho$ 也隐含到原始方程中去. 对(7-1)式作变量代换 $\tau=\rho^{-1}t$，则(7-1)式化为形式

$$\frac{du}{d\tau}+\rho f(\lambda,u)=0. \tag{7-2}$$

为简单起见，将 $u(t)=u(\rho\tau)$ 仍记作 $u(\tau)$. 于是，只需找出适当的 ρ 和 λ，使得方程(7-2)有 2π 周期解，那么(7-1)式就有 $2\pi\rho$ 周期解.

令 $C_{2\pi}\stackrel{\text{def}}{=\!=}C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 和 $C^1_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 分别表示 $C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 和 $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 中的 2π 周期函数构成的巴拿赫空间，定义范数为

$$\|u\|_{C_{2\pi}}=\max\{|u(\tau)|\,|\,\tau\in\mathbf{R}\},$$

$$\|u\|_{C^1_{2\pi}}=\|u\|_{C_{2\pi}}+\|u'\|_{C_{2\pi}},$$

其中 u' 表示 u 的导数. 令

$$F(\rho,\lambda,u)=u'+\rho f(\lambda,u),$$

于是从对 f 的假设可知，存在 $\alpha>0$ 和 $C^1_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ 中 0 点的邻域 U，使得 $F\in C^2(\mathbf{R}\times(-\alpha,\alpha)\times U,C_{2\pi})$. 由于

$$F(\rho,\lambda,0)=0,\quad 对每个(\rho,\lambda)\in\mathbf{R}\times(-\alpha,\alpha),$$

故问题化为寻求 $F=0$ 的非平凡解.

据隐函数定理知，为了使方程 $F=0$ 在某个点 $(\lambda_0,0)\in\mathbf{R}\times C^1_{2\pi}$ 的任何邻域内存在非平凡解，必须要求 $D_uF(\rho,\lambda_0,0)$ 为奇异的. 为了方便，同时也不失一般性，我们取 $\rho_0=1,\lambda_0=0$. 于是

$$D_uF(1,0,0)v=v'+D_uf(0,0)v,\quad v\in C^1_{2\pi}, \tag{7-3}$$

其中 $D_uf(0,0)$ 为雅可比矩阵. 由常微分方程理论知道，为使 $D_uF(1,0,0)$ 是奇异的，必须而且只须方程

$$v'+L_0v=0(其中\ L_0=D_uf(0,0)) \tag{7-4}$$

在 $C^1_{2\pi}$ 中有非零解. 因此，假设

(H_1) $i=\sqrt{-1}$ 为 L_0 的(代数)单重本征值，且

$$mi\bar{\in}\sigma(L_0),\quad m=1,2,\cdots$$

注意 由于 i 是 $D_uf(0,0)$ 的单重本征值，故存在定义于 $\lambda=0$ 附近的连续可微函数 $\beta(\lambda)$ 和 $x(\lambda)$，使得

$$D_uf(0,0)x(\lambda)=\beta(\lambda)x(\lambda),$$

$$\beta(0)=i,x(0)=x_0\in N(D_uf(0,0)).$$

(H_2) $\mathrm{Re}\beta'(0)\neq0$.

定理 1(霍普夫分支定理) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 为点(0,0)的开邻域，设 $f\in C^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$，$f(\lambda,0)=0(\forall(\lambda,0)\in\Omega)$. 假设($H_1$)与($H_2$)均满足，则存在常数 $\varepsilon>0,\delta>0$ 以及连续可微函数 $(\rho(\cdot),\lambda(\cdot),u(\cdot)):(-\delta,\delta)\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times C^1_{2\pi}$，满足

1° 对于 $s\in(-\delta,\delta),s\neq0$，$(\rho(s),\lambda(s),u(s))$ 为方程(7-2)的非平凡解，且 $\lambda(0)=0,u(0)=0,\rho(0)=1$；

2° 若 $(\tilde\lambda,\tilde u)$ 为方程(7-2)的 $2\pi\tilde\rho$ 周期解，且 $|\tilde\rho-1|<\varepsilon,|\tilde\lambda|<\varepsilon,\|\tilde u\|_{C^1_{2\pi}}<\varepsilon$，则存在 $s\in[0,\delta]$ 和 $\theta\in[0,2\pi]$，使得 $\tilde\rho=\rho(s),\tilde\lambda=\lambda(s),\tilde u(\tilde\rho\tau)=u(s)(\tau+\theta)$，此

处 $\tau\in[0,2\pi]$.

此外,若 $f\in C^k(\Omega,\mathbf{R}^n)$或解析,则函数 $\rho(\cdot),\lambda(\cdot),u(\cdot)$也属于 $C^k(\Omega,\mathbf{R}^n)(k\geqslant2)$或解析.

7.1.2 无穷维情形

设 X 为实巴拿赫空间,$X_C=X+\mathrm{i}X$ 表示其复化空间.如果 L 为 X 上的线性算子,则 L 在 X_C 上的延拓仍记作 L.令 $N(\mathrm{L})$和 $R(\mathrm{L})$分别表示 L 在 X 中的零空间和值域,而在 X_C 中的零空间和值域则分别记作 $N_C(\mathrm{L})$和 $R_C(\mathrm{L})$. L 的谱 $\sigma(\mathrm{L})$总是相对 X_C 的.因此,当且仅当 $\bar{\lambda}\in\sigma(\lambda)$时,$\lambda\in\sigma(\lambda)$.

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{L}_0u+f(\lambda,u)=0. \tag{7-5}$$

作如下假设:

(H_1) $\mathrm{L}_0:\mathrm{D}(\mathrm{L}_0)\subset X\to X$ 是 X 上的稠定线性算子,使 $-\mathrm{L}_0$ 是在 X 上强连续半群的无穷小母元,而半群在 X_C 上是全纯的;

L_0 有紧预解式;i 是 L_0 的单重本征值,$m\mathrm{i}\bar{\in}\sigma(L_0)$, $m=0,2,3,\cdots$.

(H_2) 存在 $\alpha\in(0,1)$以及$(0,0)\in\mathbf{R}\times X_\alpha$ 的邻域Ω,使得 $f\in C^2(\Omega,X)$,$\mathrm{D}_uf(0,0)=0$,并且对每个$(\lambda,0)\in\Omega$,有 $f(\lambda,0)=0$.这里 X_α 表示分数幂算子$(\mathrm{L}_0+rI)^\alpha$ 的定义域,而 $r>-\mathrm{Re}\lambda(\forall\lambda\in\sigma(\mathrm{L}_0))$,在引进范数 $\|u\|_\alpha=\|(\mathrm{L}_0+rI)^\alpha u\|_X$ 之后,X_α 成为巴拿赫空间.

(H_3) 设 $\beta=\beta(\lambda)$是定义在 0 的某邻域的连续函数,$\beta(\lambda)\in\sigma(\mathrm{L}_0+\mathrm{D}_uf(\lambda,0))$,$\beta(0)=\mathrm{i}$,那么,假设 $\mathrm{Re}\beta'(0)\neq0$.

定义 1 若函数 $u\in C_{2\pi\rho}(\mathbf{R},X_\alpha)$在 $\mathrm{D}(\mathrm{L}_0)$中取值,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$存在且于 X 中连续,使得(7-5)式成立,则称 u 为方程(7-5)的解.

定理 2 设(H_1),(H_2)和(H_3)成立,则存在正数 η 和连续可微函数

$$(\rho,\lambda,u):(-\eta,\eta)\to\mathbf{R}^2\times C^0(\mathbf{R},X_\alpha),$$

使得

1° 对于 $0<|s|<\eta$,$u(s)$是(7-5)式相应于 $\lambda=\eta(s)$的 $2\pi\rho(s)$周期解;

2° $\rho(0)=1,\lambda(0)=0$,当 $s\neq0$ 时 $u(s)\neq0$;

3° 方程(7-5)的任意 $2\pi\rho$ 周期解 u,当$|\rho-1|$,$|\lambda|$以及 $\|u\|$(在 $C_{2\pi\rho}(\mathbf{R},X_\alpha)$)充分小时,对某个$|\delta|<\eta$ 都具有上述的形式,除了沿实直线的平移之外.并且如果 $f\in C^{k+1}(\Omega,X_\alpha)$,则函数 ρ,λ,u 是 C^k 类的.

7.2 中心流形定理

用中心流形定理可将高维的霍普夫分支问题化为低维的问题来解决.这一点与 LS 方法的基本思想是类似的.

7.2.1　流

定义 2　设

$$\dot{x}=f(x) \tag{7-6}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中的自治系统,$f(x)(x\in W)$满足解的存在唯一性定理中的条件.记系统(7-6)满足初始条件 $x|_{t=0}=x_0(x_0\in W)$的解为

$$x=\varphi(t,x_0),$$

其中 $t\in J(x_0)$,$J(x_0)$表示初值为 x_0 的存在的最大区间.令区域

$$\Omega \xlongequal{\text{def}} \{(t,x)\in\mathbf{R}\times W, x\in W, t\in J(x)\}\subset\mathbf{R}\times W,$$

则称函数 $\varphi(t,x)\xlongequal{\text{def}}\varphi_t(x)$(即 $\varphi:\Omega\to W$)为系统(7-6)式的流.

在二维系统 $\dot{x}=Ax$ 的情形,流就是 $\varphi(t,x)\xlongequal{\text{def}}e^{At}x$,这里 $\varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$.若固定 x 而让 t 变化,就得到一个映射 $\varphi_t:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$.再令参数 t 变化,就可以想象平面上的点沿着该系统的轨线按箭头所指的方向流动.

定理 3　上述的集合 Ω 是 $\mathbf{R}\times W$ 中的开集,函数 $\varphi:\Omega\to W$ 是 Ω 上的连续函数.

定理 4　流 $\varphi_t(x)$满足

1° $\varphi_0(x)=x$(即 φ_0 是恒等映射);

2° $\varphi_{s+t}(x)=\varphi_s\circ\varphi_t(x)$.

7.2.2　中心流形定理

定理 5　设 W 是 $\mathbf{R}^n$ 内原点 O 的邻域,$\Phi_t(t\geqslant 0)$是流.$\Phi_t:W\to\mathbf{R}^n$,$\Phi_t(0)=0$,$\Phi_t(x)$对 t 及 x 是 C^{k+1}的.设 $D\Phi_t(0):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,它的特征值或在单位圆上,或在单位圆内.令 H 是与单位圆上的那些特征值相应的特征向量空间,则存在 $\mathbf{R}^n$ 中原点 O 的一个邻域 V 和一个 C^k 子流形 M,$0\in M\subset V$,M 与 H 同维数,且在原点 O 与 H 相切,使

1° 若 $x\in M$,$t>0$,又 $\Phi_t(x)\in V$,则 $\Phi_t(x)\in M$;

2° 若 $t>0$,$\Phi_t^n(x)\in V$,$n=0,1,\cdots$,则当 $n\to\infty$ 时,$\Phi_t^n(x)\in M$.

称定理 5 中的 C^k 子流形 M 为中心流形.

7.2.3　三维霍普夫分支定理

定理 6　设开集 $W\subset\mathbf{R}^3$,W 包含原点,$f:W\times(-\lambda_0,\lambda_0)\to\mathbf{R}^3$,$f$ 解析.又设方程

$$\dot{x}=f(x,\lambda) \tag{7-7}$$

对任意的 λ 都以原点 $\mathbf{0}=(0,0,0)$为平衡点.当 $\lambda=0$ 时,方程(7-7)的右端 $f(x,0)$在 $x=\mathbf{0}$处的导算子 $Df(\mathbf{0},0)$以 $\pm i\beta(0)$,$\delta(0)$为特征值,$\beta(0)>0$,$\delta(0)<0$.

如果平衡点(0,0,0)当 $\lambda=0$ 时是渐近稳定的,而 $\lambda>0$ 时是不稳定的,则对充分小的 $\lambda(\lambda>0)$,方程(7-7)在原点附近有渐近稳定的闭轨.

定理 7　设 $W\subset\mathbf{R}^3$ 是开集,$f:W\times(-\lambda_0,\lambda_0)\to\mathbf{R}^3$.$f(x,\lambda)$是 $x\in W$,$\lambda\in$

$(-\lambda_0, \lambda_0)$上的解析函数. 方程(7-7)对任意的 λ 有平衡点 0. 令 $A(\lambda)$表示 $f(x,\lambda)$ 在 $x=0$处对 x 的导算子 $Df(0,\lambda)$, 设 $A(\lambda)$除特征值 $\alpha \pm i\beta(\lambda)$($\alpha(0)=0, \beta(0)>0$)之外, 另一个特征值 $\delta(\lambda)<\overline{\delta}<0$. 又设

$$\frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}>0,$$

则有

1° 若方程 $\dot{x}=f(x,0)$以原点 0 为稳定但不渐近稳定的平衡点, 则这个方程的解在原点附近某一过原点的曲面上全是闭轨;

2° 若方程 $\dot{x}=f(x,0)$以原点 0 为渐近稳定(不稳定)平衡点, 则对充分小的 λ, $\lambda>0$($\lambda<0$), 方程(7-7)在原点附近有渐近稳定(不稳定)的闭轨 Γ_λ, 周期 $T_\lambda \approx \frac{2\pi}{\beta(\lambda)}$. 当 $\lambda \to 0$ 时, Γ_λ 收缩到原点.

参 考 文 献

1 Chow S N, Hale J K. Methods of bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1982.

2 陈文钶. 非线性泛函分析. 兰州: 甘肃人民出版社, 1982.

3 Temme N M. Nonlinear Analysis, Vol 1, Vol 2. Amsterdam: North-Holland, 1976.

4 Ioos G, Joseph D D. Elementary stability and bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1980.

5 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1981.

·近代数学卷·

第15篇

变分不等式

编　者　周叔子
审校者　雷晋干

目　　录

引　　言

"变分不等式"的英文为"variational inequlity",也有人译为"变分不等方程".它起源于数学物理问题和非线性规划问题,目前已在物理、力学、工程、经济等领域中得到广泛应用.

数学物理中最早的变分不等式出现于20世纪60年代初.至1964年,G.Stampacchia把Lax-Milgram定理由希尔伯特(Hilbert)空间推广到其非空闭凸子集的情形,得到了变分不等式的第一个解的存在唯一性定理.其后,J.L.Lions、H.Lewy、H.Brezis等人发表了一系列文章,为变分不等式理论奠定了初步的基础.20世纪70年代,变分不等式在最优控制问题、弹性问题、弹塑性问题及渗流问题等领域中得到了成功的应用.20世纪80年代以来,作为现代偏微分方程理论重要部分的变分不等式理论得到深入发展,至今已较为成熟.另一方面,20世纪60年代中期,在非线性规划的研究中出现了线性和非线性互补问题.它们进一步发展成了有限维空间中的变分不等式.20世纪90年代,Math.Programming杂志出版了非线性互补问题与变分不等式的专辑,标志着变分不等式已成为非线性规划的一个重要研究领域.

1　变分不等式概念

1.1　例　　子

变分原理是数学物理方法的一个重要部分.以弹性薄膜平衡问题为例,设薄膜张于xy平面区域Ω上,边界固定,其弹性模量与面密度设为1,垂直外力$f(x,y)$作用下产生弹性小变形,垂直位移为$u(x,y)$,则由最小位能原理,$u(x,y)$使位能最小,即$u(x,y)$为下列最小化问题之解:求$u\in H_0^1(\Omega)$,使

$$J(u)=\min_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v), \tag{1-1}$$

其中

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega fu\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面,由虚功原理可知$u(x,y)$满足下述虚功方程

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{1-2}$$

从数学上容易证明(1-1)式与(1-2)式等价.从变分法易知,(1-1)式的欧拉方程为

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & 于\ \Omega;\\ u=0, & 于\ \partial\Omega.\end{cases} \tag{1-3}$$

对上例在应用变分原理时容许函数集为整个线性空间 $H_0^1(\Omega)$，从而得到等式(方程)形式的问题(1-2)和(1-3).若容许函数集不是整个线性空间而是这个空间的凸子集，将会得到不等式形式的问题，即**变分不等式**.因此，变分不等式是变分原理的一个重要推广.

例1　带障碍的弹性薄膜平衡问题.

设前述薄膜下方有一障碍物，其表面方程为 $z = \varphi(x,y)$，$\varphi \leqslant 0$，于 $\partial\Omega$，此时位移 $u(x,y)$ 除在边界 $\partial\Omega$ 上满足约束 $u = 0$ 外，还须在 Ω 上满足约束条件

$$u \geqslant \varphi, \quad 于\ \Omega. \tag{1-4}$$

因此，位移函数的容许集不再是整个线性空间 $H_0^1(\Omega)$，而是它的如下子集：

$$K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\}.$$

设 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$，$\varphi \leqslant 0$，于 $\partial\Omega$，则容易证明 K_1 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的非空闭凸子集.由最小位能原理，此时的位移 u 为下述最小化问题的解：求 $u \in K_1$，使

$$J(u) = \min_{v\in K_1} J(v). \tag{1-5}$$

设 u 为方程(1-5)之解，因 K_1 为凸集，故当 $v \in K_1$ 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时 $u + \alpha(v - u) \in K_1$.由(1-5)式得：

$$J(u) \leqslant J(u + \alpha(v - u)), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, v \in K_1.$$

令 $I(\alpha) = J(u + \alpha(v - u))$，上式可写成

$$I(0) \leqslant I(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

即一元函数 $I(\alpha)$ 在 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 的最小值于左端点 $\alpha = 0$ 处达到，故 $I'(0) \geqslant 0$.容易算出，

$$I'(0) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega f(v - u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以方程(1-5)之解满足：

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_\Omega f(v - u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in K_1. \end{cases} \tag{1-6}$$

反之易证，方程(1-6)之解必是(1-5)之解.从而问题(1-6)与方程(1-5)等价.称形如(1-6)式的问题为**变分不等式**.当(1-6)式之解 $u \in H^2(\Omega)$ 时，可以证明 u 满足：

$$\begin{cases} -\Delta u \geqslant f, & 于\ \Omega; \\ u \geqslant \varphi, & 于\ \Omega; \\ (-\Delta u - f)(u - \varphi) = 0, & 于\ \Omega. \end{cases} \tag{1-7}$$

形如(1-7)式的问题称为**线性互补问题**.与(1-3)式不同，此时的 u 在 Ω 上只满足不等式 $-\Delta u \geqslant f$，但在集合 $\{(x,y) \in \Omega: u > \varphi\}$ 上满足方程 $-\Delta u = f$.在**贴合集** $\{(x,y) \in \Omega: u = \varphi\}$ 上则往往成立 $-\Delta u > f$.

记

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f(v) = \int_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $J(u)$ 可以写成

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u).$$

(1-6) 式可写成：$u \in K_1$，使

$$a(u, v-u) \geqslant f(v-u), \quad \forall v \in K_1. \tag{1-8}$$

易算出 $J(v)$ 在 $v = u$ 的弗雷歇(Frechét)微分为

$$J'(u,\varphi) = a(u,\varphi) - f(\varphi), \quad \varphi = v - u,$$

故(1-8) 式即是 $J'(u,\varphi) \geqslant 0$.

例 2　简化的 Signorini 问题.

设 $u(x,y)$ 为平面温度场，导热系数为 1，f 为热源，则热平衡方程为

$$-\Delta u = f, 于 \Omega.$$

设 $\Gamma \cup \Gamma^* = \partial\Omega, \Gamma \cap \Gamma^* = \varnothing$，$\Gamma^*$ 上已知热流 $\frac{\partial u}{\partial v} = g$，此处 v 为 $\partial\Omega$ 的外法向. 又设 Γ 只能单向导热，热量只能内流而不能外流，于是

$$\frac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0, 于 \Gamma.$$

再设 Γ 内沿温度高于环境温度 ψ，即

$$u \geqslant \psi, 于 \Gamma.$$

由热力学可知，在 $u > \psi$ 处必成立 $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$，故

$$(u - \psi)\frac{\partial u}{\partial v} = 0, 于 \Gamma.$$

因此得到如下的边值问题：

$$\begin{cases} -\nabla u = f, & 于 \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = g, & 于 \Gamma^*, \\ u \geqslant \psi, \dfrac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0, & 于 \Gamma, \\ (u-\psi)\dfrac{\partial u}{\partial v} = 0, & 于 \Gamma. \end{cases} \tag{1-9}$$

可以证明，(1-9) 式的弱形式为

$$\begin{cases} u \in K_2, \\ a(u, v-u) \geqslant f(v-u), \forall v \in K_2, \end{cases} \tag{1-10}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f(v) = \int_\Omega fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma^*} gv\mathrm{d}S.$$

$$K_2 = \{v : v \in H^1(\Omega), v \geqslant \psi, 于 \Gamma\}.$$

与例1中一样可以证明,(1-10)式有等价的最小化问题:

$$\begin{cases} u \in K_2; \\ J(u) = \min_{v \in K_2} J(v), \end{cases} \tag{1-11}$$

其中 $J(v) = a(v,v)/2 - f(v)$.

例3　常截面杆的弹塑性扭转问题.

设常截面匀质杆的截面为平面有界单连通区域 Ω. 在杆的两端加以大小相等方向相反的扭矩. 设无体载荷与面载荷,且不考虑热效应. 于是,每个断面对邻近的断面有无穷小刚性转动,求应力分布. 以截面为 xy 平面,在弹性小变形时只有两个切应力 σ_{xx} 与 σ_{xy} 不为零,且存在应力函数 $u(x,y)$,使

$$\begin{cases} u_x = -\sigma_{xy}, u_y = \sigma_{xx}, & 于\ \Omega; \\ u = 0, & 于\ \partial\Omega. \end{cases}$$

由平衡方程推出,u 使下述泛函取极小值

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\alpha G\int_\Omega v\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1-12}$$

其中,α 为沿 z 轴单位长的扭角,G 为切变弹性模量.

在弹塑性小变形时,由 Von Mises 屈服准则,应力函数 u 服从约束 $|\nabla u| \leqslant k$. 因此,容许应力函数集为

$$K_3 = \{v \in H_0^1(\Omega): |\nabla v| \leqslant k, 于\ \Omega\}. \tag{1-13}$$

于是,问题化为求 $u \in K_3$,使

$$J(u) = \min_{v \in K_3} J(v), \tag{1-14}$$

其中 $J(v)$ 由(1-12)式给出. 易知(1-13)式定义的 K_3 是凸集,从而与例1类似可证:(1-14)式等价于下列变分不等式:求 $u \in K_3$,使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2\alpha G\int_\Omega (v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in K_3. \tag{1-15}$$

例4　带障碍的薄板弯曲问题.

设弹性薄板置于刚性物体上,板面 Ω 上承受荷载 $f(x,y)$,刚性物体表面为 $\varphi(x,y)$,板边界 $\partial\Omega$ 固支,即

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad 于 \quad \partial\Omega.$$

于是,容许挠度集为

$$K_4 = \{v \in H_0^2(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\},$$

而挠度 $u(x,y)$ 为下述最小化问题之解:求 $u \in K_4$,使

$$J(u) = \min_{v \in K_4} J(v), \tag{1-16}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v),$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\Delta u\Delta v - (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f(v)=\int_{\Omega}fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(1-16) 式等价于下述变分不等式：求 $u\in K_4$，使

$$a(u,v-u)\geqslant f(v-u),\quad \forall v\in K_4. \tag{1-17}$$

可以证明：当 $u\in H^4(\Omega)$ 时，也为下述线性互补问题之解：$u\in H_0^2(\Omega)$，且

$$\begin{cases}u\geqslant\varphi,\quad \Delta^2u-f\geqslant 0, & 于\ \Omega;\\ (u-\varphi)(\Delta^2u-f)=0, & 于\ \Omega.\end{cases} \tag{1-18}$$

例 5　单相 Stefan 问题.

设一块冰置于水中逐渐溶化，求温度分布函数 θ.

为简单计只考虑一维情形，此时问题化为：求温度函数 $\theta(x,t)$ 及冰与水的分界点与时间的关系 $t=s(x)$，使

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\theta}{\partial t}, & 于\ \Omega_t;\\ \theta=0,\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=-k, & 于\ \Gamma;\\ \theta(x,0)=h(x), & 于\ 0<x<S_0;\\ \theta(0,t)=g(t), & 于\ 0<t<T,\end{cases} \tag{1-19}$$

其中 $\Omega_t=\{(x,t):s(x)<t<T\}$，$\Gamma=\{(x,t):t=s(x)\}$，$h(x)>0$ 为初始温度，$g(t)\geqslant 0$ 为 $x=0$ 处的水温，$k>0$ 为溶化热系数，$x=s_0$ 为初始时刻水与冰的分界点.适当选取 $R>s_0$，作变换

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{s(x)}^{t}\theta(x,\tau)\mathrm{d}\tau, & 当\ s(x)\leqslant t\leqslant T,s_0\leqslant x\leqslant \mathbf{R}\ 时;\\ 0, & 当\ 0\leqslant t\leqslant s(x),s_0\leqslant x\leqslant\mathbf{R}\ 时;\\ \displaystyle\int_0^t\theta(x,\tau)\mathrm{d}\tau, & 当\ 0\leqslant t\leqslant T,0\leqslant x\leqslant s_0\ 时,\end{cases}$$

则可以证明(详见文献[4])，$u(x,t)$ 为下列变分不等式的解：求 $u\in L^2(0,T;H^2(0,\mathbf{R}'))\cap K$，使 $u_t\in K$，$u=0$，于 $x=R$ 或 $t=0$，$u=\psi$，于 $x=0$，且

$$\int_0^R\left(-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)(v-u)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^R f(v-u)\mathrm{d}x,\ \forall v\in K,0<t<T, \tag{1-20}$$

其中

$$\psi(t)=\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad 0\leqslant t\leqslant T;$$

$$f(x)=\begin{cases}h(x), & 0\leqslant x<s_0;\\ -k, & s_0\leqslant x\leqslant R,\end{cases}$$

$$K=\{v\in L^2(0,R):v\geqslant 0,于\ 0\leqslant x\leqslant R\},$$

在问题(1-19)中，定解区域的部分边界 $t=s(x)$ 也是待求的，这类问题称为**自由边界问题**.

本例中的变分不等式涉及抛物型偏微分算子,称为抛物变分不等式.例1至例4中的变分不等式只涉及椭圆型偏微分算子,称为椭圆变分不等式.类似地有双曲变分不等式,可参看文献[4].以下只讨论椭圆变分不等式.

关于变分不等式的其他例子,可参看文献[1～6].关于证券问题的变分不等式的例子,可参看 C.R.Acad.Sci.Paris,1993:317,857－862.

1.2 定 义

设 X 为自反巴拿赫(Banach)空间,对偶空间为 X',对偶积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$,$K$ 为 X 的闭凸子集.

定义1 X 上的变分不等式定义为:求 $u\in K$,使

$$\langle Au,v-u\rangle\geqslant 0,\quad \forall v\in K,\tag{1-21}$$

其中 A 为 $K\to X'$ 的算子.

在例1中,$X=H_0^1(\Omega)$,$X'=H^{-1}(\Omega)$,$K=K_1$,$Au=-\Delta u-f$.

下面定义希尔伯特空间中两类常用的椭圆变分不等式.

设 V 为实希尔伯特空间,内积为 $(\cdot,\cdot)$,伴随的范数为 $\|\cdot\|$;$a(\cdot,\cdot)$ 为 $V\times V$ 上的双线性型.若有 $\alpha>0$,使

$$a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|^2,\quad \forall v\in V,$$

则称 $a(u,v)$ 为在 V 上强制的或 V-椭圆的.若有 $M>0$,使

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|\cdot\|v\|,\quad \forall u,v\in V,$$

则称 $a(u,v)$ 在 V 上连续.设 L 为 $V\to\mathrm{R}$ 的连续线性泛函.设 K 为 V 中的闭凸子集.

定义2 第一类椭圆变分不等式定义为:求 $u\in K$,使

$$a(u,v-u)\geqslant L(v-u),\quad \forall v\in K.\tag{1-22}$$

当 $a(u,v)$ 对称时,与例1同样可以证明,(1-22)式等价于下述最小化问题:求 $u\in K$,使

$$J(u)=\min_{v\in K}J(v),\tag{1-23}$$

其中

$$J(v)=a(v,v)/2-L(v).$$

例1至例4都是第一类椭圆变分不等式.例1与例4中的约束是障碍函数 φ,称为**障碍问题**,也称为**单障碍问题**;如果约束的形式是

$$\varphi\leqslant v\leqslant\psi,$$

则称为**双障碍问题**.例2也称为**边界单边约束问题**.例3称为**带梯度约束的问题**.例1至例3中的微分算子是拉普拉斯算子,例4中是重调和算子.均可推广到 $2m$ 阶自共轭线性椭圆算子.

下面对例1作较详细的讨论.(1-7)式可以写成如下形式:

$$\min\{-\Delta u-f,u-\varphi\}=0,\text{于}\ \Omega.\tag{1-24}$$

这种形式的方程称为哈密顿-雅可比-贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程,简称为 HJB 方程.不少作者以此为出发点研究障碍问题.

例1中的狄利雷(Dirichlet)边界条件是加在整个 $\partial\Omega$ 上的,即 $v=0$,于 $\partial\Omega$.若

仅加于部分边界,即

$$K_1 = \{v \in H^1(\Omega): v = 0,\text{于 } \partial_1\Omega, v \geqslant \varphi, \text{于 } \Omega\},$$

且

$$\partial_1\Omega \subset \partial\Omega, \mathrm{mes}\,\partial_1\Omega > 0,$$

$$\mathrm{mes}(\partial\Omega \setminus \partial_1\Omega) > 0,$$

则变分不等式(1-6)的解是否满足诺伊曼(Neumann)条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{于} \quad \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega?$$

在 $\varphi = -\infty$ 的情形,即方程的情形,如所周知,答案是肯定的.在 $\varphi \in H^2(\Omega), \varphi \leqslant 0$,于 $\partial_1\Omega$ 时,答案如下(参看 M.K.V.Murthy and G.Stampacchia. Israel math.Journal, 1972:13,188 ~ 224):

若有 $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ 的开子集 E_1 使 $u > \varphi$,于 E_1,则$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$,于 E_1;

若在 $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ 的子集 E_2 上 $u = \varphi$ 且$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} < 0$,则$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$,于 E_2;

若在 $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ 的子集 E_3 上 $u = \varphi$ 且$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} > 0$,则$0 \leqslant \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}$,且有例子表明,可成立$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$,于 E_3.这是与方程情形的一个重要区别,值得注意.

现在来定义第二类椭圆变分不等式.设 $j: V \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 为凸的下半连续正常(即 $j \not\equiv +\infty$)泛函.

定义 3　第二类椭圆变分不等式定义为:求 $u \in V$,使

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant L(v-u), \quad \forall v \in V. \tag{1-25}$$

例 6　简化的摩擦问题.

设 $V = H^1(\Omega)$,求 $u \in V$,使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega u(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g\int_{\partial\Omega}(|v| - |u|)\mathrm{d}s \geqslant L(v-u), \forall v \in V, \tag{1-26}$$

其中 $g > 0$ 为常数.显然,$j(v) = \int_{\partial\Omega} g|v|\mathrm{d}s$ 是 V 上的下半连续凸正常泛函,从而(1-26)式是一个第二类椭圆变分不等式.

当 $a(u,v)$ 对称时,(1-26)式等价于下列最小化问题:求 $u \in V$,使

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v), \tag{1-27}$$

此处

$$J(v) = a(v,v)/2 + j(v) - L(v).$$

2 解的存在唯一性

2.1 有限维情形

考虑变分不等式(1-21).设 $X = \mathbf{R}^N$,则 $X' = \mathbf{R}^N$,A 为 $K \to \mathbf{R}^N$ 的算子.求 $u \in K$,使

$$(\mathrm{A}u, v - u) \geqslant 0, \quad \forall v \in K. \tag{2-1}$$

变分不等式(2-1)不必有解.例如,当 $N = 1, K = \mathbf{R}^1$ 时,对 $\mathrm{A}x = x^2 + 1$,

$$\mathrm{A}x(v - x) = (x^2 + 1)(v - x) \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathbf{R}^1$$

显然无解.当 K 为紧集时有下述存在性定理.

定理 1 设 K 是 $\mathbf{R}^N$ 中的紧凸集,算子 A 连续,则(2-1)式有解.

定理 1 可用布劳威尔(Brouwer)不动点定理证明(参看文献[4]).

推论 1 设 u^* 是方程(2-1)的解.若 u^* 在 K 的内部,则 $\mathrm{A}u^* = \mathbf{0}$;若 u^* 在 K 的边界上且 $\mathrm{A}u^* \neq \mathbf{0}$,则 K 在超平面 $(\mathrm{A}u^*, v - u) = 0, v \in \mathbf{R}^N$ 的一侧,称此超平面为 K 的一个**支撑面**(hyperplane of support).

现在考虑 K 不是紧集的情形.设 B_R 为以原点为心、R 为半径的球,记 $K_R = K \cap B_R$.由定理 1 知,当 K_R 非空时,变分不等式

$$\begin{cases} u_R \in K_R; \\ (\mathrm{A}u_R, v - u_R) \geqslant 0, \forall v \in K_R \end{cases} \tag{2-2}$$

至少有一个解.由此可以得到(参看文献[4]):

定理 2 设 K 为 $\mathbf{R}^N$ 中闭凸集,A 连续.则(2-1)式有解的充分必要条件是:存在 $R > 0$,使(2-2)式的解满足 $\| u_R \| < R$.

定义 1 若存在 $u_0 \in K$,使

$$\frac{(\mathrm{A}u - \mathrm{A}u_0, u - u_0)}{\| u - u_0 \|} \to \infty, \text{当 } u \in K, \| u \| \to \infty \text{ 时},$$

则说算子 A 满足**强制性条件**.

定理 3 若 K 为闭凸集,且算子 A 满足强制性条件,则方程(2-1)必有解.

问题(2-1)的解不必唯一,例如,当 $N = 1, K = \mathbf{R}_+^1 = \{v \in \mathbf{R}^1, v \geqslant 0\}$ 时,变分不等式

$$(u - 2)(u - 1)(v - u) \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathbf{R}_+^1$$

有三个解 $u = 0,1,2$.

定义 2 若算子 A 满足

$$(\mathrm{A}u - \mathrm{A}u', u - u') \geqslant 0, \quad \forall u, u' \in K,$$

则称 A 为**单调算子**.若上式成立且等号仅当 $u = u'$ 时成立,则称 A 为**严格单调算子**.

定理 4 若 K 为闭凸集且算子 A 为严格单调算子,则(2-1)式至多有一个解.

推论 2 若 K 为闭凸集，且算子 A 为严格单调算子，又满足强制性条件，则 (2-1) 式存在唯一解.

第 1 章中的例表明，变分不等式在一定条件下与最小化问题等价. 现在研究与 (2-1) 式相关的最小化问题. 设有 $f \in C^1(K)$，使

$$\mathrm{A}\boldsymbol{u} = \nabla f(\boldsymbol{u}), \quad \forall \boldsymbol{u} \in K. \tag{2-3}$$

于是有下面定理.

定理 5 若(2-3) 式成立，且 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \in K, \\ f(\boldsymbol{u}) = \min\limits_{\boldsymbol{v} \in K} f(\boldsymbol{v}), \end{cases} \tag{2-4}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 为(2-1) 式之解. 反之，若 f 还是凸函数，则(2-1) 式之解必是(2-4) 式之解.

第 1 节的例还表明，变分不等式与互补问题有密切联系. 令

$$\mathbf{R}_+^N = \{x \in \mathbf{R}^N : x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, N\}.$$

互补问题为：求 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}_+^N$，使

$$\begin{cases} \mathrm{A}\boldsymbol{u} \geqslant 0; \\ (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0. \end{cases} \tag{2-5}$$

定理 6 设 $K = \mathbf{R}_+^N$，则变分不等式(2-1) 与互补问题(2-5) 等价.

当 A 为线性算子时，(2-5) 式就是**线性互补问题**. 它等价于障碍为零的障碍问题. 对一般障碍条件：$\boldsymbol{u} \geqslant \varphi$，相应障碍问题的等价互补问题为：求 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^N$，使

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varphi} \geqslant 0, \mathrm{A}\boldsymbol{u} \geqslant 0; \\ (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varphi}) = 0. \end{cases} \tag{2-6}$$

2.2 一般情形

回到变分不等式(1-21) 的一般情形，此时 X 为自反巴拿赫空间. 与定义 1 和 2 一样可以定义强制性条件和单调算子.

定义 3 若对 X 的任一个有限维子空间 M，算子 A 在 $K \cap M$ 上的限制是弱连续的，则称算子 A 在有限维子空间上连续.

Minty 引理 若 K 为 X 中的闭凸集，A 为单调算子且在有限维子空间上连续，则问题(1-21) 等价于下述问题：求 $u \in K$，使

$$\langle \mathrm{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in K. \tag{2-7}$$

定理 7 若 K 为 X 中有界闭凸集，A 为单调算子且在有限维子空间上连续，则 (1-21) 式有解；若 A 还是严格单调的，则解唯一.

定理 8 设 K 为 X 中的闭凸集，A 为单调算子且在有限维子空间上连续. 变分不等式(1-21) 有解的充分必要条件是有 $R > 0$，使变分不等式

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_R \in K_R = K \cap \{\boldsymbol{v} \in X : \|\boldsymbol{v}\| \leqslant R\}; \\ \langle \mathrm{A}\boldsymbol{u}_R, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_R \rangle \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in K_R \end{cases}$$

的解满足 $\|\boldsymbol{u}_R\| < R$.

推论 3 设 K 为 X 中闭凸集，A 为单调算子，满足强制性条件且在有限维子空

间上连续，则(1-21)式有解；若A还严格单调，则解唯一.

例1 半线性算子双障碍问题.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是有界域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，$\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，$\varphi_1 \leqslant 0 \leqslant \varphi_2$，于 $\partial\Omega$. 令

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega): \varphi_1 \leqslant v \leqslant \varphi_2, 于\ \Omega\}.$$

又设 $F(x,u)$ 在 $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^1$ 的紧子集上有界可测，且对 u 连续、非减. 定义算子A如下：

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle -\Delta u + F(x,u), \varphi\rangle$$
$$= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + F(x,u)\varphi)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), u \in K.$$

容易证明，A在 K 上满足强制性条件且是严格单调算子，并在有限维子空间上连续. 于是双障碍问题

$$\begin{cases} u \in K; \\ \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla(v-u) + F(x,u)(v-u))\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall v \in K \end{cases}$$

有唯一解.

例2 拟线性算子单障碍问题.

考虑拟线性椭圆算子

$$\langle Au, \varphi\rangle = \int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{(\alpha-2)/2} \nabla u \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in H_0^{1,\alpha}(\Omega),$$

与凸集

$$K = \{v \in H_0^{1,\alpha}(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\},$$

其中 Ω 同例1，$\varphi \in H^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，$\varphi \leqslant 0$，于 $\partial\Omega$，$1 < \alpha \leqslant 2$. 算子A将 $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ 映射到 $H^{-1,\alpha'}(\Omega)$. 显然，A是严格单调算子且在有限维子空间上连续，不难证明A满足强制性条件. 因此，变分不等式：求 $u \in K$，使

$$\int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{(\alpha-2)/2} \nabla u \cdot (v-u)\mathrm{d}x \geqslant \langle f, v-u\rangle, \quad \forall v \in K. \quad (2\text{-}8)$$

当 $f \in H^{-1,\alpha'}(\Omega)$ 时，有唯一解. 当 $\alpha = 1$ 时，算子A是最小曲面算子或指定平均曲率算子. 此时定理8的条件不满足. 可以证明，即使对 $f = 0$，(2-8)式也可以无解，参看 Serrin, J, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. 1969: A 264, 413 ~ 496.

2.3 希尔伯特空间情形

先考虑第一类椭圆变分不等式(1-22).

定理9 设 K 为希尔伯特空间 V 的非空闭凸子集，$L \in V'$，$a(u,v)$ 为 $V \times V$ 上连续、强制双线性型，则变分不等式(1-22)有唯一解.

由里斯(Riesz)表现定理易知，有连续线性算子 A: $V \to V'$，使

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

不难验证算子A满足定理8的条件，从而定理9可由定理8推出.

当 $a(u,v)$ 还满足对称性条件时，问题(1-22)等价于(1-23)式. 此时可用最优

化理论推出定理 9. 事实上，在此情形，易验证 $a(u,v)$ 是严格凸泛函，从而 $J(v)$ 是严格凸泛函，且是连续泛函. 于是，由最优化理论可知(1-23) 式有唯一解. 由优化理论，此时(1-23) 式等价于：求 $u \in K$，使

$$(J'(u), v-u) \geqslant 0, \quad \forall v \in K. \tag{2-9}$$

其中 $J'(u)$ 为 $J(u)$ 的 Gateau 导数. 易算出

$$J'(u) = a(u,\cdot) - L(\cdot),$$

故(2-9) 式就是(1-22) 式.

由定理 9 不难推出例 1 至例 4 所述问题解的存在唯一性.

当 $a(u,v)$ 不是强制双线性型时，解的唯一性可能丧失，这时由 Minty 引理(见 2.2 节) 可以推出如下结果.

定理 10　设 K 为希尔伯特空间 V 中非空闭凸子集，$L \in V'$，$a(u,v)$ 为 $V\times V$ 上连续双线性型，且 $a(u,v) \geqslant 0$，$\forall v \in K$，则(1-22) 式的解集是一个闭凸集(参看文献[4]).

关于第二类变分不等式(1-25)，有下述定理.

定理 11　设 K 是希尔伯特空间 V 中的非空闭凸子集，$L \in V'$，$j(v)$ 为 V 上的下半连续凸正常泛函，$a(u,v)$ 为 $V\times V$ 上连续强制双线性型，则问题(1-25) 有唯一解.

3　解的正则性

3.1　障碍问题

设 Ω 为 $\mathbf{R}^N$ 中有界域，$\partial\Omega \in C^2$. 考虑障碍问题：求 $u \in K$，使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x, \forall v \in K, \tag{3-1}$$

其中

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\},$$

$\varphi \in H^1(\Omega)$，$f \in L^2(\Omega)$，$\varphi \leqslant 0$，于 $\partial\Omega$.

由上章定理 9 易知此问题有唯一解. 关于解的光滑性有如下结果.

定理 1　设 $n \geqslant 2$，$f \in L^p(\Omega)$，$p > n$，$\varphi \in H^{2,p}(\Omega)$，$\varphi < 0$，于 $\partial\Omega$. 若 u 为障碍问题(3-1) 之解，则 $u \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$，其中 $\lambda = 1 - N/p$.

此定理的证明基于 Minty 引理和惩罚法(penalization). 使用惩罚法时的罚问题可如下导出：记 $I = \{x \in \Omega: u(x) = \varphi(x)\}$，它被称为 u 的贴合集(coincidence set). 于是

$$\Omega \setminus I = \{x \in \Omega: u(x) > \varphi(x)\},$$

不难推出，在 $L^2(\Omega)$ 意义下成立

$$-\Delta u - f \geqslant 0, \quad \text{于 } \Omega,$$
$$-\Delta u = f, \quad \text{于 } \Omega \setminus I.$$

所以，直观上可以认为

$$-\Delta u = \begin{cases} f, & \text{于 } \Omega \setminus I, \\ -\Delta\varphi, & \text{于 } I, \end{cases}$$

即
$$-\Delta u = \max\{0, -\Delta\varphi - f\}\theta_0(u-\varphi) + f, \tag{3-2}$$

其中

$$\theta_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \leqslant 0 \text{ 时}; \\ 0, & \text{当 } t > 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

(3-2) 式是一个带间断非线性有右端项的半线性椭圆偏微分方程. 证明定理 1 的基本思想是，用连续函数 $\theta_\epsilon(t)$ 代替间断函数 $\theta_0(t)$，其中

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \leqslant 0 \text{ 时}; \\ 1 - t/\epsilon, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant \epsilon \text{ 时}; \\ 0, & \text{当 } t \geqslant \epsilon \text{ 时}. \end{cases}$$

于是，得到所谓惩罚问题

$$\begin{cases} u_\epsilon \in H_0^1(\Omega); \\ -\Delta u_\epsilon = \max\{0, -\Delta\varphi - f\}\theta_\epsilon(u_\epsilon - \varphi) + f, \text{于 } \Omega. \end{cases} \tag{3-3}$$

然后证明(3-3) 式之解 $u_\epsilon \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$，且当 $\epsilon \to 0^+$ 时，u_ϵ 在 $H^{2,p}(\Omega)$ 中弱收敛于(3-1) 式之解 u，从而 $u \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$.

进一步可以证明，$\epsilon > 0$ 时，序列 $\{u_\epsilon\}$ 对 ϵ 非减且

$$u \leqslant u_\epsilon \leqslant u + \epsilon, \quad \text{于 } \Omega. \tag{3-4}$$

另一方面，定义

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \leqslant -\epsilon \text{ 时}; \\ -t/\epsilon, & \text{当 } -\epsilon \leqslant t \leqslant 0 \text{ 时}; \\ 0, & \text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

则(3-3)式的相应解序列 $\{\tilde{u}_\epsilon\}$ 对 ϵ 是不增的.

障碍问题(3-1)中的微分算子是拉普拉斯算子，将它用一般的二阶一致椭圆算子代替时，即

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \mathrm{d}x,$$

其中 $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$，且

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \|\xi\|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^N$$

时，定理 1 也成立.

另外，当 $p = 2$ 时，定理 1 的条件中，可用“Ω 凸”代替 $\partial\Omega \in C^2$.

问题(3-1) 中凸集 K 的边界条件是狄利克雷(Dirichlet) 条件，下面考虑混合型边界条件的情形，即：求 $u \in K$，使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x, \forall v \in K, \tag{3-5}$$

其中

$$K = \{v \in H^1(\Omega): v = g, 于\ \partial_1\Omega, v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\},$$
$$g \in H^1(\Omega), \qquad g \geqslant \varphi, 于\ \partial_1\Omega,$$
$$\partial\Omega = \overline{\partial_1\Omega} \cup \partial_2\Omega, \qquad \partial\Omega, \partial_1\Omega, \partial_2\Omega \in C^{0,1},$$
$$\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \varnothing.$$

由 1.2 的讨论可知，当(3-5) 式的解 $u \in H^2(\Omega)$ 且 $\varphi \in H^2(\Omega)$ 时，u 满足 $0 \leqslant \frac{\partial u}{\partial v} \leqslant \frac{\partial \varphi}{\partial v}$，于 $\partial_2\Omega$，且在 $\partial_2\Omega$ 的子集上 $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$. 类似于定理 1 的证明可得.

定理 2 设 $n \geqslant 2, p > n, f \in L^p(\Omega), \varphi \in H^{2,p}(\Omega), \varphi < 0$ 于 $\partial_1\Omega, \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$，于 $\partial_2\Omega$，且对应的椭圆方程混合边值问题的解有 $H^{2,p}(\Omega)$ 正则性估计，则问题 (3-5) 之解 $u \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$，其中 $\lambda = 1 - N/p$.

下面考虑拟线性椭圆算子障碍问题.

设 a 为 $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ 的映射，即 $\mathbf{R}^N$ 上的向量场，$a(x) = (a_1(x), \cdots, a_N(x))$. 称 $a(x)$ 为 C^1 强制向量场，若 $a_i(x) \in C^1(\mathbf{R}^N), i = 1, 2, \cdots, N$，且有常数 $\alpha > 0, M > 0$，使

$$(a(x) - a(y)) \cdot (x - y) \geqslant \alpha \| x - y \|^2, \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^N,$$
$$|\nabla a(x)| \leqslant M, \qquad \forall x \in \mathbf{R}^N.$$

对应的障碍问题为：求 $u \in K$，使

$$\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x, \forall v \in K, \tag{3-6}$$

其中

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\}.$$

定理 3 设 $a(x)$ 为强强制向量场，$\varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \max\limits_\Omega \varphi > 0$ 且 $\varphi < 0$，于 $\partial\Omega$，又 $f \in L^\infty(\Omega)$. 则 $\forall p \in [1, \infty), \lambda \in [0, 1)$，对(3-6) 式之解 u 成立 $u \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\Omega)$.

2.2 例 2 中

$$a(x) = (1 + |x|^2)^{(\alpha-2)/2} x.$$

当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时，$a(x)$ 满足定理 3 的条件. 当 $\alpha = 1$ 时，$a(x)$ 不满足此条件，2.2 例 2 中已指出，此时连(3-6) 式之解的存在性也不能保证. 下面给出相应的问题提法和解存在和正则的条件.

求 $u \in K = \{v \in H_0^{1,\infty}(\Omega): v \geqslant \varphi, 于\ \Omega\}$，使

$$\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{3-7}$$

设向量场 $a(x) \in C^1(\mathbf{R}^N)$，若对 $\mathbf{R}^N$ 的每个紧子集 C，存在常数 $\alpha = \alpha(C) > 0$，使

$$(a(x)-a(y))\cdot(x-y)\geqslant\alpha\,|\,x-y\,|^2,\qquad\forall\,x,y\in C,$$

则称 $a(x)$ 为局部强制的.

定理 4　设 $a(x)$ 为 C^1 局部强制向量场,Ω 为 $\mathbf{R}^N$ 中有光滑边界的凸集,$\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$,$\max\limits_{\Omega}\varphi>0$,且 $\varphi<0$,于 $\partial\Omega$.若 u 为(3-7)式之解,则对 $1\leqslant p<\infty$,$0\leqslant\lambda<1$,成立 $u\in H^{2,p}(\Omega)\cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$.

定理 3 与 4 均可用惩罚法证明.

对椭圆方程边值问题,当 $\partial\Omega$ 的光滑性提高,且边界数据和系数光滑性提高时,解的光滑性也随之提高.例如,对泊松(Poisson)方程狄利克雷问题,若 $\partial\Omega\in C^m$,边值 $g\in H^m(\Omega)$ 且 $f\in H^{m-2}(\Omega)$,则 $u\in H^m(\Omega)$,$m=1,2,\cdots$;且若 $\partial\Omega\in C^\infty$,$g\in C^\infty(\overline{\Omega})$,$f\in C^\infty(\overline{\Omega})$,则 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.对变分不等式,这一性质不再成立.例如,对拉普拉斯算子障碍问题,即使 $f=0$,$\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega})$,$\partial\Omega\in C^\infty$,也不成立 $u\in C^2(\overline{\Omega})$!为简单计,下面看一个一维的例.

例 1　设 $\Omega=(-3,3)$,$\varphi(x)=1-x^2$,求 $u\in K$,使

$$\int_\Omega u'(v-u)'\,\mathrm{d}x\geqslant 0,\quad\forall\,v\in K,\tag{3-8}$$

其中 $K=\{v\in H_0^1(\Omega):v\geqslant\varphi,\text{于 }\Omega\}$.

此问题的互补问题形式为

$$\begin{cases}-u''\geqslant 0,u-\varphi\geqslant 0, & \text{于 }\Omega;\\ u''(u-\varphi)=0, & \text{于 }\Omega.\end{cases}$$

故 $u>\varphi$ 时 $u''=0$.由于 $u(-3)=u(3)=0$,故可试求 u 的如下形式

$$u(x)=\begin{cases}a_1(x+3), & \text{当 }-3\leqslant x\leqslant\alpha\text{ 时};\\ 1-x^2, & \text{当 }\alpha<x\leqslant\beta\text{ 时};\\ a_2(x-3), & \text{当 }\beta<x\leqslant 3\text{ 时},\end{cases}$$

其中 a_1,a_2,α,β 待求.由 u 与 u' 在 $x=\alpha,\beta$ 处的连续性条件(因为 $u\in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$)可以求出

$$a_1=6-4\sqrt{2},\qquad a_2=-a_1,$$

$$\alpha=-3+2\sqrt{2},\qquad\beta=-\alpha$$

容易验证,如此得到的 u 确为(3-8)式之解.显然,$u\,\overline{\in}\,C^2(\overline{\Omega})$.进一步可以算出,$u\in H^{2.5-\epsilon}(\Omega)$,$\forall\,\epsilon>0$,但 $u\,\overline{\in}\,H^{2.5}(\Omega)$.

现在回到问题(3-1),即拉普拉斯算子单障碍问题,并设定理 1 的条件成立,于是 $u\in H^{2,p}(\Omega)\cap C^{1,\lambda}(\Omega)$ 如同 1.1 例 1 一样(那里 $N=2$),此时(3-1)式之解也是下述线性互补问题的解:$u\in H^2(\Omega)$ 且

$$\begin{cases}u\geqslant\varphi, \quad -\Delta u-f\geqslant 0, & \text{于 }\Omega;\\ (u-\varphi)(-\Delta u-f)=0, & \text{于 }\Omega.\end{cases}$$

记贴合集 $I=\{x\in\Omega:u=\varphi\}$,则 $\Omega\setminus I=\{x\in\Omega:u>\varphi\}$ 为开集.I 与 $\Omega\setminus I$ 的分界面($N=2$ 时为分界线)记为 $\Gamma_0=\partial I\cap\partial(\Omega\setminus I)$.则在 u 未知时 Γ_0 也未知.问题(3-1)的解 u 也是下述问题的解:求 $u\in H^2(\Omega)$ 与 $\Gamma_0\subset\Omega$,使得 Γ_0 将 Ω 分为两

个子集 I 与 $\Omega \setminus I$,且

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & 于\ \Omega \setminus I; \\ u = \varphi, & 于\ I; \\ u = 0, & 于\ \partial\Omega; \\ u\ 及\ \nabla u\ 在\ \Gamma_0\ 连续. \end{cases} \tag{3-9}$$

由于这个边值问题包含一个未知边界,所以与 1.1 例 5 一样,也是一个**自由边界问题**.

(3-9) 式的第四个式子可写成

$$\begin{cases} u = \varphi, & 于\ \Gamma_0; \\ \nabla u = \nabla \varphi, & 于\ \Gamma_0. \end{cases}$$

关于 $f \equiv 0$ 且 $N = 2$ 时自由边界 Γ_0 的正则性,可由下述定理得出.

定理 5 设 Ω_1 为 R^2 中单连通区域,Γ 为约当(Jordan)弧且 $\Gamma \subset \partial\Omega_1$,又对某个开集 Ω_2 成立 $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$.若函数 u,φ 满足

$$u \in C^1(\Omega_1 \cup \Gamma),$$

$$\varphi\ 在\ \Omega_1 \cup \Gamma\ 的某邻域内解析,$$

$$\Delta u = 0, 于\ \Omega_1,$$

$$u = \varphi\ 且\ \nabla u = \nabla \varphi, 于\ \Gamma,$$

$$\Delta\varphi \neq 0, 于\ \overline{\Omega_1 \cup \Gamma},$$

则 Γ 是一解析曲线.

3.2 弹塑性扭转问题

考虑常截面杆的弹塑性扭转问题,即(参看(1-12)式):求 $u \in K$,使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant C\int_\Omega (v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in K, \tag{3-10}$$

其中

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega): |\nabla u| \leqslant 1, 于\ \Omega\}. \tag{3-11}$$

Ω 为平面上有界单连通域,$\partial\Omega \in C^{0,1}$.由本篇 2 中定理 9 易知,问题(3-10)有唯一解.进一步可得下述结果.

引理 1 设 $v \in K$,K 由(3-11)式定义,则 $v \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$,且

$$|v(x,y)| \leqslant \mathrm{dist}((x,y),\partial\Omega), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

这个引理给出了 u 的正则性的基本结果,也给出了 u 的解的基本结果.定义

$$u_1(x,y) = \mathrm{dist}((x,y),\partial\Omega),$$

$$u_2(x,y) = -u_1(x,y),$$

$$K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega): u_2 \leqslant v \leqslant u_1, 于\ \Omega\}.$$

易知 $K \subset K_1$,但 $K_1 \not\subset K$.考虑双障碍问题:求 $u \in K_1$,使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant C\int_\Omega (v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in K_1. \tag{3-12}$$

可以证明,问题(3-12)与问题(3-10)等价.进一步可以证明,若 $C > 0$,则问题(3-10)与下述问题等价:求 $u \in K_2$,使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant C\int_\Omega (v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in K_2, \qquad (3\text{-}13)$$

其中

$$K_2 = \{v \in H_0^1(\Omega): 0 \leqslant v \leqslant u_1, \text{于 } \Omega\}.$$

用惩罚法可证下述定理.

定理 6　设 Ω 为平面有界单连通域,Ω 凸或 $\partial\Omega \in C^2$.u 为问题(3-10)之解,则 $\forall p \geqslant 1, \lambda \in [0,1)$,成立 $u \in H^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$.

下面考虑变截面杆的弹塑性扭转问题.设杆是轴对称的,径向截面为如下平面区域

$$\Omega = \{(x_1,x_2): 0 < x_1 < l, 0 < x_2 < R(x_1)\},$$

其中,l 为杆长,$x_2 = k(x_1)$ 为母线方程.由屈服准则,应力函数 u 服从约束 $|\nabla u| \leqslant kx_2^2$.记

$$\Gamma_0 = \{(x_1,x_2): 0 \leqslant x_1 \leqslant l, x_2 = 0\},$$
$$\Gamma_1 = \{(x_1,x_2): 0 \leqslant x_1 \leqslant l, x_2 = R(x_1)\},$$
$$\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1).$$

易知 u 满足边界条件 $u = T/2\pi$,于 Γ_1,其中 T 为加于杆端的扭矩.于是,可以导出,u 为如下变分不等式之解:求 $u \in K$,使

$$\int_\Omega x_2^{-3} \nabla u \cdot \nabla(v-u)\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall v \in K, \qquad (3\text{-}14)$$

其中

$$K = \{v \in H_\rho^1(\Omega): v = T/2\pi, \text{于 } \Gamma_1, |\nabla v| \leqslant kx_2^2, \text{于 } \Omega\},$$
$$H_\rho^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega): \|v\|_{1,\rho} < \infty\},$$
$$\|v\|_{1,\rho} = \left(\int_\Omega x_2^{-3}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|D^\alpha v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

设 $R(x)$ 分段连续可微且

$$R'(0) \neq -\infty, \quad R'(l) \neq +\infty,$$

则易证 $k \geqslant k_0$ 时,变分不等式(3-14)有唯一解,$k < k_0$ 时无解,其中

$$k_0 = \left(\frac{3T}{2\pi}\right)R_0^{-3}, \qquad R_0 = \min_{0\leqslant x_1\leqslant l} R(x).$$

进一步有如下的正则性定理.

定理 7　设

1° $R(x_1) \in C^2([0,l]), R'(x_1) \geqslant 0$;

2° $R'(0) = R'(l) = 0$;

则(3-14)式的解 $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1) \cap C^{1,1}(\Omega \cup \Gamma_2)$.

4 解的扰动

考虑第一类椭圆变分不等式(见本篇 1.2 中定义 2):

$$\begin{cases} u \in K; \\ a(u, v-u) \geqslant L(v-u), \forall v \in K, \end{cases} \tag{4-1}$$

其中 K 为希尔伯特空间 V 中非空闭凸子集,并设双线性型 $a(u,v)$ 连续、强制,线性泛函 L 连续. 扰动后的变分不等式为

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in K_\varepsilon; \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geqslant L_\varepsilon(v-u_\varepsilon), \forall v \in K_\varepsilon. \end{cases} \tag{4-2}$$

假设有非负函数 $b(\varepsilon)$ 与 $c(\varepsilon)$ 满足

$$\varepsilon \to 0 \text{时 } b(\varepsilon), c(\varepsilon) \to 0, \tag{4-3}$$

$$|a_\varepsilon(v,w) - a(v,w)| \leqslant b(\varepsilon)\|v\| \cdot \|w\|, \tag{4-4}$$

$$|L_\varepsilon(v) - L(v)| \leqslant c(\varepsilon)\|v\|. \tag{4-5}$$

以 P_ε 表示由 V 向 K_ε 的投影算子,令 $K_0 = K$.

定理 1 设(4-3)式 ~ (4-5)式成立,且设 $v \in V$ 固定时,映射 $\varepsilon \to P_\varepsilon v$ 在 $\varepsilon = 0$ 连续,则 u_ε 在 $\varepsilon = 0$ 连续,即 $\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 在 V 中收敛于 u.

由定理 1 易证,当障碍函数扰动时,只要扰动后的障碍函数在空间 V 中收敛于原障碍函数,就可得出,扰动后的障碍问题的解收敛于原障碍问题的解.

定理 2 设映射 $\varepsilon \to K_\varepsilon$ 在 $\varepsilon = 0$ 为豪斯多夫(Hausdorff)意义下连续的,则对任意 $v \in V$,映射 $\varepsilon \to P_\varepsilon v$ 在 $\varepsilon = 0$ 对 ε 连续.

不难证明,当 K 与 $\{K_\varepsilon\}$ 同包含于某一紧集时,定理 2 的逆命题成立.

例 1 常截面杆弹塑性扭转问题.

此时 $V = H_0^1(\Omega)$, $K = \{v \in H_0^1(\Omega): |\nabla v| \leqslant 1, \text{于 } \Omega\}$ 设 K 受扰后成为

$$K_\varepsilon = \{v \in H_0^1(\Omega): |\nabla v| \leqslant 1 + \alpha(\varepsilon), \text{于 } \Omega\},$$

其中 $\alpha(\varepsilon)$ 在 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 定义, $-1 \leqslant \alpha(\varepsilon) \leqslant 1$ 且 $\varepsilon \to 0$ 时 $\alpha(\varepsilon) \to 0$. 不难证明,有正数 M,使 K 与 K_ε 的豪斯多夫距离 $d^*(K, K_\varepsilon)$ 满足

$$d^*(K, K_\varepsilon) \leqslant M\alpha(\varepsilon),$$

从而由本章定理 2 和定理 1 知,$\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛到 u.

例 2 "平均曲率"约束问题. 即求 $u \in K$,使

$$\int_\Omega \Delta u \Delta(v-u)\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x, \forall v \in K,$$

其中

$$K = \{v \in H_0^2(\Omega): \alpha \leqslant \Delta v \leqslant \beta, \text{于 } \Omega\}, \alpha < 0 < \beta.$$

K 受扰后成为

$$K_\varepsilon = \{v \in H_0^2(\Omega): \alpha - \theta(\varepsilon) \leqslant \Delta v \leqslant \beta + \theta(\varepsilon), \text{于 } \Omega\},$$

其中 $\theta(\varepsilon)$ 在 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ 时定义, $|\theta(\varepsilon)| \leqslant \min\{-\alpha, \beta\}$, 且 $\varepsilon \to 0$ 时 $\theta(\varepsilon) \to 0$. 于是可以得到 $\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 在 $H_0^2(\Omega)$ 中收敛于 u.

下面考虑 $V = H^m(\Omega)$ 时的边界条件扰动问题，即设(4-1)式为 $2m$ 阶椭圆微分算子对应的变分不等式. 此时

$$K = C \cap B,$$

其中 C 为 $H^m(\Omega)$ 中满足某些不等式约束的元素之集，B 为 $H^m(\Omega)$ 中满足给定边界条件的元素之集，即

$$B = \{v \in H^m(\Omega): \frac{\partial^j v}{\partial n^j} = g_j, \text{于 } \partial\Omega, j = 0,1,\cdots,m-1\},$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的法向. K 受扰后成为 $K_\varepsilon = C_\varepsilon \cap B_\varepsilon$，其中 C_ε 由对 C 的不等式约束条件扰动而得(类似于上述例1，例2)，B_ε 由 B 扰动而得，即

$$B_\varepsilon = \{v \in H^m(\Omega): \frac{\partial^j v}{\partial n^j} = g_{j\varepsilon}, \text{于 } \partial\Omega, j = 0,1,\cdots,m-1\}.$$

设 $\partial\Omega \in C^m$ ($m = 1$ 时只需设 $\partial\Omega$ 为局部利普希茨(Lipschitz)连续)，则有以下定理.

定理3 设(4-3)式～(4-5)式成立，且映射 $\varepsilon \to C_\varepsilon$ 在 $\varepsilon = 0$ 为豪斯多夫距离下连续的(令 $C_0 = C$)，又设对 $j = 0,1,\cdots,m-1$，当 $\varepsilon \to 0$ 时 $g_{j\varepsilon}$ 在 $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Omega)$ 中收敛于 g_j，则当 $\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 在 $H^m(\Omega)$ 中收敛于 u.

5 数值解法

5.1 有限维线性互补问题

考虑(2-1)式中 A 为线性算子、$K = \{v \in \mathbf{R}^N: v \geqslant \Phi\}$ 的情形，此时(2-1)式等价于如下线性互补问题(LCP)：求 $u \in \mathbf{R}^N$，使

$$\begin{cases} \mathrm{A}u \geqslant F, u \geqslant \Phi; \\ (\mathrm{A}u - F, u - \Phi) = 0. \end{cases} \tag{5-1}$$

求解(5-1)式的数值方法可分为两大类，即直接法和迭代法. 最早出现的直接法是互补消元法(见 C E Lemke. Management Science. 1965, 11: 681 ～ 689) 和主元消元法(见 R W Cottle. Math of Decision Sciences. AMS, 1968, 148 ～ 162，它们是针对较一般的矩阵 A 设计的，计算工作量可达到 2^N，是指数时间算法. 下面介绍的直接法是针对 M 阵设计的，迭代法是针对正定对称阵或对角占优阵设计的.

5.1.1 三对角 M 阵的消元法

不妨设(5-1)式中 $\Phi = 0$，此时易证(5-1)式等价于下列问题：求 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^N$，使

$$\begin{cases} \boldsymbol{w} \geqslant 0, \boldsymbol{u} \geqslant 0; \\ \boldsymbol{w} = \mathrm{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F}; \\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 0. \end{cases} \tag{5-2}$$

解方程(5-2)的消元法如下：

步 1：$u := 0, w = -F$；

步 2：对 $i = 1,2,\cdots,N$ 依次作以下运算：

(1) 若 $F_i \leqslant 0$，则不作运算；

(2) 若 $F_i > 0$，则 w_i 与 u_i 互换，且

$$a_{ij} := -a_{ii}^{-1}a_{ij}, \quad j = 1,\cdots,N,$$
$$F_i := -a_{ii}^{-1}F_i,$$
$$F_k := F_k + F_i a_{ki}, k \neq i,$$
$$a_{kj} := a_{kj} + a_{ij}a_{ki}, \quad j = 1,2,\cdots,N, k \neq i,$$

第 i 列不再参与以后的运算；

步 3：若步 2 中(2) 至少做了一次，则转步 2，否则转步 4；

步 4：$w := F$，然后将计算过程中 w, u 交换的分量的位置复原，即得所求的 u.

本算法的计算工作量为 $O(N^2)$.

5.1.2 一般 M 矩阵的消元法

仍设(5-1) 式中的 $\Phi = 0$.

设 $I = \{1,2,\cdots,N\}, I_1, I_2 \subset I$；$A(I_1, I_2)$ 表示 A 的一个子阵，其行对应 I_1，其列对应 I_2，$u(I_1)$ 表示 u 对应于 I_1 的子向量，$A(I_1)$ 表示对应于 I_1 的主子阵. 设 u 为(5-1) 式之解，令

$$P = \{i \in I : u_i > 0\}.$$

算法 MDM

步 1：任给 $P_0 \subset p$，对 $A(P_0)$ 进行三角分解，得 $A(P_0) = L_0U_0$，保存 $L_0, U_0, k := 0$，转步 3；

步 2：利用已有的三角分解 L_{k-1}, U_{k-1}，对 $A(P_k)$ 进行三角分解 $A(P_k) = L_kU_k$，保存 L_k, U_k；

步 3：利用三角分解求解方程组

$$A(P_k)u^{(k)}(P_k) = F(P_k),$$

得 $u^{(k)}(P_k)$，且令 $u^{(k)}(I \setminus P_k) = 0$；

步 4：计算向量

$$C^{(k)}(I \setminus P_k) = A(I \setminus P_k, P_k)u^{(k)}(P_k) - F(I \setminus P_k);$$

步 5：令 $M_k = \{i \in I : c_i^{(k)} < 0\}$，若 $M_k = \varnothing$，则打印 $u^{(k)}$ 且停机，否则令 $P_{k+1} = P_k \cup M_k, k := k + 1$，转步 2.

由于 A 为 M 阵，易证 $\{i \in I : F_i > 0\} \subset P$，故可取 $P_0 = \{i \in I : F_i > 0\}$. 同时可以证明，若 $M_k = \varnothing$ 则 $u^{(k)} = u, P_k = P$. 从而有非负整数 $k_0 \leqslant m - m_0$，使 $u^{(k0)} = u$，其中 m_0, m 分别为 P_0, P 的基数. 由此可推出，本算法的计算工作量为 $O(N^4)$.

5.1.3 投影超松弛法(Projected SOR)

此算法借用解线性方程组 $Au = F$ 的 SOR 方法的格式进行计算，每算出一个

分量即投影到集合 $u_i \geq \Phi_i$.

Projecteel SOR

步1:取 $u^{(0)} \in K, \varepsilon > 0, \omega \in (0,2), k := 0$;

步2:对 $i = 1,2,\cdots,N$ 作如下计算,

$$w_i^{(k+1)} := a_{ii}^{-1}\left(F_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} u_j^{(k)}\right),$$
$$v_i^{(k+1)} := (1-\omega) u_i^{(k)} + \omega w_i^{(k+1)},$$
$$u_i^{(k+1)} := \max\{\Phi_i, v_i^{(k+1)}\};$$

步3:若 $\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \| < \varepsilon$ 则停算,否则 $k := k+1$,转步2.

当 A 正定对称时,上述算法收敛.

当 A 严格对角占优或不可约对角占优时,上述算法也收敛,但 ω 的范围略小,为$(0,2/(1+\|B\|))$,其中 B 为 A 的雅可比(Jacobi)迭代阵.

5.2 有限维非线性互补问题

考虑(2-1)式中 $K = \mathbf{R}_+^N = \{v \in \mathbf{R}^N : v \geq 0\}$ 的情形,即求 $u \in \mathbf{R}^N$,使

$$\begin{cases} u \geq 0; \\ (f(u), v-u) \geq 0, \quad \forall v \geq 0. \end{cases} \tag{5-3}$$

下面介绍求解(5-3)式的两类常用算法.

5.2.1 线性逼近法

其基本思想是取 $f(u)$ 的线性逼近

$$f(u) \approx f(w) + A(w)(u-w),$$

其中 $A(w)$ 为 w 的函数矩阵.在(5-3)式中用此线性逼近代替 $f(u)$,得

$$\begin{cases} u \geq 0; \\ (f(w) + A(w)(u-w), v-u) \geq 0. \quad \forall v \geq 0. \end{cases}$$

在上式中以第 k 次近似$u^{(k)}$代 w,以 $u^{(k+1)}$ 代 u,就得到求 u 的迭代格式.具体算法如下.

步1:适当选取函数矩阵 $A(w)$;

步2:取新值 $u^{(0)} \geq 0, k := 0$;

步3:求$u^{(k+1)} \geq 0$,使

$$\begin{aligned} &(A(u^{(k)})u^{(k+1)}, v - u^{(k+1)}) \\ &\quad \geq (A(u^k)u^{(k)} - f(u^{(k)}), v - u^{(k+1)}), \quad \forall v \geq 0; \end{aligned} \tag{5-4}$$

步4:若 $\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \|$ 达到预定精度,则停算,否则 $k := k+1$,转步3.

子问题(5-4)中 $A(u^k)$ 是一个线性算子,故(5-4)式等价于一个形如(5-1)式的线性互补问题,可用5.1的算法求数值解.

取 $A(w) = \nabla f(w)$ 时,得求解(5-3)式的牛顿法.当$\nabla f(u)$ 正定且在 u 的某邻域满足利普希茨条件时,求解(5-3)式的牛顿法是局部平方收敛的.类似可构造求

解(5-3)式的拟牛顿法,SOR-牛顿法等.

5.2.2　同伦算法

取同伦

$$H(v,t) = f(v) + (t-1)f(u^{(0)})$$

或

$$H(v,t) = tf(v) + (1-t)(v - u^{(0)}).$$

再取其线性逼近

$$H(v,t) \approx H(w,t) + A(w,t)(v-w),$$

其中 $A(w,t)$ 为函数矩阵.将区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 分划为

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

然后按如下步骤计算.

步 1:取 $u^{(0,0)} \geqslant 0, \epsilon > 0, j := 1, k := 0$;

步 2:$u^{(j,0)} := u^{(j-1,k)}, k := 0$;

步 3:解线性互补问题求 $u^{(j,k+1)}$ 如下.

$$u^{(j,k+1)} \geqslant 0,$$

$$\mathrm{A}(u^{(j,k)},t_j)(u^{(j,k+1)} - u^{(j,k)}) + H(u^{(j,k)},t_j) \geqslant 0,$$

$$(u^{(j,k+1)}, \mathrm{A}(u^{(j,k)},t_j)(u^{(j,k+1)} - u^{(j,k)}) + H(u^{(j,k)},t_j)) = 0;$$

步 4:若 $\| u^{(j,k+1)} - u^{(j,k)} \| < \epsilon$,则转步 5,否则 $k := k+1$ 转步 3;

步 5:若 $j = N$,则停算,否则 $j := j+1$,转步 2.

当 $f(v)$ 满足单调性条件时,在相当一般的条件下,上述算法是全局收敛的.实用中,可用同伦算法求得 $u^{(N,k)}$,再用它为新值,以牛顿法求得更精确的解.

上述两种算法均可用于求解一般情形的问题(2-1).

由于(5-3)式等价于如下问题:

$$\begin{cases} u \geqslant 0, f(u) \geqslant 0; \\ (u, f(u)) = 0, \end{cases}$$

也可将它化为非光滑方程求解,例如化为

$$\min\{u, f(u)\} = 0,$$

再用求解非光滑方程的阻尼牛顿法、拟牛顿法与信赖域法等方法计算.

5.3　Uzawa 型算法

设(2-1)式等价于下述最小化问题:求 $u \in K$,使

$$I(u) = \min_{v \in K} I(v), \tag{5-5}$$

其中泛函 $I(u)$ 的 Gateau 导数为 Au,例如,A 为对称矩阵时,$I(u) = (Au,u)/2$.

又设 K 由隐式约束给出:

$$K = \{v \in \mathbf{R}^N : \psi_i(v) \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m\}.$$

此时可引入(5-5)式对应的拉格朗日(Lagrange)泛函

$$L(v,\mu) = I(v) - (\mu, \varphi(v)),$$

其中 $\mu \in \Lambda_m = \{\mu \in \mathbf{R}^m: \mu_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m\}$. 若

$$L(u,\mu) \leq L(u,\lambda) \leq L(v,\lambda), \forall (v,\mu) \in \mathbf{R}^N \times \Lambda_m,$$

则称(u,λ)为$L(v,\mu)$的一个鞍点. 当$I(v)$为凸函数而$\psi_i(v), i = 1,2,\cdots,m$均为凹函数时, 问题(5-5)化为$L(v,\mu)$的鞍点问题. 求解鞍点问题可采用如下的Uzawa型算法, 其本质是一种梯度法.

步1: 取参数$\rho > 0, \lambda^{(0)} \in \Lambda_m, k: = 0$;

步2: 求$u^{(k)} \in \mathbf{R}^N$, 使

$$L(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \min_{v \in \mathbf{R}^N} L(v, \lambda^{(k)});$$

步3: $k: = k + 1$,

$$\lambda_i^{(k)}: = \max\{0, \lambda_i^{(k-1)} - \rho\psi_i(u^{(k-1)})\}, \quad i = 1,2,\cdots,m,$$

若$\| u^{(k)} - u^{(k-1)} \|, \| \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \|$达预定精度, 则停算, 否则转步2.

5.4 无穷维情形

本节以障碍问题为例介绍有限元法、多重网格法和区域分解法, 即考虑本篇1.1中的例1: 求$u \in K$, 使

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v - u) \mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v - u) \mathrm{d}x, \forall v \in K, \tag{5-6}$$

其中$K = \{v \in H_0^1(\Omega): v \geq \varphi, 于\Omega\}, f \in L^2(\Omega), \quad \varphi \in H^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \varphi \leq 0$, 于$\partial\Omega$, Ω为$\mathbf{R}^N$中有界凸多面体.

5.4.1 有限元法

对Ω作正则三角剖分, 得拉格朗日线性有限元空间V_h. 取V_h的子集

$$K_h = \{v \in V_h: v = 0, 于边界结点, v \geq \varphi, 于内结点\}.$$

(5-6)式的有限元离散问题为: 求$u_h \in K_h$, 使

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla (v - u_h) \mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v - u_h) \mathrm{d}x, \forall V \in K_h. \tag{5-7}$$

将u_h用v_h的基函数表示, (5-7)式就成为问题(5-1), 从而可用本章5.1的方法计算. 设u为(5-6)式之解, u_h为(5-7)式之解, 则有如下的误差估计式

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} \leq Ch \| u \|_{2,\Omega}.$$

当使用拉格朗日二次元时, 误差的阶可由h提高到$h^{1.5-\epsilon}, \forall \epsilon > 0$. 这表明对问题(5-6)用二次元是不可取的.

5.4.2 多重网格法

以三重网格为例. 设将Ω剖分为网格Ω_1, 其单元最大直径为h_1, 将Ω_1加密剖分为Ω_2, 对应的$h_2 = h_1/2$, 再将Ω_2加密剖分为Ω_3, 对应的$h_3 = h_2/2$. 网格$\Omega_m, m = 1,2,3$, 对应的凸集、系数矩阵及有关向量分别记为K^m, A^m, u^m, F^m和Φ^m, 则(5-7)式在Ω_m上的等价线性互补问题为: 求u^m、使

$$\begin{cases} A^m u^m - F^m \geqslant 0, u^m \geqslant \Phi^m; \\ (A^m u^m - F^m, u^m - \Phi^m) = 0. \end{cases} \tag{5-8}$$

对网格 Ω_m 与 Ω_{m+1} 上的向量引入两个转换算子:

(1) 投影算子 I_{m+1}^m. 它将 Ω_{m+1} 上的向量变为 Ω_m 上的向量. 定义 I_{m+1}^m 的一个简单方法如下:向量 F^{m+1} 的分量对应于 Ω_{m+1} 的所有结点,包括 Ω_m 的所有结点(在协调有限元情形),将 F^{m+1} 中对应于 Ω_m 的所有分量按原顺序构成一个向量,它是 Ω_m 上的向量,将它定义为 $I_{m+1}^m F^{m+1}$,就定义了算子 I_{m+1}^m.

(2) 插值算子 I_m^{m+1}. 它将 Ω_m 上的向量变为 Ω_{m+1} 上的向量. 若用拉格朗日线性有限元,则一个简单的取法是:$I_m^{m+1}F^m$ 在 Ω_m 结点的对应分量为 F^m 的原来的分量,在加细网点(即 Ω_m 的三角形单元各边的中点)上的分量由该点所在三角形边两端点的 F^m 分量取算术平均.

我们的目的是求 Ω_3 上的解,即 $m = 3$ 时(5-8)式之解. 为此,先定义 Ω_2 上的两重网格迭代,再定义 Ω_3 上的多重网格迭代.

算法 GM_2

步 1:在 Ω_2 上用迭代算子 B_2(也称磨光算子,一般可用 Projected SOR) 对(5-8)式作 s 次迭代

$$u^{(2,i)} = B_2 u^{(2,i-1)}, \quad i = 1,2,\cdots,s.$$

步 2:计算残差,并投影到 Ω_1 上构造 F^1:

$$F^1 := I_2^1(F^2 - A^2 u^{(2,s)}) + A^1 I_2^1 u^{(2,s)}.$$

步 3:在 Ω_1 上用直接法(或 Projected SOR) 求解(5-8)式,得 u^1(或其近似值).

步 4:用 u^1 校正 $u^{(2,s)}$:

$$u^{(2,s+1)} := u^{(2,s)} + I_1^2(u^1 - I_2^1 u^{(2,s)}).$$

以上的四步称为 Ω_2 上的一次多网格迭代. 作第一次时,新值可任取 $u^{(2,0)} \in K^2$,一般取 $u^{(2,0)} = \Phi^2$. 作以后各次迭代 GM_2 时,均以上次步 4 所得 $u^{(2,s+1)}$ 作为本次的 $u^{(2,0)}$.

现在利用 GM_2 定义 Ω_3 上的多重网格法.

算法 GM_3

步 1:在 Ω_3 上用迭代算子 B_3 对(5-8)式作 s 次迭代

$$u^{(3,i)} := B_3 u^{(3,i-1)}, \quad i = 1,2,\cdots,s.$$

步 2:计算 Ω_2 上的 F^2:

$$F^2 := I_3^2(F^3 - A^3 u^{(3,s)}) + A^2 I_3^2 u^{(3,s)}.$$

步 3:在 Ω_2 上用 GM_2 求(5-8)式的第 k 次迭代解(一般取 $k = 2$,即 W - *cycle*),记为 u^2.

步 4:校正:

$$u^{(3,s+1)} := u^{(3,s)} + I_2^3(u^2 - I_3^2 u^{(3,s)}).$$

前述取初值 $u^{(2,0)}$ 的方法也适用于 $u^{(3,0)}$. 类似可定义 l 重网格的多重网格迭代 GM_l. 当 A^m 均为正定对称阵,或均为严格对角占优阵,或均为不可约对角占优阵

时，求解(5-7)式的多重网格迭代法的收敛性已得到证明，但 h 无关收敛率至今尚未证明，尽管数值实验已揭示了这个性质.

5.4.3 区域分解法

在 Ω 的有限元剖分的基础上将 Ω 分解为重迭开子域 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$，令 $V_i = V_h \cap H_0^1(\Omega_i)$.

算法 DDM

步1：选定 $\omega_i > 0, i = 1, \cdots, m, \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1$，取 $u^0 \in K_h, n := 0$;

步2：对 $i = 1, 2, \cdots, m$ 并行求解子问题：求 $u^{n,i} \in K_i^n$，使

$$\int_\Omega \nabla u^{n,i} \nabla (v - u^{n,i}) \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega f(v - u^{n,i}) \mathrm{d}x, \forall v \in K_i^n,$$

其中 $K_i^n = (u^n + V_i) \cap K_h$;

步3：$u^{n+1} := \sum_{i=1}^{m} \omega_i u^{n,i}$;

步4：若 $\| u^{n+1} - u^n \|$ 达到预定精度则停算，否则 $n := n + 1$，转步2.

利用最小化序列方法可以证明，算法 DDM 收敛. 当初值取为上解，步3改为 $u^{n+1} = \min\{u^{n,1}, \cdots, u^{n,m}\}$，系数阵为 M 阵且 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ 为一致重叠时，可以证明算法 DDM 产生的迭代解序列 u^n 单调下降收敛到 u_h，且收敛率与 h 无关.

参考文献

1 Duvaut G, Lions J L. Les. inéquations en mechanique et en physique. Paris: Dunod, 1972.
2 冯康. 单边变分原理. 计算机应用与应用数学, 1975(12): 1 ~ 8
3 Glowinski R. Lectures on numerical method for nonlinear variational problems. New York: Springer-Verlag, 1980.
4 Kinderlehrer D, Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: AP, 1980.
5 Lions J. L, 非线性边值问题的一些解法. 郭柏灵等译. 广州: 中山大学出版社, 1992.
6 Rodrigues J. F. Obstacle problems in mathematical physics. Amsterdam: North-Holland, 1987.
7 王耀东. 变分不等方程引论. 北京: 高等教育出版社, 1989.
8 周叔子. 变分不等式及其有限元法. 长沙: 湖南大学出版社, 1988.

·近代数学卷·

第16篇

动力系统

编　者　张敦穆
审校者　徐森林

目　录

引　言

动力系统理论广义地说是研究一个随时间(离散或连续)而演化的系统的长期性态的.精确一点说是研究某个空间 X 上的连续变换(半)群的作用的.为了对系统作数学研究,通常在 X 上附加某些结构,据此,动力系统理论分为三大类:

(1) X 是拓扑空间,G 是拓扑变换(半)群;

(2) X 是微分流形,G 是微分变换(半)群;

(3) X 是测度空间,G 是保测变换(半)群.

三种情形依次称为拓扑动力系统、微分动力系统、遍历理论.限于篇幅,本篇将以(2)为主,略及其他.动力系统理论与混沌动力学的研究关系极为密切,鉴于混沌理论在现代科学技术中的重要性,我们也适当介绍有关结果.对于要深入了解动力系统的读者,可参阅篇末的参考文献,此外,特别推荐由 V.I.Arnold 等人主编的一套介绍动力系统的书(它是 Encyclopaedia of Mathematical Scienes 的一个组成部分)"Dynamical Systems".这套书由 Springer-Verleg 出版,现已出到第九卷.

动力系统理论源自 19 世纪末庞加莱(H.Poincaré)关于天体力学及微分方程定性理论的研究,继之伯克霍夫(G.Birkhoff),霍普夫(E.Hopf),科尔莫戈罗夫(A.N.Kolmogorov),阿诺尔德(V.I.Arnold),阿诺索夫(D.V.Anosov),莫泽(J.Moser),西奈(Y.G.Sinai),斯梅尔(S.Smale),Ch.Pugh,廖山涛,(J-C.Yoccoz),(C.T.McMallen)等人作了杰出的贡献.

动力系统的研究涉及众多的数学分支:常微分方程、偏微分方程、泛函分析、微分拓扑、代数拓扑、微分几何、测度论、概率论、数论和复分析等.它在物理、力学、化学、生物、工程科学与经济科学中有广泛而深入的应用.

1　动力系统理论中的基本概念与事实

1.1　基本概念

1.1.1　离散和连续动力系统

用 $\mathbf{R}$ 表示实数集合,在通常加法下构成阿贝尔(Abel)群,用 $\mathbf{R}_+$($\mathbf{R}_-$)表示非负(非正)实数集合,它构成加法半群.用 $\mathbf{Z}$ 表示整数加群、$\mathbf{Z}_+ := \mathbf{Z}\cap\mathbf{R}_+$,$\mathbf{Z}_- := \mathbf{Z}\cap\mathbf{R}_-$ 为加法半群.$\mathbf{N} := \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ 为自然数集合.以上各集合均赋以由通常 $\mathbf{R}$ 所诱导的拓扑结构,成为拓扑(半)群.

定义 1　设 X 是一个拓扑空间或 C^r 流形,T 为 $\mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{Z}_+$,对任意 $x\in X$ 称为

一个状态，X 称为相空间，T 称为时间. 连续(C^r)映射 $\varphi: T\times X\to X$ 若满足半群性质：

1° $\varphi(0,x)=x$，$\forall x\in X$；

2° $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$，$\forall s,t\in T, x\in X$，

则称(X,φ)为半动力系统. 对任意固定的 $t\in T$，由 $\varphi^t(x):=\varphi(t,x)$定义了连续($C^k$)映射 $\varphi^t: X\to X$，半群性质重写为

1° $\varphi^t=id$；

2° $\varphi^{s+t}=\varphi^s\circ\varphi^t$，$\forall s,t\in T$.

当 $T=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$，φ 仍满足上述 $1^\circ\sim2^\circ$时，(X,φ)称为**动力系统**. 相应于 φ 为 C^0 映射或 $C^r(r\geqslant1)$映射，(X,φ)分别称为**拓扑(微分)(半)动力系统**. 当 $T=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}_+$ 时(X,φ)称为连续(半)动力系统，或称为**连续(半)流**；当 $T=\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}_+$ 时，(X,φ)称为**离散(半)动力系统**. 当 $T=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$ 时，由 $1^\circ\sim2^\circ$知，对任意 $t\in T$，$\varphi^t: X\to X$ 为同胚(微分同胚)映射，φ^t 之逆为 φ^{-t}. $(T,+)$作为加群(或半群)作用在空间 X 上.

例 1　设 $X=\mathbf{R}^n$，$A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为线性变换，则微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax\qquad x\in\mathbf{R}^n$$

的解 $\varphi(t,x_0)=e^{tA}x_0$ 界定 X 上一个连续流，$x_0=\varphi(0,x_0)$为微分方程组定解问题的初始值. 因 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 是任意的，改记为 x，即得上述定义中的形式.

例 2　设 $X=M$ 为一紧致 $C^r(r\geqslant1)$微分流形，则 M 上任何 C^r 向量场生成一个 C^r 流.

约定　为了以后行文的简洁，设(X,φ)为一个动力系统(或半动力系统)，若称 X 为空间，则适用于 X 为拓扑空间及 $C^r(r\geqslant1)$流形两种情形. 若称 φ 为映射，则适用于 φ 为连续映射和 $C^r(r\geqslant1)$映射两种情形. 若须分别二种情形，则会在行文中明确提出. 同样，称(X,φ)为(半)动力系统，也适用于(X,φ)为拓扑(半)动力系统与微分(半)动力系统两种情形，否则，会明确提出.

1.1.2　嵌入和扭扩

现在讨论离散和连续动力系统的关系. 设(X,φ)为一(半)流，对任意 $t\in T=\mathbf{R}$(或 $\mathbf{R}_+$)，令 $f:=\varphi^t$，则 $f^0=id$，$f^{m+n}=\underbrace{\varphi^t\circ\cdots\circ\varphi^t}_{m+n}=f^m\circ f^n$，则$(X,f^n)$，$n\in\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}_+$构成一个离散动力(半动力)系统；因为$\{f^n\}$由 f 唯一决定，所以就以(X,f)记离散动力(半动力)系统. 即对流 φ 进行离散采样，可生成一离散动力系统. 反之设(X,f)为一离散流，$f: X\to X$ 为同胚(C^r 微分同胚)映射.

定义 2　若存在流(X,φ)以及 $t\in\mathbf{R}$，使得 $f=\varphi^t$，则称 f 可以嵌入流 φ 中.

一般说来，离散动力系统(X,f)不一定能够嵌入流(X,φ)中. 但可用一个称为**扭扩**的方法，将(X,f)嵌入到高一维空间上的所谓扭扩流$(\widetilde{X},\widetilde{\varphi})$上去.

定义 3　设(X,f)为离散动力系统，在积空间 $\mathbf{R}\times X$ 上定义流φ^t 为

$$\varphi^t((s,x)):=(t+s,x),\quad \forall x\in X,s,t\in\mathbf{R}.$$

在 $\mathbf{R}\times X$ 上定义等价关系"~"：

$$(t,x)\sim(s,y),\text{当且仅当 } t-s\in\mathbf{Z}, y=f^{t-s}(x)\text{时}.$$

作商空间 $\widetilde{X}:=\mathbf{R}\times X/\sim$，因若 $(r,x)\sim(s,y)$，则

$$\varphi^t((r,x))=(t+r,x)\sim(t+s,y)=\varphi^t((s,y)),$$

所以 φ^t 诱导出 $\widetilde{X}$ 上的流 $\widetilde{\varphi}^t$. 若将 X 等同于截面 $\widetilde{X}_0=\{0\}\times X/\sim$，则 $f:X\to X$ 可看作映射 $f:\widetilde{X}_0\to\widetilde{X}_0$，在此等同下，从 $x\in X$ 出发的轨道还要返回 X（等同于 $\widetilde{X}_0$），首次返回的点恰为 $f(x)$. 所以 f 恰为流 $\widetilde{\varphi}^t$ 关于截面 $\widetilde{X}_0$ 的首次返回映射或庞加莱映射.

嵌入和扭扩的构造说明两类动力系统密切相关，它们之间的研究可以互相促进.

1.1.3 不变集、拓扑共轭和结构稳定性

设 (X,φ) 为一动力系统. 以下记 $T=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$，$T_+=\mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{Z}_+$，$T_-=\mathbf{R}_-$ 或 $\mathbf{Z}_-$，对任意点 $x\in X$，集合

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x):=\{\varphi^t(x)\mid t\in T\};$$
$$\mathrm{Orb}_\varphi^+(x):=\{\varphi^t(x)\mid t\in T_+\};$$
$$\mathrm{Orb}_\varphi^-(x):=\{\varphi^t(x)\mid t\in T_-\}$$

分别称为动力系统 (X,φ) 或 φ 过点 x 的**轨道**、正半轨和负半轨. 当 (X,φ) 为半动力系统时，轨道 $\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\mathrm{Orb}_\varphi^+(x)$.

定义 4 设 (X,φ) 为离散动力系统，若存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $\varphi^n(x)=x$，称 x 为 φ 的周期点，称 n 为 x 的周期，称使得 $\varphi^n(x)=x$ 成立的最小正整数为点 x 的**基本周期**. 周期为 1 的点 x 称为不动点. φ 的周期点集和不动点集分别记为 $\mathrm{Per}(\varphi)$ 和 $\mathrm{Fix}(\varphi)$. φ 的所有周期点的周期集合，记为 $T(\varphi)\subset\mathbf{N}$. 对任意 $x\in\mathrm{Per}(\varphi)$，轨道 $\mathrm{Per}_\varphi(x)$ 称为 φ 的周期轨道. 对流 (X,φ) 可类似地定义周期和**周期轨道**.

设 (X,φ) 为离散半动力系统，若存在 $n\in\mathbf{Z}_+$，使得 $\varphi^n(x)\in\mathrm{Per}(\varphi)$，则 x 与 $\mathrm{Orb}_\varphi(x)$ 分别称为准周期点及**准周期轨道**.

定义 5 设 (X,φ) 为动力系统，对任意 $x\in X$，集合

$$\omega(x):=\{y\in X\mid\exists\, t_n\in T, t_n\to+\infty\text{使得 }\varphi^{t_n}(x)\to y\},$$
$$\alpha(x):=\{y\in X\mid\exists\, t_n\in T, t_n\to-\infty\text{使得 }\varphi^{t_n}(x)\to y\}$$

及 $L(x):=\omega(x)\cup\alpha(x)$ 分别称为轨道 $\mathrm{Orb}_\varphi(x)$ 的 **ω-极限集**，**α-极限集**和**极限集**. 而 $L(\varphi):=\bigcup_{x\in X}L(x)$ 称为 φ 的极限集.

定义 6 设 $x\in X$，若存在 x 的邻域 U，使得对任意 $t\in T$，$|t|\geqslant 1$，均成立

$$\varphi^t(U)\cap U=\varnothing,$$

则称 x 为 φ 的游荡点. 不是游荡点的点称为非游荡点，即若 x 为非游荡点，则对 x

的任意邻域U,存在$t\in T,|t|\geqslant 1$,使得$\varphi^t(U)\cap U\neq\varnothing$. φ的非游荡点的集合$\Omega(\varphi)$称为φ的**非游荡集**.

定义7　集合$\Lambda\subset X$称为φ的**不变集**,若对任意$x\in\Lambda$,则有$\mathrm{Orb}_\varphi(x)\subset\Lambda$.

定义8　设$\Lambda\subset X$为φ的非空、闭不变集,若Λ不含具有同样性质的真子集,则称Λ为φ的**极小集**.若X为极小集,则(X,φ)称为极小动力系统.

命题1　$\mathrm{Fix}(\varphi)\subset\mathrm{Per}(\varphi)\subset L(\varphi)\subset\Omega(\varphi)$.

命题2　对任意$x\in X$, $\mathrm{Orb}_\varphi(x)$, $\omega(x)$, $\alpha(x)$, $L(x)$, $\mathrm{Fix}(\varphi)$, $\mathrm{Per}(\varphi)$及$\Omega(\varphi)$均为不变集.当X为紧致空间时, $\omega(x)$, $\alpha(x)$, $L(x)$和$\Omega(\varphi)$均为非空闭集.

定义9　两个(半)动力系统(X,φ)和(Y,ψ)称为**拓扑共轭的**,若存在同胚$h: X\to Y$,使对任意$t\in T$,如图1-1可交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi^t} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\psi^t} & Y \end{array}$$

图1-1

即对一切$t\in T$,有$h\circ\varphi^t=\psi^t\circ h$.若$T=\mathbf{Z}$或$\mathbf{Z}_+$,则上述条件等价于$h\circ\varphi^1=\psi^1\circ h$.

记注　对流的情形,还有一个比上述拓扑共轭弱一些的拓扑等价的概念(见后面第3章).

命题3　拓扑共轭是一个等价关系.

两个拓扑共轭的动力系统,它们的不动点、周期轨道、不变集等都是互相对应的,因而两者有完全相同的轨道结构,两者之间仅差一个同胚,所以拓扑共轭的两个动力系统可以看作是相同的.

定义10　设(X,f)与(Y,g)为两个离散动力系统, $p\in X$, $q\in Y$,若存在p和q的开邻域$U\subset X$和$V\subset Y$以及同胚$h: U\cup f(U)\to V\cup g(V)$,使得:①$h(p)=q$,②$h(U)=V$,③$h\circ f|_U=g\circ h|_U$,则称$f$在$p$点和$g$在$q$点处是**局部拓扑共轭的**.

结构稳定性是微分动力系统的重要论题之一.设M,N为$C^r(r\geqslant 1)$流形,则从M到N的C^r映射空间$C^r(M,N)$, C^r同胚空间$\mathrm{Diff}^r(M,N)$, C^r自同胚空间$\mathrm{Diff}^r(M)$均可赋予微分结构,详情参看本卷第2篇拓扑学或文献[18].

定义11　设X为$C^r(r\geqslant 1)$流形, (X,f)为离散C^r动力系统,称f是C^r**结构稳定的**,若存在f在$\mathrm{Diff}^r(X)$中的邻域U^*,使得对任意$g\in U^*$,动力系统(X,f)与(X,g)拓扑共轭.

定义12　设X为$C^r(r\geqslant 1)$流形, $U\subset X$为开集, $f\in C^r(U,X)$为从U到$f(U)$的C^r同胚,对点$p\in U$,称f在p点是**局部结构稳定的**,若存在p点的邻域$V\subset U$,以及f在$C^r(U,X)$中的邻域V^*,使得对任意$g\in V^*$,存在$q\in V$,且g在q点与f在p点是局部拓扑共轭的.

拓扑共轭的要求有时太强,故有较弱的Ω共轭关系.

定义13　动力系统(X,f)和(Y,g)称为是**Ω共轭的**,若存在同胚$h:\Omega(f)\to\Omega(g)$,使得如图1-2可交换:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f|_{\Omega(f)}} & \Omega(f) \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g|_{\Omega(g)}} & \Omega(g) \end{array}$$

图 1-2

Ω 共轭也是一种等价关系.

定义 14 设 $\mathscr{E}$ 是 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 中一个等价关系,(X,f) 为一微分动力系统,$f\in\mathrm{Diff}^r(X)$,若存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 U^*,使得 U^* 含于 f 的 $\mathscr{E}$ 等价类中,则称 f 是 **C^r-ε 结构稳定的**.特别取 $\mathscr{E}$ 为 Ω 共轭关系,即为 f 是 **C^r-Ω 稳定**的定义.

1.2 双曲不动点的局部线性化和稳定流形定理

1.2.1 哈特曼-格洛普曼(Hartman-Grobman)线性化定理

设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫(Banach)空间,$\mathrm{A}:E\to E$ 是一线性算子.

定义 15 若存在 E 关于 A 的不变子空间的直和分解

$$E=E^u\oplus E^s,\quad \mathrm{A}E^u=E^u,\quad \mathrm{A}E^s=E^s,$$

及常数 $c>0,0<\lambda<1$,使对任意 $k\in\mathbf{Z}_+$ 有

$$\|\mathrm{A}^{-k}x\|\leqslant c\lambda^k\|x\|,\quad \forall x\in E^u;$$
$$\|\mathrm{A}^k x\|\leqslant c\lambda^k\|x\|,\quad \forall x\in E^s.$$

则称可逆线性映射 A 为双曲的.

例 3 设 E 为 n 维向量空间,则 A 为双曲的充要条件为 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\bar{\in} S^1\subset\mathbf{C}$.且 $\mathrm{A}|_{E^u}$ 的特征值的模 >1,而 $\mathrm{A}|_{E^s}$ 的特征值的模 <1.

定义 15 中的子空间 E^u 称为**扩张子空间**,E^s 称为**收缩子空间**.

设 M 为一 $C^r(r\geqslant1)$流形,$U\subset M$ 为开集,$f\in C^r(U,M)$,$x_0\in U$ 为f 的不动点.

定义 16 若切映射 $\mathrm{A}:=\mathrm{D}f(x_0):\mathrm{T}_{x_0}M\to T_{x_0}M$ 是双曲的,则不动点 $x_0\in U\subset M$ 称为双曲的.

定义 17 f 的 n 周期点 $x_0\in M$,若使得 x_0 是 f^n 的**双曲不动点**,则称 x_0 为 f 的**双曲周期点**,$\mathrm{Orb}_f(x_0)\subset M$ 称为f 的双曲周期轨道.

定理 1(哈特曼-格洛普曼) 设 M 是 $C^r(r\geqslant1)$巴拿赫流形,$W\subset M$ 为开集,若 $x_0\in W$ 为 C^r 映射$f:W\to M$ 的双曲不动点,则存在 x_0 的邻域 $U\subset W$,和原点 O 的邻域 $V\subset\mathrm{T}_{x_0}M$,以及同胚 $h:U\cup f(U)\to V\cup\mathrm{D}f_{x_0}(V)$,使得①$h(x_0)=\mathbf{0}$,②$h(U)=V$,③$h\circ f|_U=\mathrm{D}f(x_0)\circ h|_U$.即 f 在 x_0 点与 $\mathrm{D}f(x_0)$在 $\mathbf{0}$ 点局部拓扑共轭.

定理 2 设 M 是 $C^r(r\geqslant1)$巴拿赫流形,C^r 流 φ^t 由 C^r 向量场 $\Phi:M\to TM$ 所生成(TM 表 M 的切丛),若 x_0 是流 φ^t 的双曲不动点,则 φ^t 在 x_0 点与 $\exp(tD\Phi(x_0))$ 在 $\mathbf{0}$ 点是局部拓扑共轭的.

1.2.2　双曲不动点的局部结构稳定性

定义 18　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，$A\in L(E,E)$，$\lambda\in\mathbf{C}$，若 $\lambda I-A$ 有有界逆算子：$(\lambda I-A)^{-1}\in L(E,E)$，则称 λ 为 A 的正则点，不是正则点的 $\lambda\in\mathbf{C}$ 称为 A 的谱点，A 的正则点与谱点之集分别记成 $\rho(A)$与 $\sigma(A)$，显然 $\sigma(A)=\mathbf{C}\setminus\rho(A)$.

命题 4　有界线性算子 $A\in L(E,E)$的谱集 $\sigma(A)$是 $\mathscr{C}$中非空紧致集.

定理 3　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，可逆线性映射 $A\in L(E,E)$为双曲线性映射$\Leftrightarrow\sigma(A)\cap S^1=\varnothing$，其中 $S^1:=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$.

定理 4　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，$U\subset E$ 为开集，原点 $\mathbf{0}\in U$ 为$f\in C^1(U,E)$的双曲不动点，则 f 在 $\mathbf{0}$ 点是局部结构稳定的.

对于 $C^r(r\geqslant 1)$流的双曲不动点，也有类似局部结构稳定性定理.

定义 19　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，$U\subset E$ 为开集，$f\in C^r(U,E)(r\geqslant 1)$为从 U 到$f(U)$的 C^r 同胚，$\mathbf{0}\in U$ 为f 的不动点，$V\subset U$ 为 $\mathbf{0}$ 的任意邻域，则 f 在 $\mathbf{0}$ 点的**局部稳定集**与**局部不稳定集**分别定义为

$$W_V^s(\mathbf{0})\equiv W_V^s(\mathbf{0},f):=\{x_0\in\bigcap_{j=0}^{+\infty}f^{-j}(V)\mid \lim_{k\to+\infty}f^k(x)=\mathbf{0}\},$$

$$W_V^u(\mathbf{0})\equiv W_V^u(\mathbf{0},f):=\{y_0\in\bigcap_{j=0}^{+\infty}f^{j}(V)\mid \lim_{k\to+\infty}f^{-k}(y)=\mathbf{0}\}.$$

可以证明在双曲不动点处的局部稳定集与局部不稳定集都是 C^r 流形，因此在 f 的双曲不动点处，它们可以分别称为**稳定流形与不稳定流形**.

定义 20　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，$f:E\to E$ 为微分同胚，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，则 f 在 $\mathbf{0}$ 点处的稳定集与不稳定集分别定义为

$$W^s(\mathbf{0})\equiv W^s(\mathbf{0},f):=\{x\in E\mid \lim_{k\to+\infty}f^k(x)=\mathbf{0}\},$$

$$W^u(\mathbf{0})\equiv W^u(\mathbf{0},f):=\{y\in E\mid \lim_{k\to+\infty}f^{-k}(y)=\mathbf{0}\}.$$

显然对 $\mathbf{0}$ 的任意邻域 V 有

$$W^s(\mathbf{0},f)=\bigcup_{l=0}^{+\infty}f^{-l}(W_V^s(\mathbf{0},f)),$$

$$W^u(\mathbf{0},f)=\bigcup_{l=0}^{+\infty}f^{l}(W_V^u(\mathbf{0},f)).$$

定理 5（阿达马-派朗(Hadamard-Perron)）　设$(E,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，$U\subset E$ 为点 $\mathbf{0}$ 的开邻域，$f\in C^r(U,E)(r\geqslant 1)$为从 U 到$f(u)$的 C^r 同胚，$\mathbf{0}$ 是f 的双曲不动点，则存在 $\mathbf{0}$ 的邻域 $V\subset U$，使得 $W_V^s(\mathbf{0})$和 $W_V^u(\mathbf{0})$均为 C^r映射的图像(从而是 C^r流形)，且切空间

$$T_0W_V^s(\mathbf{0})=E^s,\quad T_0W_V^u(\mathbf{0})=E^u,$$

其中 E^s、E^u 为与双曲线性算子 $Df(\mathbf{0})=A:E\to E$ 相关的 E 关于 A 的不变子空间的直和分解 $E=E^s\oplus E^u$. 记 $A_s=A|_{E^s}$，$A_u=A|E^u$，E 的范数 $\|\cdot\|$ 满足(必要时通过引进等价范数) $\|A_s\|\leqslant\lambda<1$，$\|A_u^{-1}\|\leqslant\lambda<1$，及 $\|x\|=\max\{\|x_s\|$，

$\|x_u\|\}$, $\forall x = x_s + x_u$,其中 $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$.

由于这一结果是局部性的,所以对微分流形的微分同胚自映射的双曲不动点也成立类似的结果.

1.3 双曲不动点的全局稳定流形定理

1.3.1 关于微分同胚的稳定流形定理

定理 6(斯梅尔) 设 M 为 m 维微分流形,$f \in \mathrm{Diff}^r(M)(r \geq 1)$,则对 f 的每一个双曲不动点 $x_0 \in M$, $f(x_0) = x_0$,存在两个单射浸入 $h_s: \mathbf{R}^k \to M$ 和 $h_u: \mathbf{R}^{m-k} \to M$,满足

1° $h_s(\mathbf{0}) = h_u(\mathbf{0}) = x_0$;

2° $h_s(\mathbf{R}^k) = W^s(x_0) := \{x \in M \mid \lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = x_0\}$,

$$h_u(\mathbf{R}^{m-k}) = W^u(x_0) := \{x \in M \mid \lim_{n \to +\infty} f^{-n}(x) = x_0\};$$

3° $T_{x_0} W^s(x_0) = E^s$, $T_{x_0} W^u(x_0) = E^u$,

其中 E^s 和 E^u 为切空间 $T_{x_0} M$ 中相应于 $\mathrm{D}f(x_0)$ 的收缩子空间和扩张子空间,$k = \dim E^s$.

定义 21 称上述 $W^s(x_0)$和 $W^u(x_0)$ 分别为 f 的双曲不动点 x_0 的(全局)稳定流形和(全局)不稳定流形.

1.3.2 关于可微流的稳定流形定理

设 M 为微分流形,$\Phi: M \to TM$, φ^t 表由 Φ 生成的 C^r 流.

定义 22 设 $x_0 \in M$ 为 Φ 的奇点,即 $\Phi(x_0) = \mathbf{0}$,称切映射

$$\mathrm{D}\Phi(x_0): T_{x_0} M \to T_{x_0} M$$

为向量场 Φ 在奇点 x_0 处的黑塞(Hessian).

利用流形的局部坐标,可将上述对象归入欧氏空间.为了不增加记号,Φ, φ^t 在局部坐标系中的表示仍记为 Φ, φ^t 等.而 x_0 对应到欧氏空间的原点 $\mathbf{0}$,此时 Hessian $\mathrm{D}\Phi(x_0)$即为局部坐标表示的 Φ 在 $\mathbf{0}$ 点处的雅可比(Jacobi)矩阵,且

$$\mathrm{D}\varphi^t(x_0) = \exp(t \cdot \mathrm{D}\Phi(x_0)).$$

定义 23 若线性算子 $\mathrm{D}\Phi(x_0): \mathrm{T}_{x_0} M \to \mathrm{T}_{x_0} M$ 的特征值均有非零实部,则称向量场 Φ 的奇点 x_0 是双曲的.

易知当且仅当 x_0 是流 φ^t 的双曲不动点时,$x_0 \in M$ 为 Φ 的双曲奇点.

定理 7 设 M 为 m 维微分流形,$\Phi: M \to \mathrm{T}M$ 为 $C^r(r \geq 1)$向量场,φ^t 是由 Φ 生成的流,$x_0 \in M$ 为 Φ 的双曲奇点,则存在两个单射浸入 $h_s: \mathbf{R}^k \to M$ 和 $h_u: \mathbf{R}^{m-k} \to M$,满足

1° $h_s(\mathbf{0}) = h_u(\mathbf{0}) = x_0$;

2° $h_s(\mathbf{R}^k) = W^s(x_0) := \{x \in M \mid \lim_{t\to+\infty} \varphi^t(x) = x_0\}$,

$h_u(\mathbf{R}^{m-k}) = W^u(x_0) := \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi^t(x) = x_0\}$;

3° $T_{x_0} W^s(x_0) = E^s, T_{x_0} W^u(x_0) = E^u$.

其中 $E^s(E^u)$对应于黑塞 $D\Phi(x_0)$的特征值实部 $<0(>0)$的特征向量张成的子空间.

对于 C^1 流 φ^t 的周期轨道 L,通过与 L 横截相交的余维数 1 的局部截面 Σ,可由 φ^t 产生第一返回映射——庞加莱映射 $f:\Sigma\to\Sigma$,流的周期轨道对应 f 的不动点.由 f 不动点的双曲性可以定义流 φ^t 的闭轨 L 的双曲性,详情请参看文献[8].

2 通 有 性

2.1 横 截 性

2.1.1 基本概念

横截性理论是通有性定理的主要理论根据之一.在拓扑学中已介绍过横截性,但这里是对巴拿赫流形来叙述的.

设 M 为 C^1 类巴拿赫流形,巴拿赫空间$(E,\|\cdot\|)$为其模型空间.当且仅当对任一 $x\in W$,存在一个容许卡(α, U),$\alpha(x)=0\in E$,并且 E 容许一个直和分解(与 x 无关)$E=E_1\oplus E_2$,使得 $\alpha(U)=V_1\times V_2\subset E$,其中 V_i 是 E_i 中原点的邻域($i=1,2$),并且 $\alpha(W\cap U)=V_1\times\{0\}$时,集合 $W\subset M$ 称为一个子流形.由此可知 T_xW 是 T_xM 的一个补子空间.

定义 1 1° 设 N 和 W 是巴拿赫 C^1 流形的两个 C^1 子流形.当且仅当 $T_xM=T_xN+T_xW$(右边不要求是直和)时,称 N 和 W 在点 $x\in N\cap W$ 处是横截的,记作 $N \pitchfork_x W$.

2° 设 M,N 是巴拿赫 C^1 流形,W 是 N 的 C^1 子流形,$f:M\to N$ 为 C^1 映射,则称 f 在点 $x\in M$ 处横截于 W,当且仅当或者(2_a) $f(x)\bar{\in} W$,或者(2_b)若 $y=f(x)\in W$ 时,则子空间$(Df(x))^{-1}(T_yW)$分裂了 T_xM,并且像 $Df(x)(T_xM)$包含了 T_yW 在 T_yN 中的闭的补子空间.f 在 x 处横截于 W 记为$f\pitchfork_x W$.若 $A\subset M$,且对任意 $x\in A$ 有 $f\pitchfork_x W$,则称在 A 上 f 横截于 W,记为 $f\pitchfork_A W$,特别当 $A=M$ 时,称为 f 横截于 W,记作 $f\pitchfork W$.

定理 1 设 M,N 为巴拿赫 C^1 流形,W 是 N 的 C^1 子流形,$f:M\to N$ 为 C^1 映射,令 $x\in M$ 且 $y=f(x)\in W$.则 $f\pitchfork_x W$ 的充要条件为,在 M,N 上存在卡(α,U),(β,V)使得 $x\in U$,$y\in V$ 且具如下性质:

1° $\alpha(U)=U_1\times U_2$,$\beta(V)=V_1\times V_2$,$f(U)\subset V$,$\alpha(x)=(0,0)$,$\beta(y)=(0,0)$,$\beta(V\cap W)=V_1\times\{0\}$;

2° 记$f_{\beta\alpha}:=\beta\circ f\circ\alpha^{-1}:U_1\times U_2\to V_1\times V_2$,则有$f_{\beta\alpha}(x_1,x_2)=(\eta(x_1,x_2),x_2)$,其中$\eta$为映射$\eta:\alpha(U)\to V_1$.

定理 2 设M,N,W和f同上述定理1,若$f\pitchfork W$,则

1° $f^{-1}(W)$是M的子流形;

2° 对任一$x\in f^{-1}(W)$,令$y=f(x)$,有

$$(\mathrm{D}f(x))^{-1}\mathrm{T}_yW=\mathrm{T}_xf^{-1}(W);$$

3° 对任一$x\in f^{-1}(W)$,则$\mathrm{T}_x(f^{-1}(W))$关于T_xM的闭的补子空间同构于T_yW关于T_yN的任一闭的补子空间;

4° 若W是闭的且M是紧致的,则$f^{-1}(W)$有有限多个分支.

2.1.2 密度定理

设$\mathscr{A},M,N$为巴拿赫$C^r(r\geqslant 0)$流形,并设给定映射

$$\mathscr{V}:\mathscr{A}\to C^r(M,N)$$

记$\mathscr{V}(a)$为$\mathscr{V}_a$,则$\mathscr{V}_a:M\to N$为C^r映射,赋值映射

$$ev_{\mathscr{V}}:\mathscr{A}\times M\to N$$

定义为$ev_V(a,x):=\mathscr{V}_a(x)$.若赋值映射$ev_{\mathscr{V}}$属于$C^r$类,则称$\mathscr{V}$为一$C^r$表示.

定理 3 设$\mathscr{A},M,N$均为C^0流形,令$W\subset N$为闭集(不要求是子流形)并且$K\subset M$为紧致子集,若$\mathscr{V}:\mathscr{A}\to C^0(M,N)$为一$C^0$表示,则$A^0_{KW}:=\{a\in\mathscr{A}|\mathscr{V}_a(K)\cap W=\varnothing\}$为$\mathscr{A}$中开集.

定理 4 设$\mathscr{A},M,N$均巴拿赫C^1流形,$\dim M<+\infty$,令$W\subset N$为闭的C^1子流形,$K\subset M$为紧致子集,且$\mathscr{V}:\mathscr{A}\to C^1(M,N)$为一$C^1$表示,则$A_{KW}:=\{a\in\mathscr{A}|\mathscr{V}_a\pitchfork_x W$,对$x\in K\}$为$\mathscr{A}$中开子集.

定理 5(横截密度定理) 设$\mathscr{A},M,N$均巴拿赫C^r流形,$W\subset N$为一C^r子流形,且$\mathscr{V}:\mathscr{A}\to C^r(M,N)$为一$C^r$表示.再假设:

1° $\dim M=n<+\infty$,$\operatorname{codim}W=q<+\infty$;

2° $r>\max\{0,n-q\}$;

3° $ev_{\mathscr{V}}\pitchfork W$,

则$A_W:=\{a\in\mathscr{A}|\mathscr{V}_a\pitchfork W\}$为$\mathscr{A}$中剩余集.

2.2 几类通有性

2.2.1 有关向量场的几个结果

设M是m维C^∞流形.用$\mathscr{X}^r(M)$表M上所有C^r向量场的集合,赋以C^r结构.考虑映射

$$G:\mathscr{X}^1(M)\times M\times\mathbf{R}\to M,\ G(\Phi,x,t):=\varphi^t(x),$$

其中 φ^t 表向量场 Φ 所生成的流.

定理 6 映射 G 属于 C^1 类.

定理 7 设 $\Phi\in\mathscr{X}^1(M)$, M 是有限维流形, $x\in M$, 且 $\Phi(x)\neq 0$, 设 G 为上述 C^1 映射,则对任一 $t_0>0$,偏微分 $D_\Phi G(\Phi,x,t_0)$ 线性满射成空间 $T_{\varphi^{t_0}(x)}M$.

下面讨论有限维紧致流形上向量场所生成的闭轨.

定义 2 设 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$,则称向量场 Φ 的奇点(满足 $\Phi(x)=0$ 的 $x\in M$)或 Φ 所生成的闭轨为 Φ 的**临界元素**.奇点也称为**临界点**.

流形 M 上的曲线 $\gamma(t)$ 通常指映射 $\gamma: I\to M$,其中 $I\subset\mathbf{R}$ 为区间.今后记 $\hat{\gamma}:=\gamma(I)\subset M$.

设 M 是 m 维紧致流形,对每一 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$ 定义一个映射

$$f_\Phi: M\times\mathbf{R}_+\to M\times\mathbf{R}_+\times M,$$

$$f_\Phi(x,t):=(x,t,\varphi^t(x)),\quad x\in M, t\in\mathbf{R}_+,$$

其中 φ^t 是向量场 Φ 生成的流.令

$$\Delta:=\{(x,t,x)\mid x\in M, t\in\mathbf{R}_+\},$$

它是 $M\times\mathbf{R}_+\times M$ 的子流形,称之为对角形.

命题 1 对任意 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$, $x\in M$, $t\in\mathbf{R}_+$,有 $f_\Phi(x,t)\in\Delta\Leftrightarrow x$ 或为临界点或者属于一个周期为 t 的闭轨.

这表明 Δ 对于研究向量场的临界元素是极为有用的.

定义 3 设 X 为一空间, (X,φ^t) 为一流,对 $x\in X$,用 $\hat{\gamma}(x)$ 表示 x 的轨道,则

1° 若 $\varphi^t(x)=x$ 对一切 $t\in\mathbf{R}_+[t\in\mathbf{R}]$,亦即 $\hat{\gamma}(x)=\{x\}$,则点 $x\in X$ 称为流的不动点(亦称临界点).

2° 轨道 $\hat{\gamma}(x)$ 称为周期的 $\Leftrightarrow$ 存在 $\tau>0$,使得 $\varphi^{t+\tau}(x)=\varphi^t(x)$ 对一切 $t\in\mathbf{R}_+[t\in\mathbf{R}]$ 成立,满足此式的任一正数 τ 称为轨道的周期,而满足此式的最小正数 τ(若其存在,即 x 不是不动点)称为基本周期.

现在回到微分流形 M 上临界元素的讨论.

定义 4 设向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$.

1° Φ 的一条带有基本周期 τ 的闭轨 γ 称为横截的 $\Leftrightarrow$ 对任一 $x\in\hat{\gamma}$,线性算子 $D\varphi^\tau(x): T_xM\to T_xM$ 以 1 为其本征值,且重数为 1.

2° 设 γ 为 Φ 的一条闭轨, τ 为其任一周期,称周期 τ 为横截的 $\Leftrightarrow$ 对任一 $x\in\hat{\gamma}$,线性算子 $D\varphi^\tau(x): T_xM\to T_xM$ 以 1 为其本征值,且重数为 1.

3° 设 x 为向量场 Φ 的临界点,数 $t\in\mathbf{R}_+$ 称为 x 的横截周期 $\Leftrightarrow$ 1 不是线性算子 $D\varphi^t(x): T_xM\to T_xM$ 的本征值.

定理 8 1° 设 x 为向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$ 的临界点,则

$f_\Phi \pitchfork_{(x,\tau)} \Delta\Leftrightarrow\tau$ 是 x 的横截周期.

2° 设 γ 是 Φ 的闭轨, τ 是 γ 的任一周期,则

$f_\Phi \pitchfork_{(x,\tau)} \Delta$ 对 $x\in\hat{\gamma}\Leftrightarrow\tau$ 是一个横截周期.

定理 9 设微分流形 M 是紧致的,$\Phi_0\in\mathscr{X}^r(M)$,$\gamma_0$ 是 Φ_0 的一条闭轨带有基本周期 τ_0,则存在

1° Φ_0 在 $\mathscr{X}^r(M)$的一个邻域 $\mathscr{V}$,

2° $\hat{\gamma}_0$ 在 M 中的一个任意小的邻域 U,

3° τ_0 在 $\mathbf{R}$ 中一个任意小的邻域 I

具有如下性质:

对每一 $\Phi\in\mathscr{V}$,存在唯一的(Φ 的)闭轨 γ,使得 $\hat{\gamma}\subset U$ 以及 $\tau\in I$,使得 τ 是 γ 的周期.

定义 5 设向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$,$\Gamma_\Phi(a)\subset M$ 表 Φ 的一切临界点以及属于具有周期 $\leqslant a$ 的 Φ 的一切闭轨上的点所组成的集合.

定理 10 设 M 为紧致微分流形,则对每一 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)(r\geqslant1)$,集 $\Gamma_\Phi(a)$是闭集.

定义 6 设 M 为有限维微分流形,集合 $\mathscr{G}_0=\mathscr{G}_0^r(M)\subset\mathscr{X}^r(M)$定义为一切 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$的集合,它满足:Φ 的所有临界点都是非退化的(即对任意满足 $\Phi(x_0)=0$ 的 $x_0\in M$,线性算子 $\mathrm{D}\Phi(x_0)$是非奇异的).

定义 7 $\mathscr{G}_\Delta^r(a)\subset\mathscr{X}^r(M)$表满足下述条件的一切向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$的集合:

$$f_\Phi \pitchfork_{(x,t)} \Delta,\text{对一切 } x\in M \text{ 和 } 0<t\leqslant a$$

(此条件等价于 Φ 的具周期 $\tau\leqslant a$ 的每一闭轨都是横截的).

命题 2 $\mathscr{G}_\Delta^r(a)\subset\mathscr{G}_0^r(M)$.

定理 11 设 M 为紧致的,$\Phi_0\in\mathscr{G}_0^r(M)$,则存在 Φ_0 在 $\mathscr{X}^r(M)$中的邻域 $\mathscr{V}$ 和数 $b>0$,使得对每一 $\Phi\in\mathscr{V}$,它仅有周期 $\tau\geqslant b$ 的闭轨.

推论 1 设 M 为紧致的,对任一向量场 $\Phi_0\in\mathscr{G}_\Delta^r(a)$,存在 Φ_0 在 $\mathscr{X}^r(M)$中的邻域 $\mathscr{V}$ 和数 $b>0$,使得对任意 $\Phi\in\mathscr{V}$,不存在周期 $\tau<b$ 的周期轨道.

定理 12 设 $\Phi\in\mathscr{G}_\Delta^r(a)$,则:

1° 周期 $\leqslant a$ 的 Φ 的临界元素是孤立的;

2° 若 M 紧致,则 $\Gamma_\Phi(a)$至多包含有限多个临界元素;

3° 若 M 紧致,则存在 $\varepsilon>0$,使得 Φ 不包含具有周期 $\tau\in(a,a+\varepsilon)$的闭轨.

定理 13 若 M 是紧致的,则 $\mathscr{G}_\Delta^r(a)$为 $\mathscr{X}^r(M)$中的开子集.

定理 14 设 M 为紧致流形,且 $\Phi_0\in\mathscr{G}_\Delta^r(a)$.令 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 为所有具有周期 $\tau_i\leqslant a(1\leqslant i\leqslant n)$的闭轨道,$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 为 Φ_0 的所有临界点,则存在

1° $\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\cdots,\hat{\gamma}_n$ 的两两分离的邻域系 $U,\cdots,U_n$,

2° $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的两两分离的邻域系 $Z_1,\cdots,Z_k$,

3° 任意小数 $\delta>0$ 和 $\varepsilon>0$,

4° Φ_0 在 $\mathscr{X}^r(M)$中的一个邻域 $\mathscr{V}$,

它们具有下列性质:

(a) Φ_0 没有具周期 $\tau\in(a,a+2\varepsilon)$的闭轨;

(b) 每一向量场 $\Phi\in\mathscr{V}$,在每一 Z_i 中恰有一个临界点 x'_i,并且每一 U_i 中恰有一条闭轨 γ'_i,γ'_i 的周期 τ'_i 满足不等式:$|\tau'_i-\tau_i|<\delta$;

(c) 对每一 $\Phi\in\mathscr{V}$,诸集 $\Gamma_\Phi(a+\varepsilon)$,$\Gamma_{\Phi_0}(a+\varepsilon)$,$\Gamma_{\Phi_0}(a)$包含同样数目的临界元素.

2.2.2 关于通有性的若干结果

用 $\mathscr{S}$(可能附加下标)表示任一由某些向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$所共有的性质,令

$$\mathscr{S}^r(M):=\{\Phi\in\mathscr{X}^r(M)\mid\Phi\ 有性质\ \mathscr{S}\}.$$

定义 8 当且仅当$\mathscr{S}^r(M)$包含 $\mathscr{X}^r(M)$中的一个剩余集时,性质 $\mathscr{S}$称为在 $\mathscr{X}^r(M)$中是通有的(或简称 C^r 通有).

下面列举一些将要考察其通有性的性质.

1° 性质 $\mathscr{S}_0$:所考察的向量场的所有临界点都是非退化的;

2°性质 $\mathscr{S}_1$:所有临界点是双曲的;

3°性质 $\mathscr{S}_\Delta(a)$:周期轨道的所有$\leqslant a$ 的周期τ 是横截的(a 为一指定正数);

4° 性质 $\mathscr{S}_{3/2}(a)$:同时满足性质 $\mathscr{S}_1$与 $\mathscr{S}_\Delta(a)$;

5° 性质 $\mathscr{S}_2(a)$:满足性质 $\mathscr{S}_1$并具有基本周期$\leqslant a$ 的所有闭轨是双曲的;

6° 性质 $\mathscr{S}_3(a)$:满足性质 $\mathscr{S}_2(a)$,并且具有基本周期$\leqslant a$ 的临界元素的所有稳定和不稳定流形横截相交;

7° 性质 $\mathscr{S}_2$:对每一 a,性质 $\mathscr{S}_2(a)$被满足;

8° 性质 $\mathscr{S}_3$:对每一 a,性质 $\mathscr{S}_3(a)$被满足.

以后还要引进性质 $\mathscr{S}_4$,$\mathscr{S}_5$.

在下面关于通有性的讨论中,恒设 M 为紧致微分流形,不再一一申明.

定理 15 $\mathscr{S}_1^r(M)$为 $\mathscr{X}^r(M)$中稠密开集.

推论 2 性质 $\mathscr{S}_1$是 C^r通有的.

定理 16 设 M 为紧致流形,若 $r\geqslant1$,则对每一 $a>0$,集合 $\mathscr{S}_2^r(a)$为 $\mathscr{X}^r(M)$中稠密开集.

推论 3 集合 $\mathscr{S}_2(M)$为 $\mathscr{X}^r(M)$中剩余集,所以性质 $\mathscr{S}_2$是 C^1通有的

定理 17(Kupka-Smale) 设 M 为紧致流形,若 $r\geqslant1$,则 $\mathscr{S}_3^r(M)$为 $\mathscr{X}^r(M)$中剩余集,亦即 $\mathscr{S}_3$是 C^r通有的.

令 $\mathrm{grad}^r(M)$表 M 上 C^r 类梯度向量场空间,它是 $\mathscr{X}^r(M)$的闭线性子空间.

定理 18 设 M 紧致、$r\geqslant1$,则性质 $\mathscr{S}_3$在空间 $\mathrm{grad}^r(M)$中是通有的.

定理 19 设 M 为紧致流形,则下述性质在空间 $\mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant1)$中是通有的:

1° 所考察的微分同胚的每一周期点是双曲的;

2° 对每一对周期点 $p,q\in M$,$W^s(p)$和 $W^u(q)$是横截相交的.

定理 20(封闭性引理) 设 M 为紧流形,$\Phi_0\in\mathscr{X}^1(M)$.假设 $x\in M$ 是 Φ_0 的非游荡点,则 Φ_0 在 $\mathscr{X}^1(M)$中的每一个邻域 $\mathscr{V}$包含一向量场 Φ,使得 x 在 Φ 的某一闭轨上.

设 Φ 是流形 M 上某一向量场，$\Gamma_\Phi \subset M$ 表属于 Φ 的临界元素的全体点之集.

定义 9 向量场 $\Phi \in \mathscr{X}^r(M)$ 有性质 $\mathscr{G}_4 \Leftrightarrow \Omega(\Phi) = \overline{\Gamma}_\Phi$.

定义 10 设(Y,ρ)为紧致度量空间，令 FY 表 Y 的一切闭子集所构成的类($\subset \mathscr{P}(Y)$)，则在下述度量 d 之下，(FY,d)为一度量空间：

$$d(A,B) := \max\{\sup_{a\in A}\rho(a,B), \sup_{b\in B}\rho(A,b)\},$$

d 称为 FY 上的豪斯多夫(Hausdorff)度量.

对序列$\{A_n \mid A_n \in FY, n \in \mathbf{N}\}$定义如下极限

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n := \{y \in Y \mid y = \lim_{n\to\infty} y_n, y_n \in A_n\},$$

易知它是 FY 的一个点.

设 X 是度量空间，$g: X \to FY$(g 可看作是集值映射).

定义 11 函数 g 称为下半连续的(简记为 l.s.c.)，若对每一 $x \in X$ 以及每一收敛于序列(x_n)，则有

$$\lim_{n\to\infty} \inf g(x_n) \supset g(x).$$

命题 3 设 Y 为紧致度量空间，则每一单调增加的 l.s.c.函数序列收敛于一个 l.s.c.函数. 亦即，若 $g_n: X \to FY$ 是 l.s.c.的，并且 $g_n(x) \subset g_{n+1}(x), n = 1,2,\cdots$，则由下式给出的极限函数 g

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) := \overline{\bigcup_n g_n(x)}$$

是 l.s.c.的.

命题 4 设 Y 为紧致度量空间，任一 l.s.c. 函数($X \to FY$)的连续点集是 X 中的剩余集.

对紧致流形 M，由封闭性引理(定理 20)知 $\mathscr{G}_3^1(M)$是 $\mathscr{X}^1(M)$的剩余集. 对向量场 Φ，令 $\Gamma_n(\Phi)$表 Φ 的具有周期$\leqslant n$ 的所有周期点(包括临界点)的集合.

命题 5 集值映射

$$\mathscr{G}_3^1(M) \to FM, \quad \Phi \mapsto \Gamma_n(\Phi)$$

是 l.s.c.的.

再定义映射

$$\overline{\Gamma}: \mathscr{G}_3^1(M) \to FM, \quad \overline{\Gamma}(\Phi) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(\Phi)}.$$

命题 6 $\overline{\Gamma}$ 的连续点的集合是 $\mathscr{G}_3^1(M)$的剩余集.

定理 21(Pugh) 设 G 表映射$\overline{\Gamma}: \mathscr{G}_3^1(M) \to FM$ 的所有连续点之集. 若 $\Phi \in G$，则 $\Omega(\Phi) = \overline{\Gamma}(\Phi)$.

推论 4(Pugh) 性质 $\mathscr{G}_4$是 C^1 通有的.

定义 12 向量场 $\Phi \in \mathscr{X}^r(M)$的正则首次积分指的是一个 C^m 函数 $f: M \to \mathbf{R}(m = \dim M)$，它在 M 的任一开集上不为常数，但沿着 Φ 的轨道取常值.

定义 13 当且仅当 Φ 不存在正则首次积分时，称向量场 $\Phi \in \mathscr{X}^r(M)$具有性质 $\mathscr{G}_5$.

定理 22(托姆(Thom)) 若 M 为紧致微分流形，则性质 $\mathscr{G}_5$是 C^1 通有的.

3 结构稳定性

3.1 基本概念、例

3.1.1 流的拓扑等价

定义 1 设 M 为 $C^r(r\geqslant 1)$流形，$\mathscr{X}^r(M)$赋以 C^r 拓扑，M 上 C^r 向量场空间 $\mathscr{X}^r(M)$的两个向量场 Φ,Ψ 称为拓扑等价的，若存在同胚 $h:M\to M$，它将 Φ 的轨道变为 Ψ 的轨道，且保持定向. 后一条件意味着，设 Φ,Ψ 生产的流分别为 φ^t,ψ^t，若 $p\in M,\delta>0$，则存在 $\epsilon>0$，使得对 $0<t<\delta$ 有某个 $0<t'<\epsilon$，成立着 $h\varphi^t(p)=\psi^{t'}(h(p))$. h 称为 Φ 与 Ψ 之间的拓扑等价，它是 $\mathscr{X}^r(M)$上的一个等价关系. 这是一个比第 1 章定义的拓扑共轭弱一些的等价关系.

命题 1 设 h 是 $\Phi,\Psi\in\mathscr{X}^r(M)$之间的一个拓扑等价，则

1° $p\in M$ 是向量场 Φ 的临界点$\Leftrightarrow h(p)$是 Ψ 的临界点；

2° 向量场 Φ 过 p 的轨道 $\mathrm{Orb}_\varphi(p)$是闭的$\Leftrightarrow\mathrm{Orb}_\psi(h(p))$是闭的；

3° $\mathrm{Orb}_\varphi(p)$的 ω 极限集(α 极限集)在 h 作用下的像是 $\mathrm{Orb}_\psi(h(p))$的 ω 极限集(α 极限集).

这说明两个拓扑等价的向量场所产生的轨道空间的结构有很多相同的定性特征.

定义 2 设 M 为微分流形，若在$\mathscr{X}^r(M)$存在 Φ 的邻域 $\mathscr{V}$，使得任意向量场 $\Psi\in\mathscr{V}$都拓扑等价于 Φ，则向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$称为是结构稳定的.

3.1.2 例

例 1 任何微分流形 M 上的零向量场不是结构稳定的.

例 2 环面 $T^2:=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上的有理流与无理流. 记 $\pi:\mathbf{R}^2\to T^2$ 为自然投射，则 π 为复叠映射，$\mathbf{R}^2$ 为 T^2 的万有复叠空间. 设$(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，记$[x_1,x_2]:=\pi((x_1,x_2))\in T^2$. 对任意点 $x\in\mathbf{R}^2$，设 $\Phi(x):=(\alpha,\beta)$为 $\mathbf{R}^2$ 上常值向量场，令 $\widehat{\Phi}([x]):=T\pi_x(\Phi(x))\in T_{[x]}(T^2)$，$\widehat{\Phi}\in\mathscr{X}^r(T^2)$. 若 α,β 有理相关，则 $\widehat{\Phi}$在 T^2 上定义了一个有理流，若 α,β 有理无关，则 $\widehat{\Phi}$在 T^2 上定义了一个无理流. 当 $\widehat{\Phi}$定义有理流时，通过任意点$[x]\in T^2$ 的轨道都是闭轨道，当 $\widehat{\Phi}$定义无理流时，通过每点$[x]$的轨道均非闭轨道，但在 T^2 上稠密，对任一有理流，任一轨道的 ω 极限集为轨道自身，而当其为无理流时，每一轨道的 ω 极限集为整个环面 T^2. 这样的向量场在 $\mathscr{X}^r(T^2)$中不是结构稳定的.

例3 分析 $S^1\subset\mathbb{R}^2$ 上向量场的结构稳定性,设 V^0 是 S^1 上两个单位向量场(一个顺时针方向,一个逆时针方向)之一.对任一 $V\in\mathscr{X}^r(S^1)$,则有 $V(p)=f(p)V^0(p),p\in S^1,f\in C^r(S^1,\mathbb{R})$.因为 $V(p)=0\Leftrightarrow f(p)=0$,以及对任意紧致集 $K\subset S^1$,存在 $f\in C^r(S^1,\mathbb{R})$,使得 $f^{-1}(0)=K$.从而 K 是向量场 $V=fV^0$ 的奇点集.由于拓扑等价的向量场的奇点是同胚对应的,因此向量场的等价类的基数不少于 S^1 上紧致集(由于 S^1 为紧致豪斯多夫空间,所以紧集即闭集,故也是 S^1 上的闭子集)的同胚类的基数.从而对 $\mathscr{X}^r(S^1)$的所有向量场的轨道结构在拓扑等价的意义下进行分类是不可能的.所以只能限制在 $\mathscr{X}^r(S^1)$的一个剩余集上进行分类.因 S^1 是紧的,由第2章定理15知 $\mathscr{G}_1^r(S^1)\subset\mathscr{X}^r(M)$是稠密开集.而 $V\in\mathscr{G}_1^r(S^1)$的条件是向量场 V 的所有临界点是双曲的.在 S^1 情形,它等价于 V 的奇点是非退化的,即$TV(p)\neq 0$,由是 $Df(p)\neq 0$,其中 $V=f\cdot V^0$.若 $Df(p)<0$,则 p 为汇(吸引奇点);若 $Df(p)>0$,则 p 为源(排斥奇点).由于这些奇点是孤立的,从而任一这样的向量场 V 的奇点个数有限(可以为零),但 V 的源和汇当点绕 S^1 而行时必须交替出现,从而个数必为偶数.所以向量场 $V,W\in\mathscr{G}_1^r(S^1)$有相同个数的奇点,则 V 与 W 为拓扑共轭(当然更是拓扑等价).事实上设 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_s,b_s$ 依次为 V 的汇与源,同样 $a'_1,b'_1,a'_2,b'_2,\cdots,a'_s,b'_s$ 依次为 W 的汇与源.以下构造作成 V 与 W 为共轭的同胚 $h:S^1\to S^1$,首先令 $h(a_i)=a'_i,h(b_i)=b'_i$.任意选定点 $p_i\in(a_i,b_i)$,$q_i\in(b_i,a_{i+1}),p'_i\in(a'_i,b'_i),q'_i\in(b'_i,a'_{i+1})$(此处$(\cdot,\cdot)$表 S^1 上以标认点为端点的定向开弧).对任意 $p\in(a_i,b_i)$,存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$,使得 $\varphi^t(p)=p_i$(φ^t,ψ^t 分别表由 V,W 生成的 S^1 上的流).定义 $h(p):=\psi^{-t}(p'_i)=\psi^{-t}\circ h\circ\varphi^t(p)$,对$(b_i,a_{i+1})$中的点作类似构造,容易验证 $\psi^t\circ h=h\circ\varphi^t$.对向量场无奇点情形,可以类似处理.最后证明,当 $V\in\mathscr{X}^r(S^1)$为结构稳定时,则 $V\in\mathscr{G}_1^r(S^1)$.由于 $\mathscr{G}_1^r(S^1)$为 $\mathscr{X}^r(S^1)$中稠密开集,故 V 的任意邻域 $\mathscr{V}$,存在 $W\in\mathscr{V}\cap\mathscr{G}_1^r(S^1)$,使得 V 拓扑等价于 W,从而 V 的奇点为孤立奇点,并且都是双曲的.所以 $V\in\mathscr{G}_1^r(S^1)$.从而 $\mathscr{X}^r(S^1)$中结构稳定的向量场构成一稠密开集,并且可以对它进行分类.

对 M 是黎曼(Riemann)流形情形,设 $\Phi_0\in\mathscr{X}^r(M)$在定义2意义下是 C^r 结构稳定的.则还可以要求它满足如下条件.

(ε)条件 对每一 $\varepsilon>0$,存在 Φ_0 的邻域 $\mathscr{V}=\mathscr{V}(\varepsilon)\subset\mathscr{X}^r(M)$,使得对任意 $\Phi\in\mathscr{V}$,存在同胚 $h:M\to M$,它实现 Φ_0 与 Φ 之间的拓扑等价,并且满足条件(ρ 为 M 上的黎曼度量):

$$\rho(x,h(x))<\varepsilon,\qquad \text{对一切 } x\in M.$$

今后流形 M 上一切 C^r 结构稳定向量场记为$\Sigma^r(M)$;M 上一切 C^r 结构稳定微分同胚记为 $\sigma^r(M)$.

3.2 结构稳定系统的必要条件

因为 $\Sigma^r(M)\subset\mathscr{X}^r(M)(\sigma^r(M)\subset\mathrm{Diff}^r(M))$为开集,对任意 $\Phi\in\Sigma^r(M)(f\in\sigma^r$

(M)),它必定具有一切在相位等价(拓扑共轭)下不变的通有性.由本章定理17得

命题2 紧致微分流形上每一个 C^1 结构稳定的动力系统的临界元素集是非空的.

本节以下 M 均表紧致微分流形.

定义3 当且仅当存在 $\hat{r}$ 的管状邻域 $U\subset M$,使得没有其他闭轨完全被包含在 U 中时(然而,容许其他闭轨与 U 有非空交),向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$ 的闭轨 r 称为管状孤立的.

命题3 设 $\Phi\in\Sigma^r(M)$,则 Φ 的每一闭轨是管状孤立的.

定理1(Markus) 设 $\Phi_0\in\mathscr{X}^r(M)$ 为结构稳定并满足(ε)条件,则 Φ_0 有性质 $\mathscr{G}_2$.

定理2 若 $f\in\sigma^r(M)$,则 f 的每一闭轨是双曲的.

定理3 若 $\Phi\in\Sigma^1(M)$,则 Φ 有性质 $\mathscr{G}_4$,亦即它的非游荡点的集合等于它的周期点集的闭包.对于微分同胚 $f\in\sigma^1(M)$,同样的结论成立.

定理4(斯梅尔) 若一光滑动力系统是 C^1 结构稳定的,则它的临界元素的稳定和不稳定流形横截相交.

定理5 若 $\Phi\in\Sigma^1(M)$,则 Φ 有性质 $\mathscr{G}_5$,亦即 Φ 没有正则首次积分.

3.3 莫尔斯-斯梅尔系统

定义4 设 M 为紧致微分流形.令 $S^r(M)$ 表满足如下称为莫尔斯-斯梅尔(Morse-Smale)条件的一切向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$ 之集:

1° 非游荡集 $\Omega(\Phi)$ 是有限多个临界点和有限多条闭轨之并;

2° 所有临界元素均为双曲的;

3° 临界元素的稳定流形与不稳定流形横截相交.

向量场 $\Phi\in S^r(M)$ 称为莫尔斯-斯梅尔(简记为M-S)向量场.

定义5 微分同胚 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 称为莫尔斯-斯梅尔(简记为M-S)微分同胚,需满足如下条件:

1° $\Omega(f)$ 是有限集;

2° 所有周期点都是双曲的;

3° 周期点的稳定和不稳定流形横截相交.

所有M-S微分同胚的集合,记为 $s^r(M)\subset\mathrm{Diff}^r(M)$.

定义6 设 M 是紧致微分流形,x 与 y 是 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 的双曲周期轨道[对应的,$\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲临界元素],若 $W^s(x)\cap W^u(y)\neq\varnothing$,则称 x 前于 y,记为 $x\leqslant y$.对M-S微分同胚 f[对应的M-S向量场 Φ]的全体周期轨道[对应的全体临界元素]配上关系"$\leqslant$"为 f[对应的 Φ]的骨架图.

命题4 上述关系 $\leqslant$ 是相应集合上的偏序关系.

定理6(帕利斯(Palis)) 1° 对 $r\geqslant1$,$S^r(M)\subset\mathscr{X}^r(M)$ 为开集;$S^r(M)\subset$

$\mathrm{Diff}^r(M)$为开集；

2° 若向量场 Ψ 充分邻近于 $\Phi\in s^r(M)$，则 Ψ 与 Φ 有同构的骨架图；对应地，当微分同胚 g 充分邻近 $f\in s^r(M)$，则 g 与 f 有同构的骨架图.

定理 7 对 $\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$，$\dim M=2$，则 M-S 条件等价于下列条件：

1° Φ 的一切轨道的 ω 极限集与 α 极限集均为临界元素；

2° 所有临界元素是双曲的；

3° 无鞍点间的连接轨道.

定理 8(Peixoto) 设 M 为紧致 C^r 二维可定向流形($r\geqslant 1$)，当且仅当 Φ 是 M-S 向量场时，$\Phi\in\mathscr{X}^r(M)$为结构稳定.

定理 9(帕利斯-斯梅尔) 每一微分同胚 $f\in s^r(M)$是 C^r 结构稳定的，每一个向量场 $\Phi\in S^r(M)$是 C^r 结构稳定的.

3.4 阿诺索夫系统

3.4.1 双曲不变集

M-S 条件仅是结构稳定的充分条件，而非必要条件，现在介绍一类结构稳定的微分同胚，它不要求满足 M-S 条件，即所谓阿诺索夫系统，先引进双曲集的概念.

定义 7 设 M 为一光滑黎曼流形，$P\subset M$ 为开集，$f\in C^1(P,M)$为从 P 到 $f(P)$ 的微分同胚.若

1° Λ 关于 f 是不变的，即 $f(\Lambda)=\Lambda$；

2° M 的切丛 $\mathrm{T}M$ 在 Λ 上的限制 $\mathrm{T}_\Lambda M:=(\mathrm{T}M)|_\Lambda$ 分解为关于切映射 $\mathrm{T}f$-不变的连续的 Whitney 和(即 C^0 直和)

$$\mathrm{T}_\Lambda M=E^-\oplus E^+,$$

$$\mathrm{T}_xf(E_x^-)=E_{f(x)}^-,\mathrm{T}_xf(E_x^+)=E_{f(x)}^+,\ \forall x\in\Lambda;$$

3° 对 M 的黎曼度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$，存在常数 $C_1>0,C_2>0$ 和 $0<\lambda<1$，使得

$$\|\mathrm{T}f^n(v)\|\geqslant C_1\lambda^{-n}\|v\|,\quad \forall v\in E^-,n\in\mathbf{N};$$

$$\|\mathrm{T}f^w(v)\|\geqslant C_2\lambda^{-n}\|w\|,\quad \forall w\in E^-,n\in\mathbf{N},$$

$\|\cdot\|$是由黎曼度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$给出的范数，则紧致集 $\Lambda\subset P$ 称为 f 的**双曲不变集**.

$\mathrm{T}f$ 限制在向量丛 E^- 上称为扩张的，限制在 E^+ 上称为压缩的.

若对于 M 的黎曼度量《·,·》，定义 7 中的常数 C_1,C_2 均可取为 1，则称黎曼度量《·,·》适合于 Λ.

命题 5 在定义7的条件下，存在与$\langle\cdot,\cdot\rangle$等价的黎曼度量《·,·》和常数 $0<\tau<1$，使得([]·[]是由《·,·》给出的范数)

$$[]\mathrm{T}f(v)[]\geqslant\tau^{-1}[]v[],\quad \forall v\in E^-,$$

$$[]\mathrm{T}f(w)[]\leqslant\tau[]w[],\quad \forall w\in E^+.$$

以下讨论流的情形.设 M 为黎曼流形，$\mathrm{T}M$ 为其切丛(关于丛理论的知识，可以

参看本卷"拓扑学"篇），令 θ^t 为丛映射 $\theta^t:TM\to TM$ 的单参数群（$t\in\mathbf{R}$），称流 θ^t 为

1° 压缩的⇔存在常数 $c>0,\lambda>0$，使得 $\|\theta^t(v)\|\leqslant ce^{-\lambda t}\|v\|$，对任意 $v\in TM,t\in\mathbf{R}$；

2° 扩张的⇔θ^{-t} 是压缩的.

设 M 为紧光滑黎曼流形，φ^t 是由向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^1(M)$ 生成的流，则 $T\varphi^t:TM\to TM$ 为丛映射的单参数群. 令 $\Lambda\subset M$ 为一闭不变集：$\varphi^t(\Lambda)=\Lambda$，对 $t\in\mathbf{R}$.

定义 8 设 M 为紧黎曼流形，φ^t 为 M 上由向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^1(M)$ 生成的流，$\Lambda\subset M$ 为闭不变集，当且仅当以下条件成立时称 Λ 有双曲结构或 Λ 是双曲集：切丛 TM 对 Λ 的限制 $(TM)|_\Lambda=T_\Lambda M$ 容许分解成丛的惠特尼（Whitney）和

$$T_\Lambda M=E^+\oplus E^-\oplus E^0,$$

其中 E^+,E^-,E^0 在 $T\varphi^t$ 下是不变的，流 $T\varphi^t|_{E^+}$ 是压缩的，$T\varphi^t|_{E^-}$ 是扩张的，而 E^0 是由 φ^t 对 t 微分所得的线丛：$E_x^0=[\Phi(x)]=\mathrm{Span}(\Phi(x))$.

空间 $T^m:=S^1\times\cdots\times S^1$（$m$ 个因子）称为 m-环面，易知 $T^m=\mathbf{R}^m/\Gamma$，Γ 表向量加群 $\mathbf{R}^m$ 的子群 $\Gamma=\mathbf{Z}^m$，因此 T^m 也可定义为

$$T^m:=\{(x^1,\cdots,x^m)(\mathrm{mod}\ 1)\mid(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbf{R}^m\},$$

设 m 阶矩阵 $A=[a_{ij}]\in SL(m;\mathbf{Z})$，即 $a_{ij}\in\mathbf{Z}$ 且 $\det A=\pm1$，因 $A(\Gamma)\subset\Gamma$，A 可诱导映射 $T^m\to T^m$. 因 $A^{-1}\in SL(m;\mathbf{Z})$，所以 $A^{-1}(\Gamma)\subset\Gamma$ 且 A 诱导 T^m 上的一个微分同胚映射 $f_A:T^m\to T^m$.

定义 9 上述映射 f_A 称为 m-环面的代数自同构.

3.4.2 阿诺索夫微分同胚

定义 10 设 M 为紧致黎曼流形，$f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 称为阿诺索夫微分同胚⇔整个流形 M 有双曲结构.

例 4 设 $f_A:T^m\to T^m$ 为代数自同构，若矩阵 A 的谱 $\sigma(A)\subset\mathbf{C}$ 满足 $\sigma(A)\cap S^1=\varnothing$（$S^1:=\{z\in\mathbf{C}\mid|z|=1\}$），则 f_A 为阿诺索夫微分同胚，称为**环面双曲自同构.**

定理 10 设 M 为紧致黎曼流形，则 M 上所有阿诺索夫微分同胚之集在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中是开集.

定理 11（阿诺索夫） 在紧致黎曼流形 M 上的每一阿诺索夫微分同胚是 C^1 结构稳定的，更确切地说：若 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 为阿诺索夫微分同胚，则对 $C^0(M,M)$ 中恒等映射 id_M 的任一邻域 $\mathscr{N}$，存在 f 在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的邻域 $\mathscr{V}$，使得任一 $g\in\mathscr{N}$ 是由同胚映射 $h\in\mathscr{N}$ 拓扑共轭于 f：$g\circ h=h\circ f$.

定理 12（Manning） 在 m-环面 T^m 上的每一阿诺索夫微分同胚是拓扑共轭于 T^m 上的代数自同构.

定义 11 设 M 为紧致黎曼流形，如果整个流形 M 有定义 8 意义下的双曲结构，则由向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^1(M)$ 生成的流 φ^t 称为阿诺索夫流.

定理 13（阿诺索夫） 设 M 为紧致黎曼流形，则由向量场 $\Phi\in\mathscr{X}^1(M)$ 生成的每一阿诺索夫流是 C^1 结构稳定的.

3.4.3 测地流

这是一类重要的阿诺索夫流.

设 M 为紧致黎曼流形,考虑 M 上的单位球丛.

$$W:=\{(q,v)\mid q\in M, v\in T_qM, \|v\|=1\}.$$

若 $\dim M=m$,则 W 是 $2m-1$ 维流形. 任一流 $\varphi^t: W\to W, t\in\mathbf{R}$ 称为切线流,球丛的底空间 M 称为流 φ^t 的构形空间,$\pi: W\to M,(q,v)\mapsto q$ 为丛的自然投射.

某些由 M 上二阶微分方程诱导的流可以化归为切线流,设

$$\ddot{q}=f(q,\dot{q})$$

是一 M 上的二阶微分方程. 它在 TM 上诱导一个流

$$\dot{q}=v,\quad \dot{v}=f(q,v).$$

若此流具有性质:每当 $\|v(0)\|=1$ 则 $\|v(t)\|=1$,则它是一切线流. 最重要的切线流是测地流.

定义 12 设 W 是黎曼流形 M 上的单位球丛,令 $\varphi^t: W\to W, t\in\mathbf{R}$ 是一如下定义的切线流:给定点 $w:=(q,v)\in W$,将点 q 沿着按 v 指向的测地线移动距离 t(即 t 是从 q 算起的,以 v 的指向为正向的此测地线的弧长参数)得到的点记为 $q_t\in M$,用 v_t 表在 q_t 点的切于此测地线的单位向量,令 $\varphi^t(q,v):=(q_t,v_t)\in W$, φ^t 称为 M 上的测地流.

注意,集合 $\{\pi(\varphi^t(w))\mid t\in\mathbf{R}\}$ 为 M 上的测地线.

测地流与力学的联系在于下述.

定理 14 每一完整力学系统在时间轴作适当变量替换后可化归为一测地流.

关于完整力学系,参看文献[15].

定理 15(阿诺索夫-加当-阿达马-罗巴切夫斯基(Anosov-Hadamard-Lobachevsky)) 设 M 为具有负曲率的紧致黎曼流形,则其测地流为阿诺索夫流.

3.4.3 稳定集与不稳定集

设 (X,d) 为一度量空间,用 Homeo(X) 表示从 X 到 X 的同胚映射群.

定义 13 对于 $f\in$ Homeo(X) 和 $x\in X$,集合

$$W^s(x,f):=\{y\in X\mid \lim_{k\to+\infty} d(f^k(y),f^k(x))=0\}$$

和

$$W^u(x,f):=\{y\in X\mid \lim_{k\to+\infty} d(f^{-k}(y),f^{-k}(x))=0\}$$

分别称为 f 在点 x 的稳定集和不稳定集.

定义 14 设 $f\in$ Homeo(X), $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$,分别称集合

$$\begin{aligned}W_\varepsilon^s(x,f):&=\bigcap_{j\geq 0} f^{-j}(B(f^j(x),\varepsilon))\cap W^s(x,f)\\&=\{y\in X\mid d(f^j(y),f^j(x))<\varepsilon, j\in\mathbf{Z}_+,\\&\qquad \lim_{k\to+\infty} d(f^k(y),f^k(x))=0\}\end{aligned}$$

与

$$W_\epsilon^u(x,f):=\bigcap_{j\geq 0}f^j(B(f^{-j}(x),\epsilon))\cap W^u(x,f)$$
$$=\{y\in X\mid d(f^{-j}(y),f^{-j}(x))<\epsilon,j\in\mathbf{Z}_+,$$
$$\lim_{k\to+\infty}d(f^{-k}(y),f^{-k}(x))=0\}$$

为 f 在点 x 的(尺度为 ϵ 的)局部稳定集和局部不稳定集.

这些集合之间满足如下关系:

$$W^u(x,f)=W^s(x,f^{-1}),\quad W_\epsilon^u(x,f)=W_\epsilon^s(x,f^{-1}),$$

且对任意 $\epsilon>0$ 有

$$W^s(x,f)=\bigcup_{j\geq 0}f^{-j}W_\epsilon^s(f^j(x),f),$$
$$W^u(x,f)=\bigcup_{j\geq 0}f^jW_\epsilon^u(f^{-j}(x),f).$$

定义 15　对任意 $k\in\mathbf{N}$, k 维圆盘 D^k 定义为

$$D^k:=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\in\mathbf{R}^k\mid\sum_{j=1}^k u_j^2<1\},$$

设 M 为光滑黎曼流形, $\Lambda\subset M$. 称 $\{D_x\}_{x\in\Lambda}$ 为 C^r 嵌入圆盘的一个连续簇, 若对任意 $x\in\Lambda$ 存在 x 的邻域 $U(x)$ 和连续映射

$$\theta:U(x)\to \mathrm{Emb}^r(D^k,M)$$

满足

$$\theta(y)(D^k)=Dy,\quad \theta(y)(0)=y,\forall y\in U(x),$$

其中 $\mathrm{Emb}^r(D^k,M)$ 表从 D^k 到 M 的一切 C^r 嵌入组成的空间, 它是映射空间 $C^r(D^k,M)$ 的开子集.

以下是稳定流形定理.

定理 16　设 M 为光滑黎曼流形, $\Lambda\subset M$ 为紧致集, $f\in\mathrm{Diff}^r(M)(r\geq 1)$ 以 Λ 为其双曲不变集, $T_\Lambda M=E^+\oplus E^-$ 是由 f 在 Λ 的双曲条件给出的惠特尼和分解, 则存在 C^r 嵌入圆盘的连续簇 $\{D_x^s\}_{x\in\Lambda}$ 和常数 $K>0, 0<\lambda<\mu<1, \epsilon>0$ 满足:

1° $\forall x\in\Lambda$, 切空间 $T_xD_x^s=E_x^s$;

2° $\forall y\in D_x^s$ 有

$$d(f^n(y),f^n(x))\leq K\lambda^n d(y,x),n\in\mathbf{N}$$

(因而 $D_x^s\subset W^s(x,f)$);

3° $\forall y\in D_x^s\cap B(x,\epsilon)$, $B(x,\epsilon):=\{y\in M\mid d(y,x)<\epsilon\}$

$$d(f(y),f((x)))\leq\mu d(y,x);$$

4° $D_x^s\cap B(x,\epsilon)=W_\epsilon^s(x,f)$

(因而 $W_\epsilon^s(x,f)$ 是 C^r 嵌入子流形).

推论 1　对于 $x\in\Lambda$, 有

$$W_\epsilon^s(x,f)=\{y\in M\mid d(f^n(y),f^n(x))<\epsilon,n\in\mathbf{Z}_+\}.$$

对应的, 有如下不稳定流形定理及相关推论.

定理 17 设 M 为光滑黎曼流形，$\Lambda\subset M$ 为紧致集，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geq 1)$以 Λ 为其双曲不变集，$T_\Lambda M=E^+\oplus E^-$是由 f 在 Λ 上的双曲性条件给出的 Whitney 和分解，则存在 C^r 嵌入圆盘的连续簇$\{D_x^u\}_{x\in\Lambda}$和常数 $K>0,0<\lambda<\mu<1,\epsilon>0$，满足

1° $\forall x\in\Lambda$，切空间 $T_xD_x^u=E_x^-$；

2° $\forall y\in D_x^u$ 有

$$d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))\leq K\lambda^n d(y,x),n\in \mathbf{N}$$

(因而 $D_x^u\subset W^u(x,f)$)；

3° $\forall y\in D_x^u\cap B(x,\epsilon)$有

$$d(f^{-1}(y),f^{-1}(x))\leq \mu d(y,x);$$

4° $D_x^u\cap B(x,\epsilon)=W_\epsilon^u(x,f)$

(因而 $W_\epsilon^u(x,f)$是 C^r 嵌入子流形).

推论 2 对于 $x\in\Lambda$，有

$$W_\epsilon^s(x,f)=\{y\in M\mid d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))<\epsilon,n\in \mathbf{Z}_+\}.$$

据上列定理，因为 $T_xD_x^u=E_x^-,T_xD_x^s=E_x^+$，所以 $W_\epsilon^u(x,f)\pitchfork_x W_\epsilon^s(x,f)$. 事实上，更有下述稳定流形与不稳定流形的横截相交定理.

定理 18 设 M 为光滑黎曼流形，$\Lambda\subset M$ 为紧致集，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geq 1)$以 Λ 为其双曲不变集. 则存在充分小的 $\epsilon>0$ 和 $0<\delta<\epsilon$，使得对于 $y,z\in\Lambda$，且 $d(y,z)<\delta$，则 $W_\epsilon^u(y,f)$与 $W_\epsilon^s(z,f)$存在唯一的横截相交点$[y,z]$，且交点$[y,z]$连续依赖于 y 和 z.

3.5 公理 A 系统，Ω 稳定性

3.5.1 公理 A 系统

定义 16 设 M 为紧致光滑黎曼流形，$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$. 关于 f 的下列条件被称为"公理 A"：

1° f 的非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$具有双曲结构；

2° $\overline{\mathrm{Per}(f)}=\Omega(f)$，即周期点在非游荡集中稠密.

前面已知，若 Λ 为$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$的双曲不变集，只要 $y,z\in\Lambda,d(y,z)<\delta$，则 $W_\epsilon^u(y,f)$与 $W_\epsilon^s(z,f)$具有唯一的横截相交点$[y,z]$.

定义 17 若存在 $\delta>0$，使得每当 $y,z\in\Lambda,d(y,z)<\delta$ 时，必有$[y,z]\in\Lambda$，则称 f 在Λ 上具有局部乘积结构.

例 5 紧致光滑黎曼流形 M 上的阿诺索夫微分同胚f在M 上具有局部乘积结构.

定理 19(雾状引理) 设 $x,y\in M$ 为$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$的双曲周期点，且 $W^u(x,f)\pitchfork_q W^s(y,f)$；$W^u(y,f)\pitchfork_p W^s(x,f)$，则$\{p,q\}\subset\Omega(f)$.

定理 20 设 M 为紧致光滑黎曼流形，$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A，则 $\Omega(f)$具有局

部乘积结构.

定义 18 设 X 为拓扑空间，$f\in \mathrm{Homeo}(X)$，若存在一条轨道在 X 中稠密，则 f 定义了 X 上一个离散动力系统 (X,f)，f(或动力系统 (X,f))称为是拓扑传递的.

命题 6 设 X 为第二可数的贝尔(Baire)空间，$f\in \mathrm{Homeo}(X)$，f 为拓扑传递$\Leftrightarrow$对 X 的任意二个非空开集 U 和 V，存在整数 m 使得 $f^m U\cap V\neq\varnothing$.

定义 19 微分同胚 $f: U\to f(U)\subset M$ 的双曲不变集 $\Lambda\subset U$ 称为局部极大的，若存在开邻域 $V\supset\Lambda$，使得对 V 中 f 的任意不变集 $\Lambda'\supset\Lambda$，均有 $\Lambda'=\Lambda$.

命题 7 设 $f: U\to M$ 是从开集 U 到像集 $f(U)$ 的微分同胚，$\Lambda\subset U$ 是 f 的局部极大双曲集，则 $\overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)}=\Omega(f|_\Lambda)$.

对 $f\in \mathrm{Homeo}(X)$，$D\subset X$，记

$$W^s(D):=\bigcup_{x\in D}W^s(x,f),\quad W^u(D):=\bigcup_{x\in D}W^u(x,f).$$

定理 21(斯梅尔谱分解定理) 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant 1)$，且 f 满足公理 A，则存在 $n\in\mathbf{Z}_+$，使得 $\Omega(f)$ 可表为 n 个互不相交的局部极大的闭不变集 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ 之并，且满足：

1° f 在每个 Ω_i 上是拓扑传递的；

2° 点 $x_1,x_2\in\Omega(f)$ 同时属于某个 Ω_i 的充要条件为存在点 p,q 使得

$$W^s(\mathrm{Orb}_f(x_1))\pitchfork_p W^u(\mathrm{Orb}_f(x_2)),\ W^u(\mathrm{Orb}_f(x_1))\pitchfork_q W^s(\mathrm{Orb}_f(x_2));$$

3° 对任意 $x\in\Omega_i$ 有

$$\overline{W^s(\mathrm{Orb}_f(x))}\supset\Omega_i,\quad \overline{W^u(\mathrm{Orb}_f(x))}\supset\Omega_i.$$

定义 20 上述定理中的集合 Ω_i 称为 f 的基本集.

命题 8 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 满足公理 A，则

$$M=\bigcup_{x\in\Omega(f)}W^s(x,f)=\bigcup_{x\in\Omega(f)}W^u(x,f).$$

定理 22(罗宾(Robbin)) 设 $f\in \mathrm{Diff}^2(M)$ 满足公理 A，且对任意 $x,y\in\Omega(f)$，$W^s(x,f)\pitchfork W^u(y,f)$，则 f 在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中是结构稳定的.

定理 23(帕利斯-斯梅尔) 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$，$\Omega(f)$ 是有限双曲集，且对任意 $x,y\in\Omega(f)$ 有 $W^s(x,f)\pitchfork W^u(x,f)$，则 f 在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中是结构稳定的.

3.5.2 Ω 稳定性

定义 21 设 M 为紧致光滑黎曼流形，$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$ 满足公理 A，$\Omega=\Omega(f)$ 分解为基本集 $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$，在各 Ω_i 之间定义一种关系"$\succ$"：

$$\Omega_i\succ\Omega_j\Leftrightarrow(W^u(\Omega_i)\setminus\Omega_i)\cap(W^s(\Omega_j)\setminus\Omega_j)\neq\varnothing.$$

若存在两两不同的 $i_1,\cdots,i_t(t\geqslant 1)$，使得

$$\Omega_{i_1}\succ\cdots\succ\Omega_{i_t}\succ\Omega_{i_1}$$

则称基本集 $\Omega_{i_1},\cdots,\Omega_{i_t}$ 形成一个环，若在 $\Omega=\Omega(f)$ 的基本集中不存在任何环，即称 f 满足**无环条件**.

定理 24[帕利斯(Palis)] 若 $f\in \mathrm{Diff}^1(M)$ 是公理 A 的且为 Ω 稳定的，则 $\Omega(f)$

的基本集必满足无环条件.

定理 25(斯梅尔) 若 $f\in \mathrm{Diff}^1(M)$ 是公理 A 的且满足无环条件,则 f 是 Ω 稳定的

推论 3 满足公理 A 和无环条件的微分同胚组成 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的一个开集.

定义 22 设 M 为紧致微分流形,$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$,当且仅当对某个不同于 x 的双曲周期点 p,使得 $x\in W^s(p,f)\cap W^u(p,f)$ 时,称点 $x\in M$ 为 f 的同宿点.若还有 $W^s(p,f)\pitchfork_x W^u(p,f)$ 则称 x 为**横截同宿点**.

4 遍历性理论与熵

4.1 遍历性理论

4.1.1 保测变换

遍历性理论是对保持测度不变的变换所生成的动力系统长期项平均性态作数学研究.先界定一些有关概念.

设 X 为一个空间,$\mathscr{B}$ 是 X 的子集构成的 σ 代数,m 是 $\mathscr{B}$ 上的测度.

定义 1 若 $m(X)=1$,则 $(X,\mathscr{B},m)$ 称为概率空间,或正则测度空间.

定义 2 设 $(X,\mathscr{B},m)$ 为概率空间,若对任意 $B\in\mathscr{B}$ 有

$$\mathrm{T}^{-1}(B)\in\mathscr{B},\quad 且\quad m(\mathrm{T}^{-1}(B))=m(B),$$

则变换 $\mathrm{T}:X\to X$ 称为保测变换,并称测度 m 为 T 不变的.

令 $\mathrm{T}^0:=\mathrm{id}_X,\mathrm{T}^m:=\mathrm{T}^{m-1}\circ\mathrm{T}$,则 T^m 也是保测变换且满足 $\mathrm{T}^{m+n}=\mathrm{T}^m\circ\mathrm{T}^n$.称系统 $(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$(简记为 (X,T))为(离散)半动力系统.

若在 X 上给出变换簇 $\{\mathrm{T}^t|\mathrm{T}^t:X\to X,t\in\mathbf{R}_+\}$,满足:$\mathrm{T}^0=\mathrm{id}_X,\mathrm{T}^{t+s}=\mathrm{T}^t\circ\mathrm{T}^s(\forall t,s\in\mathbf{R}_+)$,$\mathrm{T}^t$ 为保测变换($\forall t\in\mathbf{R}_+$),则称系统 $(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T}^t)$ 或 (X,T^t) 为保测半流.

若 T 或 T^t 是可逆变换,且逆变换 T^{-1} 或 $(\mathrm{T}^t)^{-1}$ 也是保测变换,则称为可逆保测变换.若记 $\mathrm{T}^{-n}:=(\mathrm{T}^{-1})^n,\mathrm{T}^{-t}:=(\mathrm{T}^t)^{-1}$ 则分别得到**度量(抽象)动力系统** $(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$ 式**保测流** $(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T}^t)$.

上述变换簇 T^α 的指标集 $\mathscr{A}$ 是加法半群 $\mathscr{A}=\{\alpha\}$ 为 $\mathbf{Z}_+$ 或 $\mathbf{R}_+$,或加法群 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{R}$.实际上 $\mathscr{A}$ 还可以是更一般的半群或群,例如 $\mathscr{A}=$ 向量加群 $\mathbf{R}^n$.设(半)群 $\mathscr{A}$ 作为变换的指标簇,也要求满足:$\mathrm{T}^0=\mathrm{id}_X,\mathrm{T}^{\alpha+\beta}=\mathrm{T}^\alpha\circ\mathrm{T}^\beta(\forall\alpha,\beta\in\mathscr{A})$,以及 T^α 的保测性.此时对应的(半)流也记成 $(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T}^\alpha,\mathscr{A})$.

例 1 设 G 为一紧致拓扑群,则 G 的全体博雷尔(Borel)子集上可以定义一个有限测度 m,使对任意 $g\in G$ 和博雷尔子集 B 有 $m(gB)=m(B)$,满足此条件的测度称为哈尔(Haar)测度.

例 2 设 G 为幺模李群,Γ 为其离散子群使得 G/Γ 有由 G 的哈尔测度确定的

有限体积. 令$\{g^t | t\in \mathbf{R}\}$为$G$的一个单参数子群,则$\{g^t\}$在齐性空间$G/\Gamma$确定一保持体积的流如下:令$g^t$在$G/\Gamma$上元$g\Gamma$的作用为$g^t(g\Gamma):=(g^t\cdot g)\Gamma$. 事实上经典测地流和庞加莱圆盘上的极限环流均可按此方法产生. 另外,若$T: G\to G$为一连续自同态,满足$\mathrm{T}\Gamma=\Gamma$,则T在G/Γ上诱导的映射是一个保测变换.

例3　考虑$\mathbf{R}^n$上的常微系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x),\quad f\in C^1(X,\mathbf{R}^n).$$

$X\subset\mathbf{R}^n$为开集,对任意$x\in X$,解$\varphi^t(x)$的存在区间均为$(-\infty,+\infty)$,则φ^t是X上的流. 如果由下式定义的测度

$$m(B):=\int_B\rho(x)\mathrm{d}x,\forall B\subset X$$

关于流φ^t是不变的,则X上的非负实值函数ρ称为上述常微系统的积分不变量. 由刘维尔(Liouville)定理知,当$\rho\in C^1$时,ρ是此系统的积分不变量,当且仅当在X上恒有$\mathrm{div}(\rho f)=0$,即ρ是常微系统的一个积分因子. 因此,对每一可积常微系统,流φ^t是保持上述测度m的保测流. 特别,经典力学中的由哈密顿(Hamilton)系统所产生的流保持勒贝格(Lebesgue)测度.

定义3　若m定义在X的全体博雷尔子集(即其最小σ代数包含X的所有闭集)上,则称X上的一个测度m为博雷尔测度.

定理1(克雷洛夫-波哥留波夫(Krylov-Bogolioubov))　设X为一紧致度量空间,$\mathrm{T}\in\mathrm{Homeo}(X)$,则存在一个T不变的博雷尔概率测度.

定义4　若存在唯一的T不变概率测度,则$\mathrm{T}: X\to X$称为唯一遍历的.

定理2(庞加莱回归定理)　设$(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$为一度量动力系统,设$A\in\mathscr{B}$, $m(A)>0$,则集合

$$B:=\{x\in A\mid T^n(x)\in A,n\in\mathbf{N}\}$$

的测度为零.

4.1.2　遍历定理

定义5　设$(X,\mathscr{B},m)$为概率空间,若对任意$B\in\mathscr{B}$,当$\mathscr{T}^{-1}B=B$时,必有$m(B)=0$或$m(B)=1$,则保测变换T:X→X称为遍历的.

定义6　若对任意$B\in\mathscr{B}$,条件$\varphi^{-a}(B)\subset B$,对一切$a\in\mathscr{A}$蕴含$m(B)=0$或$m(B)=1$,则度量动力系统$(X,\mathscr{B},m,\varphi^a,\mathscr{A})$称为遍历的.

定理3(伯克霍夫逐点遍历性定理)　设$(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$为一度量动力系统,则

1° 对任意$f\in\int^1(X,\mathscr{B},m)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\mathrm{T}^k(x))=f^*(x)\quad \text{a.e};$$

2° $f^*\in\mathscr{L}^1(X,\mathscr{B},m)$;

3° $\int_A f^*\mathrm{d}m=\int_A f\mathrm{d}m,\forall A\in\mathscr{B},\mathrm{T}^{-1}A=A$;

4° $f^* \circ T = f^*$ a.e..

定理 4(冯·诺伊曼(Von-Neumann)统计遍历性定理) 设$(X,\mathscr{B},m,T)$为一度量动力系统,则

1° 对任意$f\in\mathscr{L}^p(X,\mathscr{B},m)$,$(p\geqslant 1)$,序列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k)\right\}$按$\mathscr{L}^p$-范数收敛于$f^*$;

2° $f^*\in\mathscr{L}^p(X,\mathscr{B},m)$,且$f^*\circ T=f^*$,a.e..

对于度量流上述二定理有如下版本.

定理 5 设$(X,\mathscr{B},m,T^t)$为度量流,则

1° 对任意$f\in\mathscr{L}^1(X,\mathscr{B},m)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\circ T^s(x)\mathrm{d}s=f^*(x),\text{a.e.};$$

2° $f^*\in\mathscr{L}^1(X,\mathscr{B},m)$;

3° $\int_A f^*\mathrm{d}m=\int_A f\mathrm{d}m,\forall A\in\mathscr{B},T^{-t}A=A$;

4° $f^*\circ T^t=f^*$,a.e..

若$f\in\mathscr{L}^p(X,\mathscr{B},m)(p\geqslant 1)$,则按$\mathscr{L}^p$-范数收敛也成立.

4.2 李雅普诺夫指数

定义 7 设映射

$$A:\mathbf{Z}_+\times X\to L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m),(n,x)\mapsto A(n,x):=A^n(x):=A_x^n$$

满足

$$A^{n+k}(x)=A^n(\mathbf{T}^k(x))\circ A^k(x),\forall n,k\in\mathbf{Z}_+,$$

则称$\{A^n(x)\}$为X上关于$\mathbf{T}$的上闭链.

定义 8 设(X,T)为离散半动力系统,$\{A^n(x)\}$是X上关于$\mathbf{T}$的上闭链,$u\in\mathbf{R}^m$,若极限

$$\chi_+(x,u):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\|A^n(x)u\|$$

存在,则称$\chi_+(x,u)$(简记为$\chi(x,u)$)为在点x处向量u关于$(\mathbf{T},A^n)$的李雅普诺夫(Lyapunov)指数.

若(X,T)是离散动力系统,而上闭链$\{A^n(x)\}\subset GL(m,\mathbf{R})$,其中$n\in\mathbf{Z}$,则称极限

$$\chi_-(x,u):=\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\ln\|A^n(x)u\|$$

为点x处向量u的负向**李雅普诺夫指数**.

定义 9 若对任意$u\in\mathbf{R}^m$,$\chi_+(x,u)$都存在,则称x为关于$\{A^n(x)\}$的正向正则点,简称正则点.若对任意$u\in\mathbf{R}^m$,$\chi_-(x,u)$都存在,则称x为负向正则点.

命题 1 设(X,T)为离散半动力系统,$\{A^n(x)\}$是X上关于$\mathbf{T}$的上闭链,则

1° $\chi(x, cu) = \chi(x, u) \quad \forall c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

2° $\chi(x, c_1 u_1 + c_2 u_2) \leqslant \max\{\chi(x, u_1), \chi(x, u_2)\}$;

3° (T, A^n)至多有 m 个不同的李雅普诺夫指数.

设(T, A^n)在正则点 x 处有 $s(x)$个不同的李雅普诺夫指数

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{s(x)}(x),$$

则由命题1可知存在 $\mathbf{R}^m$ 的一个分解

$$\{0\} = L_0(x) \subset L_1(x) \subset \cdots \subset L_{s(x)}(x) = \mathbf{R}^m,$$

使得当 $u \in L_i(x) \setminus L_{i-1}(x)$时,$\chi(x, u) = \chi_i(x)$.

定义 10 设 x 为正则点,称

$$k_i(x) := \dim L_i(x) - \dim L_{i-1}(x)$$

为第 i 个李雅普诺夫指数的重数,称数组$\{(\chi_i(x), k_i(x))\}$为(T, A^n)在点 x 的谱,而称

$$L_0(x) \subset L_1(x) \subset \cdots \subset L_{s(x)}(x) = \mathbf{R}^m$$

为 $\mathbf{R}^m$ 相应于谱的滤子.

例 4 设 M 为 m 维光滑紧致黎曼流形,$f: M \to M$ 是微分同胚,$\Lambda \subset M$ 为f 的双曲不变闭子集.由双曲性,对任意 $x \in \Lambda$,存在 $\mathrm{T}f$-不变的直和分解 $\mathrm{T}_x M = E_x^+ \oplus E_x^-$,且存在常数 $c_1, c_2 > 0, 0 < \lambda < 1$,使得对任意 $n \in \mathbf{Z}_+$,有

$$\| \mathrm{T}_x f^n(u) \| \leqslant c_2 \lambda^n \| u \|, \quad \forall u \in E_x^+,$$

$$\| \mathrm{T}_x f^{-n}(u) \| \leqslant c_1 \lambda^n \| u \|, \quad \forall u \in E_x^+.$$

此时若 x 为正则点,则当 $u \in E_x^+$ 时,$X_+(x, u) < 0$;当 $u \in E_x^-$ 时,$\chi_+(x, u) > 0$.

命题 2 设(X, T)为离散半动力系统,$\{A^n(x)\}$是上闭链,则

1° 设 D 是(X, T)关于$\{A^n(x)\}$的正则点集,则有 $\mathrm{T}^{-1} D \subset D$,且当$\{A^n(x)\} \subset GL(m, \mathbf{R})$时,$D = \mathrm{T}D$;

2° $\chi_+(\mathrm{T}(x), A^1(x)u) = \chi_+(x, u), \forall x \in D, \forall u \in \mathbf{R}^m$;

3° 若$x \in \mathrm{T}^{-1}(D)$且存在 i, j,使得 $\chi_i(x) = \chi_j(\mathrm{T}(x))$,则有 $A^1(x)(L_i(x)) \subset L_j(\mathrm{T}(x))$;

4° $s(x) \leqslant s(T(x)), \forall x \in \mathrm{T}^{-1}(D)$.

对于保测半流或保测流(X, T^t),将上述定义 8 ~ 定义 11,命题 1 ~ 命题 2 中的 $\mathbf{Z}_+, \mathbf{Z}, n, k, \mathrm{T}$ 分别换成 $\mathbf{R}_+, \mathbf{R}, t, s, \mathrm{T}^t$,即可得相应的定义和结论.

4.3 熵

4.3.1 度量熵

定义 11 设$(X, \mathscr{B}, m)$为概率空间,若 X 是诸 A_i 的无交并,则称子集簇 $\xi := \{A_i \in \mathscr{B} \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$为$(X, \mathscr{B}, m)$的一个有限分解.

设 $\mathrm{T}: X \to X$ 为保测变换,则子集簇 $\mathrm{T}^{-1}\xi := \{\mathrm{T}^{-1} A_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$也是$(X, \mathscr{B}', m)$的一个有限分解.

定义 12　设 $\xi=\{A_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$，$\eta=\{B_i \mid i=1,2,\cdots,k\}$为概率空间$(X,\mathscr{B},m)$的两个有限分解，若对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在子集 $J_i\subset\{1,2,\cdots,k\}$，使得

$$A_i=\bigcup_{j\in J_i}B_j(\text{mod } m\ \text{零测集}),$$

则称 η 精于 ξ，记为 $\xi<\eta$. 若记

$$\xi\vee\eta:=\{A_i\cap B_j \mid i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,k\},$$

则 $\xi\vee\eta$ 也是$(X,\mathscr{B},m)$的一个有限分解，且

$$\xi<\xi\vee\eta,\ \eta<\xi\vee\eta.$$

定义 13　设 $\xi=\{A_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$为$(X,\mathscr{B},m)$的一个有限分解，且约定 $0\cdot\ln 0=0$，则量

$$H(\xi):=-\sum_{i=1}^{n}m(A_i)\ln m(A_i)$$

称为 ξ 的熵.

定理 6　设 ξ,η 是$(X,\mathscr{B},m)$的有限分解，则

1° $H(\mathrm{T}^{-1}\xi)=H(\xi)$；

2° $\xi<\eta\Rightarrow H(\xi)\leqslant H(\eta)$；

3° $H(\xi\vee\eta)\leqslant H(\xi)+H(\eta)$.

定理 7　对$(X,\mathscr{B},m)$的任意有限分解 ξ，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}^{-i}\xi\Big):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi\vee\mathrm{T}^{-1}\xi\vee\cdots\vee\mathrm{T}^{-n+1}\xi)$$

存在.

定义 14　设 ξ 为$(X,\mathscr{B},m)$的一个有限分解，$\mathrm{T}:X\to X$ 为保测变换，称极限

$$h_m(\mathrm{T},\xi):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}^{-i}\xi\Big)$$

为 T 关于 ξ 的熵，而称

$$h_m(\mathrm{T}):=\sup_{\xi}\{h_m(\mathrm{T},\xi)\}$$

为系统$(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$的度量熵(或称测度论熵)，其中上确界遍取$(X,\mathscr{B},m)$的一切有限分解.

定理 8　设 ξ,η 是$(X,\mathscr{B},m)$的两个有限分解，$\mathrm{T}:X\to X$ 为保测变换，则

1° $h_m(\mathrm{T},\xi)\leqslant H(\xi)$；

2° $\xi<\eta\Rightarrow h_m(\mathrm{T},\xi)\leqslant h_m(\mathrm{T},\eta)$；

3° $h_m(\mathrm{T},\xi\vee\eta)\leqslant h_m(\mathrm{T},\xi)+h_m(\mathrm{T},\eta)$.

定理 9　设$(X,\mathscr{B},m,\mathrm{T})$是离散(半)动力系统，则

1° $h_m(\mathrm{T}^k)=kh_m(\mathrm{T})$，$\forall k\in\mathbf{N}$；

2° 若 T 为可逆变换，则

$$h_m(\mathrm{T}^k)=|k|\cdot h_m(\mathrm{T}),\quad \forall k\in\mathbf{Z}.$$

特别有 $h_m(\mathrm{T}^{-1})=h_m(\mathrm{T})$.

设$(X_i,\mathscr{B}_i,m_i)$为概率空间，$\mathrm{T}_i:X_i\to X_i$ 为保测变换($i=1,2$).

记集合 A,B 的对称差为 $A\triangle B:=(A\setminus A\cap B)\cup(B\setminus A\cap B)$.

在 $\mathscr{B}_i$ 中引进等价关系"～"如下：

$$A_i, B_i \in \mathscr{B}_i, \text{则 } A_i \sim B_i \Leftrightarrow m_i(A_i \triangle B_i) = 0.$$

用 $\widetilde{A}_i$ 表 A_i 所属的等价类，并令 $\widetilde{\mathscr{B}}_i := \mathscr{B}_i/\sim$. 因 $A_i \sim B_i \Leftrightarrow \mathrm{T}_i^{-1}A_i \sim \mathrm{T}_i^{-1}B_i$，故

$$\widetilde{T}_i^{-1}: \widetilde{\mathscr{B}}_i \to \widetilde{\mathscr{B}}_i, \quad \widetilde{\mathscr{A}}_i \longmapsto \widetilde{(\mathrm{T}_i^{-1}A_i)}$$

有定义，且是保测的，此处定义 $\widetilde{m}_i(\widetilde{A}_i) := m_i(A_i)$.

定义 15　若存在映射 $\varphi: (\widetilde{\mathscr{B}}_2, \widetilde{m}_2) \to (\widetilde{\mathscr{B}}_1, \widetilde{m}_1)$ 满足下列条件：

1° φ 是单满射；

2° φ 与集合的求补及可数并运算可交换；

3° $\widetilde{m}_1(\varphi(\widetilde{B}_2)) = \widetilde{m}_2(\widetilde{B}_2), \forall \widetilde{B}_2 \in \widetilde{\mathscr{B}}_2$；

4° $\varphi \circ \widetilde{\mathrm{T}_2^{-1}} = \widetilde{\mathrm{T}_1^{-1}} \circ \varphi$，

则称系统 $(X_1, \mathscr{B}_1, m_1, \mathrm{T}_1)$ 和 $(X_2, \mathscr{B}_2, m_2, \mathrm{T}_2)$ 为（度量）共轭.

定理 10　度量熵是共轭不变量，即若系统 $(X_1, \mathscr{B}_1, m_1, \mathrm{T}_1)$ 与 $(X_2, \mathscr{B}_2, m_2, \mathrm{T}_2)$ 共轭，则 $h_{m_1}(\mathrm{T}_1) = h_{m_2}(\mathrm{T}_2)$.

设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个有限子代数，则

$$\xi(\mathscr{A}) := \{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \mid B_i = A_i \text{ 或 } X \setminus A_i\}$$

构成 $(X, \mathscr{B}, m)$ 的一个有限分解. 记

$$\mathrm{T}^k\mathscr{A} = \{\mathrm{T}^kA_1, \mathrm{T}^kA_2, \cdots, \mathrm{T}^kA_n\},$$

$$(\mathrm{T}^k\mathscr{A}) \vee (\mathrm{T}^s\mathscr{A}) = \{(\mathrm{T}^kA_i) \cap (\mathrm{T}^sA_j) \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

定理 11（科尔莫戈罗夫-西奈（Kolmogorov-Sinai））　设 $(X, \mathscr{B}, m, \mathrm{T})$ 为度量动力系统，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的有限子代数，若在不计 m 零测集的意义 $\mathrm{T} \bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}^n\mathscr{A} = \mathscr{B}$，则

$$h_m(\mathrm{T}) = h_m(\mathrm{T}, \xi(\mathscr{A})).$$

上述定理提供了计算度量熵的方法.

4.3.2　拓扑熵

设 (X, d) 为紧致度量空间，$f \in C^0(X, X)$，$\alpha = \{A_i\}$，$\beta = \{B_j\}$ 为 X 的两个开覆盖，令

$$\alpha \vee \beta := \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \alpha, B_j \in \beta\}.$$

它是 X 的一个新的开覆盖，称为 α 与 β 的公共加细.

定义 16　若覆盖 β 的每一成员是覆盖 α 的某一成员的子集，则称 β 比 α 精，记为 $\alpha < \beta$.

定义 17　给定开覆盖 α，可以找到具有最小基数的子覆盖（任何一个这样的子覆盖都称为极小的），α 的极小子覆盖的基数记为 $N(\alpha)$（由 X 的紧性，$N(\alpha)$ 是有限的），并令

$$H(\alpha) := \ln N(\alpha)$$

称为覆盖 α 的熵.

对 $\alpha=\{A^i\}$,记 $f^{-1}(\alpha):=\{f^{-1}(A_i)\mid A_i\in\alpha\}$.

定理 12 设 α,β 为 X 的两个开覆盖,则

1° 若 $\alpha<\beta$,则 $N(\alpha)\leqslant N(\beta)$;

2° 若 $\alpha<\beta$,则 $N(\alpha\vee\beta)=N(\beta)$;

3° $N(\alpha\vee\beta)\leqslant N(\alpha)\cdot N(\beta)$, $H(\alpha\vee\beta)\leqslant H(\alpha)+H(\beta)$;

4° 若 $\alpha<\beta$,则 $f^{-1}(\alpha)<f^{-1}(\beta)$;

5° $f^{-1}(\alpha\vee\beta)=f^{-1}(\alpha)\vee f^{-1}(\beta)$;

6° $N(\alpha)\geqslant N(f^{-1}(\alpha))$,若 f 为满映射,则等号成立.

定理 13 对 X 的开覆盖 α 及 $f\in C^0(X,X)$,如下极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\alpha)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-n+1}(\alpha))$$

存在并有限.

定义 18 设 α 为 X 的开覆盖,称极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\alpha)\right)$$

为 f 关于 α 的熵,而称

$$h(f):=\sup_{\alpha}\{h(f,\alpha)\}$$

为 f 的拓扑熵,其中上确界取遍 X 的一切开覆盖.

熵 $h(f)$是动力系统(X,f)的一个数值参数,它指示 X 的点在 f 作用下混合的快速程度.

令$(\alpha_n)_{n\in N}$为 X 的一个开覆盖序列,且满足如下二个条件:

1° $\alpha_n<\alpha_{n+1}$;

2° 对 X 的任一开覆盖 β,存在 α_n,使得 $\beta<\alpha_n$,

则据拓扑熵的定义有 $h(f)=\lim\limits_{n\to\infty}h(f,\alpha_n)$.

对 X 的任一开覆盖 $\alpha=\{A_i\}$,令

$$d(\alpha):=\sup_i\{\mathrm{diam}\ A_i\},$$

并令 $L(\alpha)$表覆盖 α 的勒贝格数,则易知,设 α,β 为 X 的两个开覆盖,若 $d(\beta)<L(\alpha)$,则 $\alpha<\beta$,因而有

命题 3 设$(\alpha_n)_{n\in N}$为 X 的一个开覆盖序列,并且 $d(\alpha_n)\to 0$,则 $h(f)=\lim\limits_{n\to\infty}h(f,\alpha_n)$.

定理 14 拓扑熵是拓扑共轭的一个不变量,亦即若动力系统(X,f)与(Y,g)是拓扑共轭的,则 $h(f)=h(g)$.

定理 15 设(X,f)为一动力系统,则

$$h(f^k)=k\cdot h(f),\qquad \forall k\in\mathbf{Z}_+,$$

并且,若 f 是同胚,则

$$h(f^k)=|k|\cdot h(f),\qquad \forall k\in\mathbf{Z}.$$

推论 1 设 X 为紧致度量空间,$f,g\in C^0(X,X)$是 Ω-共轭的,则 $h(f)=h(g)$.

4.3.3 两类熵之间的关系

定理 16(古德温(Goodwyn)) 设 X 为紧致拓扑空间,$f\in C^0(M,M)$,m 是 X 上 f-不变的正则波莱尔概率测度,则 $h_m(f)\leqslant h(f)$.

定理 17(古德温) 设 X 为紧致拓扑空间,$f\in C^0(X,X)$,则 $h(f)=\sup\limits_m\{h_m(f)\}$,其中上确界取遍 X 上所有 f-不变概率测度.

动力系统(X,f)的非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$是紧致的 f-不变集,从而可以考虑动力系统$(\Omega,f|_\Omega)$.

定理 18 动力系统(X,f)的拓扑熵在 Ω 上达到,亦即 $h(f)=h(f|_\Omega)$.

定理 19(鲍恩(Bowen)) 设 X 为紧致微分流形,$f\in \mathrm{Diff}^2(X)$,且满足公理 A,令 $N_n(f):=\#\mathrm{Fix}(f^n)$,则

$$h(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_n(f).$$

5 混沌动力学

5.1 基本概念

5.1.1 混沌的定义

混沌动力学是动力系统理论中一个快速发展的领域,它的边界并未清楚界定,甚至关于"混沌"一词至今也没有一个公认的定义.这里只能对若干概念和结果作一极初步的介绍.为了简单起见,主要以离散(半)动力系统(X,f)为模型进行.X 是一度量空间或 C^r 流形$(r\geqslant 1)$,$f\in \mathrm{Homeo}(X)$(或 $f\in C^0(X,X)$)或 $f\in \mathrm{Diff}^r(X)$(或 $f\in C^r(X,X)$).它们分别构成离散动力(半动力)系统.因 C^r 流形也有度量,所以有的概念就对度量空间(X,d)来叙述,d 表 X 上的度量.

定义 1 设(X,f)为(半)动力系统.$\Lambda\subset X$ 为 f 不变紧集.若存在 $\epsilon>0$,使得对任意 $x\in\Lambda$ 和 x 的任一邻域 $\mathcal{N}(x)$,存在 $x'\in\mathcal{N}(x)$以及 $n\in\mathbf{N}$,使得 $\mathrm{d}(f^n(x'),f^n(x))>\epsilon$,则称(半)动力系统的轨道敏感依赖于不变集 Λ.

f 的周期点以及 f 在一个集合上是拓扑传递的概念前面已经定义过.下面是一个得到广泛承认的 Devaney 的混沌定义

定义 2 设(X,f)为(半)动力系统,$\Lambda\subset X$ 为 f-不变紧集.若满足如下条件:

1° 系统的轨道敏感依赖于 Λ,也称为 f 敏感依赖于初值 $x\in\Lambda$;

2° f 在 Λ 上是拓扑传递的;

3° f 的周期点稠密于 Λ,

则此动力系统称为在 Λ 上是混沌的.

定义 3 设(X,f)为(半)动力系统,若存在 $v>0$,使得对任意 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $d(f^n(x_1),f^n(x_2))>v$,则称 f 在 X 上是扩展的.

定义 4 设(X,f)为(半)动力系统,若存在 $m\in\mathbf{Z}$,(包括可能 $m=0$),使得 $f^m(x)\in\mathrm{Per}(f)$,则点 $x\in X$ 称为最终以 n 为周期(或称 n 为终于周期点),f 的终于周期点的集合记为 $E\mathrm{Per}(f)$. 而 $\mathrm{Orb}_f(x)$称为终于周期轨道.显然有

$$\mathrm{Per}(f)\subset E\mathrm{Per}(f)=\bigcup_{m=0}^{\infty}f^{-m}(\mathrm{Per}(f)).$$

定义 5 设 M 为光滑黎曼流形,$f\in C^r(M,M)$ $p\in M$ 为 f 的双曲周期点,若 $T_p(f^n):T_pM\to T_pM$ 对应的分解 $T_pM=E^s\oplus E^u$ 中,$E^u=0$,则称 p 为吸引周期点;若 $E^s=0$,则称 p 为排斥周期点.

5.1.2 施瓦兹导数

设 $I,J\subset\mathbf{R}$ 均为区间,$f:I\to J$,点 $x\in I$ 处 f 的**施瓦兹(Schwarz)导数** $Sf(x)$定义为

$$Sf(x):=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

且在 f 的临界点处,值 ∞ 是容许的.

命题 1 设 $P(x)$为多项式,若 $P'(x)$具相异实根,则 $S(P)<0$.

命题 2 设 $Sf<0,Sg<0$,则 $S(f\circ g)<0$.

由此命题知,若 $Sf<0$,则对任意 $n\in\mathbf{N}$,有 $S(f^n)<0$,因而性质 $Sf<0$,对由 f 决定的半动力系统(设上述 $I=J\subset\mathbf{R}$)具有惊人的含义.

定理 1 设 $Sf<0$($Sf(x)=-\infty$是容许的),设 f 有 n 个临界点,则半动力系统(R,f)至多有 $n+2$ 个吸引周期点.

实际上,施瓦兹导数原来是对复解析函数定义的,它在复分析中有重要作用.

5.1.3 符号动力学

对于很多(半)动力系统的复杂的动力学情态符号模型是它的粗粒化模型,它以尽可能简单的方法刻划了原系统的动力学情态,所以符号动力学是一个很有用的工具.

定义 6 集合 $S(N):=\{0,1,\cdots,N-1\}$,赋以离散拓扑.此拓扑空间可度量比:对任意 $a,b\in S(N)$,定义距离为

$$\delta(a,b)=\begin{cases}0, & 若\ a=b;\\ 1, & 若\ a\neq b.\end{cases}$$

可列个这样的 $S(N)$乘积

$$\Sigma(N)=\prod_{j=-\infty}^{\infty}S_j,\quad S_j=S(N)$$

或

$$\Sigma^+(N)=\prod_{j=0}^{\infty}S_j,\quad S_j=S(N)$$

称为符号空间，其元素分别为双边符号序列

$$(\cdots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \cdots)$$

或单边符号序列

$$(S_0, S_1, S_2, \cdots).$$

$\Sigma(N)$，$\Sigma^+(N)$分别称为双边符号空间与单边符号空间. 此二积空间可度量化如下：

$$\mathrm{d}(s,t):=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\delta(s_j,t_j)}{2^{|j|}},\quad s,t\in\Sigma(N);$$

及

$$\mathrm{d}(s,t):=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\delta(s_j,t_j)}{2^{j}},\quad s,t\in\Sigma^+(N).$$

$S(N)$称为 $\Sigma(N)$与 $\Sigma^+(N)$的状态空间.

定义 7　(左)移位映射 $\sigma:\Sigma(N)\to\Sigma(N)$(或 $\sigma:\Sigma^+(N)\to\Sigma^+(N)$)定义为，对 $s\in\Sigma(N)$(或 $s\in\Sigma^+(N)$)，$(\sigma(S))_j=S_{j+1}$. 则$(\Sigma(N),\sigma)$为一动力系统，$(\Sigma^+(N),\sigma)$为一半动力系统. σ 称为伯努利(Bernoulli)拓扑移位.

命题 3　$\Sigma(N)$和 $\Sigma^+(N)$为紧致豪斯多夫(Hausdorff)空间，它们也是度量空间$(\Sigma(N),d)$或$(\Sigma^+(N),d)$.

命题 4　符号空间 $\Sigma(N)$($\Sigma^+(N)$)是紧致的，完全的，完全不连通的，从而它们同胚于康托尔(Cantor)集.

命题 5　动力系统$(\Sigma(N),\sigma)$(半动力系统$(\Sigma^+(N),\sigma)$)具有性质：

1° σ 的周期点在$\Sigma(N)$($\Sigma^+(N)$)中稠密；

2° σ 有一条轨道在$\Sigma(N)$($\Sigma^+(N)$)中稠密；

3° σ 在$\Sigma(N)$($\Sigma^+(N)$)中是拓扑传递的.

定义 8　设 X 为拓扑空间，$f:X\to X$ 为同胚或连续映射，$\Lambda\subset X$ 是f一不变集，若存在同胚 $h:\Sigma_N\to\Lambda$(这里 Σ_N 按情况取为前述$\Sigma(N)$或 $\Sigma^+(N)$)，使得 $f\circ h=h\circ\sigma$，即有以下交换图(图 5-1)，则称 Λ 为系统f的移位不变集.

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_N & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \Sigma_N\\ h\downarrow & & \downarrow h\\ \Lambda & \xrightarrow{\ f\ } & \Lambda\end{array}$$

图 5-1

下面构造一个半动力系统具有移位不变集，它可以认为体现了斯梅尔“马蹄”模型的基本点.

设映射

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto -3x^2+\frac{4}{3},$$

它将区间 $J=[-1,1]$拉长(拉长倍数>2)，然后折叠覆盖于 J 之上，首先$f^{-1}(J)=U_0\cup U_1$ 表示线段 U_0,U_1 的无交并. 它们的长度均小于 J 的长度的一半

$$|U_0|,|U_1|<\frac{1}{2}|J|=1.$$

且 $f(U_0)=f(U_1)=J\supset U_0\cup U_1$. 在 U_0,U_1 中又各含互不相交的子线段 U_{00},U_{01} 和 U_{10},U_{11},使得

$$f(U_{00})=U_0,\quad f(U_{01})=U_1,\quad f(U_{10})=U_0,\quad f(U_{11})=U_1,$$

并且

$$|U_{ij}|<\frac{1}{2}|U_j|<\frac{1}{2}\qquad(i,j=0,1).$$

一般,对任意 $k\in\mathbf{Z}_+$ 定义

$$U_{s_0s_1\cdots s_k}:=U_{s_0}\cap f^{-1}(U_{s_1})\cap\cdots\cap f^{-k}(U_{s_k}),$$

其中 $s_0,s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}=S(2)$.

引理 1 $U_{s_0s_1\cdots s_k}(k\geqslant 1)$满足

1° $f(U_{s_0s_1\cdots s_k})=U_{s_1\cdots s_k}$;

2° $|U_{s_0s_1\cdots s_k}|<\dfrac{1}{2^k}$.

对于 $s=(s_0,s_1,\cdots)\in\Sigma_2$,令

$$U(s):=\bigcap_{j=0}^{\infty}f^{-j}(U_j)=\bigcap_{j=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k}.$$

引理 2 上述 $U(s)$满足

1° $f(U(s))=U(\sigma(s))$;

2° $\# U(s)=1$,即 $U(s)$是单点集.

再记

$$\Lambda:=\bigcap_{j=0}^{\infty}f^{-j}(J)=\bigcup_{s\in\Sigma_2}U(s),$$

则 Λ 是 f 的一个紧致不变集,并且 $f|_\Lambda$ 拓扑共轭于 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$.

定理 2 映射 f 在不变集 Λ 上是结构稳定的.

5.2 一维动力系统

5.2.1 直线自映射

设 $f:I\to\mathbf{R}$ 为连续映射,$I\subset\mathbf{R}$ 为区间(容许 $I=\mathbf{R}$ 的情形).

将全体自然数排成如下序列:

$3,5,7,\cdots,2m+1,\cdots$;

$3\times2,5\times2,7\times2,\cdots,(2m+1)\times2,\cdots$;

$3\times2^2,5\times2^2,7\times2^2,\cdots,(2m+1)\times2^2,\cdots$;

…

$\cdots,2^3,2^2,2,1$.

并用符号 $\lhd$ 表上述序列中从前到后的序关系,例如 $7\lhd3\times2\lhd5\times2^2\lhd2^3$ 等等.

定义 9 $\mathbf{N}$ 按上述方式排成的顺序称为沙科夫斯基(Sarkovskii)序.

定理 3(沙科夫斯基) 设 $f:I\to\mathbf{R}$ 连续,若 $m\in\mathrm{T}(f)$,且 $m\lhd n$,则 $n\in\mathrm{T}(f)$.

由于“3”排在沙科夫斯基序之首，所以，若 $3\in T(f)$，则一切自然数 $n\in T(f)$，即若 f 有 3 周期点，则有一切周期的周期点.

定理 4(李天岩-Yorke) 令 $I\subset \mathbf{R}$ 为一区间，$f: I\to I$ 为连续自映射. 若存在点 $x_0\in I$，它的最初三次迭代给出 $x_1:=f(x_0)$，$x_2=f(f(x_0))$、$x_3=f(f(f(x_0)))$，而这些点满足

$$x_3\leqslant x_0<x_1<x_2 \quad 或 \quad x_3\geqslant x_0>x_1>x_2$$

(易知，若 f 存在一条周期 3 轨道，则上述二串不等式必有一串成立)，则

1° 对任意 $k\in \mathbf{N}$，I 中总存在一条周期 k 轨道；

2° I 中存在一个不可数集合 $S\subset I$，它不包含周期点，而且满足以下条件：

对 S 中 $p\neq q$ 的任意二点，

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(p)-f^n(q)|>0,$$

$$\liminf_{n\to\infty}|f^n(p)-f^n(q)|=0,$$

对 S 中每个 q 点和 $I\setminus S$ 中周期点 p，有

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(p)-f^n(q)|>0.$$

定理 4 结论 1°是定理 3 的特例，但定理 4 结论 2°被认为刻划了李-Yorke 意义下的混沌.

一维映射的一个模型是二次映射 $F_\mu:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$F_\mu(x):=\mu x(1-x)$. 这是混沌动力学的一个基本模型，以下仅列举几个简单性质. 存在子集 $\Lambda\subset I=[0,1]$，它是 F_μ 的不变子集.

定理 5 对 $\mu>4$，Λ 是康托尔(Cantor)集.

定理 6 设 $F_\mu(x)=\mu x(1-x)$，其中 $\mu>2+\sqrt{2}$，则

1° $\#\mathrm{Per}_n(F_\mu)=2^n$，其中 $\mathrm{Per}_n(F_\mu)$表示 F_μ 的 n 周期点集；

2° F_μ 在 Λ 中有一稠密轨道.

命题 6 当 $\mu>2+\sqrt{5}$时，二次映射 F_μ 在 Λ 上是混沌的.

命题 7 当 $\mu>4$ 时，二次映射 F_μ 在区间 $I=[0,1]$上是混沌的.

定理 7 当 $\mu>2+\sqrt{5}$，二次映射 F_μ 是 C^2 结构稳定的.

命题 8 对 $F_\mu(x)=\mu n(1-x)$，$F_\mu:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，则

1° F_μ 有不动点 0；$p_\mu=\dfrac{\mu-1}{\mu}$；

2° 若 $\mu>1$，则 $0<p_\mu<1$；

3° 若 $\mu>1$，则 $x<0$ 或 $x>1$ 有 $F_\mu^n(x)\to-\infty$ ($n\to\infty$时).

由上知 F_μ 的有趣的动力情态出现在区间 $I=[0,1]$中.

命题 9 设$1<\mu<3$，则

1° F_μ 有吸引不动点 p_μ，排斥不动点 0；

2° $F_\mu(0)=F_\mu(1)=0$，且当 $0<x<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}F_\mu^n(x)=p_\mu.$$

因此当 $\mu<3$ 时，F_μ 的动力学是完全清楚的，并且不太复杂. 由上述命题 6 与

命题 7 知，当 $\mu > 2+\sqrt{5}$ 时，F_μ 在 $\Lambda \subset I$ 上混沌，而当 $\mu > 4$ 时，F_μ 在整个 I 上混沌．由于 Devany 的混沌定义要求出现无穷多个周期点，再由沙科夫斯基定理及上面定理 6 知必须首先出现所有周期为 $2^k(k\in \mathbf{Z}_+)$ 型的周期点．故当考察 F_μ 随着 μ 的增加通向混沌时，F_μ 必须出现一系列的倍周期分歧．以下结果可以用于刻划线段连续自映射 $f: I \to I$ 的周期集 $T(f)$ 何时仅含 2 的方幂，何时含有非 2 的方幂，$h(f)$ 表 f 的拓扑熵．

命题 10 对半动力系统 (I,f)，有 $h(f) = h(f|_{\overline{\mathrm{Per}(f)}})$．

定理 8 设 f 为线段连续自映射（即 (I,f) 为半动力系统），若 $2^m p \in T(f)$，$p > 1$ 为奇数，则

$$h(f) \geqslant \frac{1}{2^m}\ln \lambda_p,$$

其中 λ_p 为多项式 $x^p - 2x^{p-2} - 1$ 的最大实零点．

推论 1 若 $T(f)$ 含非 2 的方幂，则 $h(f) > 0$．

定理 9 设 f 为线段连续自映射，$T(f)$ 中的元素全为 2 的方幂，则 $h(f) = 0$．

定理 8,9 说明拓扑熵 $h(f)$ 为零与否，区分了这两类周期点的周期性质不同的映射．

5.2.2 圆周的自映射

由于连通的 1 维微分流形或者微分同胚于圆 S^1，或者微分同胚于区间 $I \subset \mathbf{R}$．讨论了区间自映射之后，来讨论 S^1 上的自映射．令

$$\pi: \mathbf{R} \to S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}$$

为 S^1 上的复叠映射，设 $f: S^1 \to S^1$，$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，若成立 $\pi \circ F = f \circ \pi$，则 F 为 f 的一个提升（映射）．由拓扑学知 f 的提升 F 是存在的，若指定了 F 在一点的值，则提升 F 还是唯一的．若 $f: S^1 \to S^1$ 为保向的自同胚，则 f 可提升为严格递增的连续函数 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，满足：

$$F(x+1) - F(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

上述条件等价于 $F - id_{\mathbf{R}}$ 是周期为 1 的连续映射．

定理 10 设 $f: S^1 \to S^1$ 为保向同胚，F 为其任一提升，$x \in \mathbf{R}$，则极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

存在，且与 x 无关，记为 $\rho(F)$，若 $F_1 = F + l$，$l \in \mathbf{Z}$，则 $\rho(F_1) = \rho(F) + l$．

定义 10 对 f 的任何提升 F，f 的旋转数 $\rho(f)$ 定义为 $\rho(F)$ 的小数部分，即 $\rho(f)$ 是 $[0,1)$ 中唯一的一个数，使得 $\rho(F) - \rho(f) \in \mathbf{Z}$．

命题 11 旋转数是保向拓扑共轭不变量，即若 $f, g, h: S^1 \to S^1$ 均为保向同胚，且 $h \circ f = g \circ h$，则

$$\rho(f) = \rho(g).$$

命题 12 设 $f: S^1 \to S^1$ 为保向微分同胚．令 $\varepsilon > 0$．存在 $\delta > 0$，使得，若 $g: S^1 \to S^1$ 是一个 C^0-δ 逼近于 f 的微分同胚，则

$$|\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon.$$

命题 13　当且仅当 $\mathrm{Per}(f)=\varnothing$(即 f 没有周期点)时，$\rho(f)$是无理数.

定义 11　设 f 为 S^1 上保持定向的微分同胚且 $\rho(f)$为有理数，而且它所有的周期点是双曲的，称 f 为 S^1 上的莫尔斯-斯梅尔微分同胚.

定理 11　S^1 上的莫尔斯-斯梅尔微分同胚是 C^1-结构稳定的.

5.3　高维动力系统

5.3.1　环面的代数自同构

在阿诺索夫系统那部分介绍过由矩阵 $A\in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$在环面 $T^2:=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上诱导的微分同胚映射——环面的代数自同构 $f_A:T^2\to T^2$.

定理 12　环面双曲自同构 f_A 的横截同宿点在 T^2 中稠密.

定理 13　设 f_A 为 T^2 上的环面双曲自同构，则

1° $\mathrm{Per}(f_A)$在 T^2 中稠密；

2° f_A 是拓扑传递的；

3° f_A 对初始值有敏感依赖性，

所以 f_A 在 T^2 上(在 Devaney 意义下)是混沌的.

定理 14　环面双曲自同构 $f_A:\mathrm{T}^2\to\mathrm{T}^2$ 是 C^1 结构稳定的.

5.3.2　吸引子，李-Yorke 定理高维版本

设 $f,g\in C^r(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)(r\geqslant 1)$，且由

向量场　　$\dot{x}=f(x),x\in\mathbf{R}^n$,

映射　　$x\mapsto g(x),x\in\mathbf{R}^n$

分别定义了 $\mathbf{R}^n$ 上的连续(半)流 $\varphi^t(n)$与离散(半)流 $g^n(x)$.

定义 12　若 Λ 是对应系统的不可分解的闭不变子集，且具有如下性质：给定 $\epsilon>0$,在 Λ 的 ϵ 邻域内存在一个有勒贝格正测度的集 U,使得对 $x\in U,\omega(x)\subset\Lambda$，并且 x 的正半轨($\mathrm{Orb}_g^+(x)$或 $\mathrm{Orb}_f^+(x)$)含于 U 中，则闭集 $\Lambda\subset\mathbf{R}^n$ 称为 g 或 φ^t 的吸引子. 一个吸引子如果是混沌的，则称为**奇怪吸引子**.

由于混沌并无公认的定义，所以关于奇怪吸引子的定义中的混沌条件，不同的作者也用别的条件代替，如 1°它包含一个**横截同宿轨道**；2°它是一个**分形**(虽然分形也没有公认的统一定义)等等.

考察连续映射 $f:X\to\mathbf{R}^n$，若 $f^k(A)=A$ 且$f^i(A)\cap f^j(A)=\varnothing,1\leqslant i<j\leqslant k$，则子集 $A\subset X$ 称为 k 周期的.

李-Yorke 定理有如下的高维版本(它是这一定理的许多高维版本之一).

定理 15(Diamond)　设 $X\subset\mathbf{R}^n,f:X\to\mathbf{R}^n$ 连续，设存在非空紧集 $K\subset X$，满足条件：

C_1　$K\cup f(K)\subset f^2(K)\subset X$；

C_2　$K\cap f(K)=\varnothing$.

则

(1)对每个 $n\in\mathbf{N}$,X 中有一个 n 周期的集合;

(2)X 中有一个不可数集合 S,它不包含任何一个周期的集合,并且满足:

1° $f(S)\subset S$;

2° 对于 S 中不同的点 p,q 有

$$\limsup_{n\to\infty}\|f^n(p)-f^n(q)\|>0;$$

3° 对于 S 中每一点 q 以及一个周期集合 $P\subset X$,P 中所有点 p 有

$$\limsup_{n\to\infty}\|f^n(p)-f^n(q)\|>0.$$

从上述定理的结论可以看出,本定理的混沌是模仿李-Yorke 意义的混沌.

介绍李-Yorke 定理的另一个高维版本.

定义 13 设 $x\mapsto f(x),x\in\mathbf{R}^n$ 决定一个 $\mathbf{R}^n$ 上的离散(半)动力系统,$x^*\in\mathbf{R}^n$ 是一个不稳定的不动点.$B_r(x^*):=\{x\in\mathbf{R}^n\mid\|x-x^*\|\leqslant r\}$,且对任意 $x\in B_r(x^*)$,雅可比 $\mathrm{D}f(x)$的所有本征值在欧几里德范数下大于 1,则点 $x^*\in\mathbf{R}^n$ 称为 $B_r(x^*)$中 f 的**扩张不动点**.

定义 14 设 x^* 是对某个 r 的 $B_r(x^*)$中 f 的一个扩张不动点.若存在点 $x_0\in B_r(x^*)$,$x_0\neq x^*$,且对某 $n\in\mathbf{N}$,$f^n(x_0)=x^*$,且 $\det\mathrm{D}f^n(x_0)\neq0$,则 x^* 称为是 f 的一个**快速恢复排斥极**.

定理 16(Marotto) 若 f 有一个快速恢复排斥极,则 f 决定的(半)动力系统是混沌的.

这里混沌的意义基本同于定理 15.

定理 16 的真正优点在于只要动力系统模型 f 是数值化的,它的条件可以用数值方法来判定.

5.3.3 KAM 定理

考虑具有 n 个自由度的哈密顿系统,哈密顿函数 $H=H(I,\varphi)$,$I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)$为作用量,$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$为角变量.

最简单的哈密顿系统为可积系统.此时,$2n$ 维相空间分层为一族 n 维不变环面,在每个环面上系统的运动是拟周期运动.此时的哈密顿函数只依赖于作用量 $H=H(I)$,运动方程为

$$\dot{I}=0,\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I),$$

它有解 $I(t)=I(0)$,$\varphi(t)=\omega t+\varphi(0)$,拟周期运动的频率由 $\omega(I)$决定.

KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)理论考虑近可积哈密顿系统的性态.

对拟周期运动的频率——亦称旋转向量 $\omega_2=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$进行分类:

(1)**满足丢番图(Diophantine)条件** 存在 $D(\omega)>0$,使对任意 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}$有

$$|\langle k,\omega\rangle|=\left|\sum_{j=1}^{n}k_j\omega_j\right|\geqslant D(\omega)\,|k|_1^{-\mu},$$

其中$|k|_1=|k_1|+\cdots+|k_n|$，$\mu>n-1$；

(2) **满足共振条件**　存在$k\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\}$，使得

$$\langle k,\omega\rangle=0;$$

(3) **刘维尔条件**　不满足以上两条件者.

命题14　在n维欧几里德空间$\mathbf{R}^n$中，几乎所有向量$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\mathbf{R}^n$均满足丢番图条件.

考察一近可积哈密顿系统，其哈密顿函数为

$$H(I,\varphi)=N_0(I)+P_0(I,\varphi),$$

$N_0(I)$满足科尔莫戈罗夫非退化条件：

$$\det\left(\frac{\partial^2 N_0}{\partial I^2}\right)\neq 0.$$

P_0充分小.当系统不含不可积扰动，即$P_0=0$时系统可积，它的解为

$$I(t)=I(0),\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\partial N_0}{\partial I}(I_0)t.$$

由于φ为角变量，相空间被分层为一簇不变环面$I=\text{const}$，在每一环面上哈密顿相流是拟周期的，频率$\omega=\dfrac{\partial N_0}{\partial I}$.当扰动$P_0$存在，$H$一般不可积，则有

定理17(经典KAM定理)　设哈密顿系统$H(I,\varphi)=N_0(I)+P_0(I,\varphi)$满足如下条件：

1° $H(I,\varphi)$在区间Σ_0上实解析：

$$\Sigma_0:|\text{Im}\varphi|\leqslant t,\quad |I-I_0|\leqslant\epsilon;$$

2° 科尔莫戈罗夫非退化性；

3° 满足丢番图条件：

$$\left|\langle\frac{\partial N_0}{\partial I}(I_0),k\rangle\right|\geqslant D|k|_1^{-\mu},\quad\forall k\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\},$$

对任意$\epsilon>0$，存在$d=d(\epsilon,D,\mu,s,t)>0$，若在$\Sigma_0$内$|P_0|<d$，则方程

$$\dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial I},\quad \dot I=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}$$

所定义的哈密顿流具有n维不变环面

$$I=I_0+\Gamma(\Phi),\varphi=\Phi+\Theta(\Phi),$$

其中Γ与Θ是在复域$|\text{Im}\Phi|\leqslant\dfrac{t}{2}$上周期为$2\pi$的实解析函数.此不变环面上的流可表为

$$\Phi=\Phi_0+\frac{\partial H}{\partial I}(I_0)t,$$

并且，这样的不变环面充分接近于原可积系统的相应不变环面，

$$|\Gamma|+|\Theta|<\epsilon.$$

参 考 文 献

1 廖山涛.微分动力系统的定性理论.北京:科学出版社,1992.

2 朱德明,韩茂安.光滑动力系统.上海:华东师范大学出版社,1993.

3 张筑生.微分动力系统原理.北京:科学出版社,1987.

4 罗定军,滕利邦.微分动力系统导引.北京:高等教育出版社,1990.

5 程崇庆,孙义燧.哈密顿系统中的有序与无序运动.上海:上海科技教育出版社,1996.

6 Smale S. The mathematics of time. New York: Springer-Verlag, 1980.

7 Arnold V I, et al. Dynamical systems. Vols. I-IX. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

8 Szlenk. An introduction to the theory of smooth dynamical systems. Warszawa: PWN, 1984.

9 Palis J, Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New York: Springer-Verlag, 1982.

10 Irwin M C. Smooth dynamical systems. London: Academic Press, 1980.

11 Nitechi Z. Differentiable dynamics. Cambridge: M. I. T. Press, 1971.

12 Devaney R L. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.

13 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983.

14 Arnold V I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. 2nd. ed. New York: Springer-Verlay, 1988.

15 Arnold V I Mathematical methods of classical mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978.

16 Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of differentiable maps, Vol. I. Boston: Birkhäuser, 1985.

17 Golubitsky M, Guillemin V. Stable mappings and their singularities. New York: Springer-Verlag, 1973.

18 Hirsch M W. Differential topology. New York: Springer-Verlag, 1976.

19 Petersen K. Ergodic theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

20 Walters P. An introduction to ergodic theory. New York: Springer-Verlag, 1982.

21 Falconer K J. Fractal geometry, mathematical foundations and applications. New York: John Wiley and Sons, 1990.

·近代数学卷·

第 17 篇

渐近分析方法

编　者　陈文忠
审校者　徐利治

目 录

引　　言

渐近分析是数学分析中一个重要分支，而大参数积分的渐近方法，则是渐近分析理论中的重要内容和工具，因此，对它的研究有着重要的理论和实际意义．虽然关于大参数的渐近方法，早在170年前拉普拉斯(Laplace)就提出一个经典性定理和方法．但直到最近，由于现代科学技术以及应用数学的发展和刺激，关于大参数积分渐近分析方法的研究，尤其是对大参数积分以及激烈振荡函数积分的研究，依然持续不断．

本篇尽可能对渐近分析的基本理论及应用作详细的论述．特别是对大参数积分的渐近理论和方法作系统讨论．希望它有助于科技工作者的使用．

1　渐近分析中的基本概念

1.1　O 关系和记号

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是实数集合 X 上的函数，c 是 X 的极限点(c 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$)，若 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时，$\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$ 是有界的，则记 $f(x)=O\{\varphi(x)\}(x\to c,x\in X)$．特别当 $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$ 在 X 有上界时，则记 $f(x)=O\{\varphi(x)\}(x\in X)$．

例 1　设 $X=(-\infty,+\infty)$，则有

$$x^2=O(x)\quad(x\to0,x\in X),$$
$$e^{-x}=O(1)\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$1-\cos x=O(x^2)\quad(x\to0,x\in X),$$
$$\sin x=O(1)\quad(x\in X).$$

例 2　设 $X=(0,+\infty)$，则有

$$\frac{1}{\ln x}=O(1)\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$\ln^6x=O(x^{\frac{1}{2}})\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$x=O(x^2)\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$e^{-x}=O(1)\quad(x\in X).$$

下文中用 $f=O(\varphi)$ 表示 $f(x)=O\{\varphi(x)\}$．O 关系有如下运算性质：

1° 若 $f=O(\varphi)\quad(x\to c,x\in X)$，且 $\alpha>0$，则有

$$|f|^{\alpha}=O(|\varphi|^{\alpha})\quad(x\to c,x\in X);$$

2° 若 $f_i = O(\varphi_i)(x\to c, x\in X)$，且 α_i 是常数，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_i = O(\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|\cdot|\varphi_i(x)|)(x\to c, x\in X)$；

3° 若 $f_i = O(\varphi_i)(x\to c, x\in X)$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} f_i = O(\prod_{i=1}^{n}\varphi_i) \quad (x\to c, x\in X);$$

4° 若 $f = O(p)$，$p = O(\varphi)(x\to c, x\in X)$，则有

$$f = O(\varphi) \quad (x\to c, x\in X).$$

例 3　设 $X = (0,\infty)$，则有

$$O(x) + O(x^2) = O(x) \quad (x\to 0, x\in X),$$
$$O(x) + O(x^3) = O(x^3) \quad (x\to +\infty, x\in X),$$
$$e^{O(x)} = e^{O(x^2)} \quad (x\to +\infty, x\in X).$$

若存在正常数 M, m 使得当 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时，有 $m\leqslant\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|\leqslant M$，则说 O 关系 $f(x) = O(\varphi(x))(x\to c, x\in X)$ 是最佳的，有时也说 $f(x)$ 是弱渐近于 $\varphi(x)$，记作

$$f(x)\text{或}\,\varphi(x) \quad (x\to c, x\in X).$$

例 4　记 $X = (-\infty, +\infty)$，则有

$$2x + x\sin x\ \text{或}\ x \quad (x\to +\infty, x\in X),$$
$$\ln(e^{2x\cos x} + e^x)\text{或}(x\to +\infty, x\in X).$$

1.2　o 关系和记号

若 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时，$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 0$，则记

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x\to c, x\in X).$$

例 5　设 X 是实数集合，$x = 0$ 是 X 的极限点，则

$$1 - \cos x = o(x) \quad (x\to 0, x\in X);$$
$$e^{x^2} - 1 = o(x) \quad (x\to 0, x\in X);$$
$$\sin^2 x = o(x) \quad (x\to 0, x\in X).$$

若 X 是复数集合，$f(x) = o(\varphi(x))$ 定义中则要求极限 $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ 关于 $\arg x(x\in X)$ 是一致的.

例 6　设 $X = \{x \mid |\arg x|\leqslant\frac{\pi}{2} - \delta, 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\}$，则有

$$e^{-x} = o(1) \quad (x\to\infty, x\in X).$$

应当指出，若取 $X = \{x \mid |\arg x| < \frac{\pi}{2}\}$，则上述 o 关系并不正确，因为此极限关系对于 $\arg x$ 在 X 内不一致成立.

明显地,若 $f=o(\varphi)(x\to c,x\in X)$,则有 $f=O(\varphi)(x\to c,x\in X)$,但其逆不真.

o 关系除了具有类似于 O 关系所列的运算性质外,它和 O 关系还有如下性质:

$$O(o(\varphi))=o(o(\varphi))=o(\varphi)\quad(x\to c,x\in X);$$
$$O(\varphi)+o(\varphi)=O(\varphi)\quad(x\to c,x\in X);$$
$$O(\varphi)o(\psi)=o(\varphi\psi)\quad(x\to c,x\in X).$$

1.3 渐近等价关系和记号

设 $f(x)$ 和 $\psi(x)$ 是实数集合 X 上的函数,c 是 X 的极限点.若 $x\in X$ 且 $x\to c$,有 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 1$,则说 $f(x)$ 渐近等价于 $\varphi(x)$ 或说 $f(x)$ 渐近于 $\varphi(x)$,记作 $f(x)\to\varphi(x)$ $(x\to c,x\in X)$.

例 7 设 X 是实数集合,$x=0$ 是它的极限点,则有

$$\sin x\sim x\quad(x\to 0,x\in X),$$
$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to 0,x\in X),$$
$$e^x-1\sim x\quad(x\to 0,x\in X),$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad(x\to 0,x\in X).$$

例 8 设 $X=(0,\infty)$,则有

$$x+1\sim x\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$\operatorname{sh}x\sim\frac{1}{2}e^x\quad(x\to+\infty,x\in X),$$
$$n!\ \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}(n\to+\infty,n\in X).$$

渐近关系 $f(x)\sim\varphi(x)(x\to c,x\in X)$ 实质上是 $f(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$ $(x\to c,x\in X)$,这种表示法是方便的.

若 X 是复数集合,则等价关系同样要求其极限关于 $\arg x(x\in X)$ 是一致成立的.

1.4 渐近等价关系和阶关系的积分和微分

渐近等价关系和阶关系在积分收敛的条件下,可以分别积分而得到新的渐近等价关系和阶关系.

定理 1 设 $X=(a,c)$,$f(x)$,$\varphi(x)$ 在 X 内可积,若 $f(x)=O(\varphi(x))(x\to c,x\in X)$,则有

$$\int_x^c f(t)\mathrm{d}t=O\left(\int_x^c|\varphi(x)|\mathrm{d}t\right)\quad(x\to c,x\in X);$$

若 $f(x)\sim\varphi(x)(x\to c,x\in X)$,则有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_x^c \varphi(t)\mathrm{d}t \quad (x\to c, x\in X).$$

例9 设 $f(x)$ 在区间 $x=(a,+\infty)$ 内可积，且 $f(x)\sim x^v(x\to+\infty, x\in X)$，其中 v 是实数或复数，则

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \sim \frac{x^{v+1}}{v+1}(x\to+\infty, x\in X, \mathrm{Re}v<-1)$$

和

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \sim \begin{cases} 常数 & (\mathrm{Re}v<-1), \\ \ln x & (v=-1)(x\to+\infty, x\in X), \\ \dfrac{x^{v+1}}{v+1} & (\mathrm{Re}v>-1). \end{cases}$$

这些关系可以推广到复积分.

对于渐近等价关系和阶关系，仅当具有某些特殊条件时，才能通过分别微分而得到新的渐近等价关系和阶关系.比如有

定理2 设 $f(z)$ 在扇形域 S 内对充分大 $|z|$ 是解析的，且 $f(z)=O(z^v)(z\to\infty, z\in S)$，其中 v 是固定的实数，则有 $f^{(m)}(z)=O(z^{v-m})(z\to\infty, z\in S')$，其中 S' 是真含于 S 内部且与 S 具有相同顶点的任何扇形域.

应当指出，上述结果中的 O 记号改为 o 记号仍然是成立的.

1.5 渐近序列

设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是点集 X 上有限个或无限个函数序列，若对每个 n 有 $\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x))(x\to c, x\in X)$，则说当 $x\to c$ 时，$\{\varphi_n(x)\}$ 是一个渐近序列.

若 $\{\varphi_n(x)\}$ 是点集 X 上的无限序列，且 $\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x))(x\to c, x\in X)$ 关于 n 一致成立，则说当 $x\to c$ 时，$\{\varphi_n(x)\}$ 是关于 n 一致的渐近序列.

例10 设 X 是实数集合，如下函数序列是渐近序列：

1° $\{(x-c)^n\}\quad(x\to c, x\in X)$；

2° $\{x^{-n}\}\quad(x\to+\infty, x\in X)$；

3° $\{x^{-\lambda_n}\}\quad(x\to+\infty, x\in X)$，其中 λ_n 是严格增加的实数列；

4° $\{x\mathrm{e}^{-\lambda_n}\}\quad(x\to+\infty, x\in X)$，其中 λ_n 是严格增加的实数列.

例11 记 $S_\delta=\{x|0<|x|<+\infty, |\arg x|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\}$，

则如下函数列是渐近序列：

1° $\{x^{-\lambda_n}\}\quad(x\to\infty, x\in S_\delta)$，其中 $\mathrm{Re}\lambda_{n+1}>\mathrm{Re}\lambda_n(n=1,2,\cdots)$；

2° $\{\mathrm{e}^{-nx}x^{-\lambda_n}\}\quad(x\to\infty, x\in S_\delta)$，其中 λ_n 是任意复数而 $\delta>0$；

3° $\left\{\dfrac{p(x)}{p(x+n)}\right\}\quad(x\to\infty, x\in S_\delta)$，其中 $\delta>-\dfrac{\pi}{2}$.

渐近序列有如下性质：

1° 渐近序列的任何子序列也是渐近序列；

2° 当$x\to c$时,$\{\varphi_n\}$是渐近序列且 $\alpha>0$,则当$x\to c$时,$\{|\varphi_n|^{\alpha}\}$也是渐近序列;

3° 当$x\to c$时,$\{\varphi_n\}$,$\{\psi_n\}$都是渐近序列(若它们都是有限列,要求个数相同),则当$x\to c$时,$\{\varphi_n\psi_n\}$也是渐近序列;

4° 设对每个 n,当$x\to c$时,φ_n 或 ψ_n,若$\{\varphi_n\}$是渐近序列,则$\{\psi_n\}$也是渐近序列;

5° 设当$x\to c$时,$\{\varphi_n(x,y)\}$是关于 $y\in(\alpha,\beta)$的一致渐近序列,又设积分 $\Phi_n(x)=\int_\alpha^\beta|\varphi_n(x,y)|\mathrm{d}y$ 存在,则当$x\to c$时,$\{\Phi_n(x)\}$是渐近序列;

6° 设 $X=(a,c)$,当$x\to c$时$\{\varphi_n(x)\}$是渐近序列,又设积分 $\Phi_n(x)=\int_x^c|\varphi_n(t)|\mathrm{d}t$ 存在,则当$x\to c$时,$\{\Phi_n(x)\}$也是渐近序列.

1.6 渐近展开

设$x\to c$时,$\{\varphi_n(x)\}$是关于 n 的一致渐近序列,即 $\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x))(x\to c,x\in X)$关于 n 一致成立.若$f(x)$和$f_s(x)(s=0,1,\cdots)$是一列已知函数,使得对每个正整数 n 有

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n-1}f_s(x)+O(\varphi_n(x))\quad(x\to c,x\in X),$$

则说形式级数 $\sum_{s=0}^{\infty}f_s(x)$ 是 $f(x)$ 关于渐近序列$\{\varphi_n\}$的渐近展开,记作

$$f(x)\sim\sum_{s=0}^{\infty}f_s(x)\qquad(\{\varphi_n\};x\to c,x\in X).$$

特别取 $f_s(x)=a_s\varphi_s(x)$,则称形式级数 $\sum_{s=0}^{\infty}a_s\varphi_s(x)$ 为 $f(x)$的渐近级数,记作

$$f(x)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_s\varphi_s(x)(x\to c,x\in X).$$

从定义可见:当且仅当对每个正整数 n 有

$$a_n=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-\sum_{s=0}^{n-1}a_s\varphi_s(x)}{\varphi_n(x)}$$

时,$f(x)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_s\varphi_s(x)(x\to c,x\in X)$.

例 12 设 $X=(-\infty,+\infty)$,则有

$$\frac{1}{1+x}\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{-n}\quad(x\to+\infty,x\in X),$$

$$\frac{1}{1+x}\sim\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)x^{-2n}\quad(x\to+\infty,x\in X),$$

$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^2-x+1)x^{-2n} \quad (x \to +\infty, x \in X).$$

例 13　设 $S_\delta = \{x | 0 < |x| < +\infty, |\arg| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta\} (\delta > 0)$，则有

$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{-n} \quad (x \to \infty, x \in S_\delta);$$

$$\frac{1+e^{-x}}{1+x} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{-n} \quad (x \to \infty, x \in S_\delta).$$

从例 12、例 13 可见，渐近级数并不唯一决定其形式“和”$f(x)$.

关于渐近级数有如下重要性质.

1° 若 $f \sim \sum a_n\varphi_n$，$g \sim \sum b_n\varphi_n (x \to c, x \in X)$，而 α, β 是常数，则有

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum(\alpha a_n + \beta b_n)\varphi_n(x) \quad (x \to c, x \in X).$$

2° 假设当 $x \to c$ 时，渐近展开 $f_s(x) \sim \sum a_{n,s}\varphi_n(x)$ 关于 s 一致成立. 若 α_s 是常数使得级数 $\sum \alpha_s$ 绝对收敛，且对每个 n 级数 $A_n = \sum \alpha_s a_{n,s}$ 收敛，则级数 $\sum \alpha_s f_s(x)$ 在 c 的某个邻域内收敛且有

$$\sum \alpha_s f_s(x) \sim \sum A_n\varphi_n(x) \quad (x \to c, x \in X).$$

3° 设 $X = (a, c)$，当 $x \to c$ 时 $\{\varphi_n(x)\}$ 是正函数渐近序列，且对每个 n 积分 $\Phi_n(x) = \int_x^c \varphi_n(x)dx$ 存在，若 $f(x)$ 是 (a, c) 内可测函数，且当 $x \to c$ 时，有

$$f(x) \sim \sum a_n\varphi_n(x),$$

则 $F(x) = \int_x^c f(t)dt$ 在区间 (a, c) 中某个子区间 (a', c) 存在，且当 $x \to c$ 时，有

$$F(x) \sim \sum a_n\Phi_n(x).$$

这就是渐近展开中的逐项积分方法.

应当指出，在一般情况下对渐近展开实行逐项微分是不可能的，某些特殊的情况将在下节中给出.

4° 假设当 $x \to c$ 时，$f(x, y) \sim \sum a_n(y)\varphi_n(x)$ 关于 $y \in (\alpha, \beta)$ 一致成立，若对每个 $x \in X$，$f(x, y)$ 和对每个 n，$a_n(y)$ 都是 $y \in (\alpha, \beta)$ 的可测函数，又设 $h(y)$ 是 (α, β) 中的可积函数且对每个 n 积分

$$A_n = \int_\alpha^\beta h(y)a_n(y)dy$$

存在，则积分 $F(x) = \int_\alpha^\beta h(y)f(x, y)dy$ 在 c 点的某个邻域内存在，且当 $x \to c$ 时，有

$$F(x) \sim \sum A_n\varphi_n(x).$$

1.7 渐近幂级数展开

假设 X 是无界的实或复数集合，$f(x)$ 是 X 上定义的函数，由于当 $x\to\infty$ 时，$\{x^{-n}\}$ 是渐近序列，若 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{-n}(n\to\infty,x\in X)$，即对每个正整数 n，有

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n-1}a_sx^{-s}+O(x^{-n})\quad(x\to\infty,x\in X),$$

则说形式幂级数 $\sum\limits_{s=0}^{\infty}a_sx^{-s}$ 是 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的**渐近幂级数**.

从定义可见，$f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{-n}(x\to\infty,x\in X)$ 当且仅当对每个 n 有 $a_n=\lim\limits_{x\to\infty}x^n\{f(x)-\sum\limits_{s=0}^{n-1}\frac{a_s}{x^s}\}$ 特别当形式幂级数 $\sum a_sx^{-s}$ 对所有充分大的 $|x|$ 都收敛时，此级数就是其和的渐近展开.

例 14 设 $X=(0,\infty)$，则 $e^{-x}\int_1^x\frac{e}{t}dt\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{x^n}\quad(x\to\infty)$.

解 记 $f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$. 通过分部积分得

$$f(x)=[e^t(\frac{1}{t}+\frac{1!}{t^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{t^n})]_1^x+n!\int_1^x\frac{e^t}{t^{n+1}}dt.$$

因为对固定 n 有 $n!\int_1^x\frac{e^t}{t^{n+1}}dt=O(x^{-n-1}e^x)(x\to+\infty)$. 所以对每个 n 有

$$e^{-x}f(x)=\sum_{s=1}^{n}\frac{(s-1)!}{x^s}+O(\frac{1}{x^{n+1}})\quad(x\to+\infty),$$

即

$$e^{-x}\int_1^x\frac{e^t}{t}dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{x^n}\quad(x\to+\infty).$$

例 15 设 $S_\delta=\{x\mid 0<|x|<+\infty,且\ \arg x\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\}$，$\delta>0$，则 $e^{-x}\sim\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{0}{x^s}(x\to+\infty,x\in S_\delta)$.

解 因为 $\lim x^se^{-x}=0(S=0,1,\cdots)$，所以

$$e^{-x}\sim 0+\frac{0}{x}+\frac{0}{x^2}+\cdots+\frac{0}{x^n}+\cdots\quad(x\to\infty,x\in S_\delta).$$

渐近幂级数在渐近分析中是很重要的. 它具有与收敛幂级数非常相似的性质，例如设

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n},g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in X),$$

则

$$f(x)+g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+b_n}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in X),$$

$$Af(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Aa_n}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in X).$$

其中 A 是常数.

$$f(x)\cdot g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in X),$$

其中 $c_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_{n-k}$.又若 $a_0\neq 0$,则

$$\frac{1}{f(x)}\sim\frac{1}{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in X).$$

例16 设 $S_\delta=\{x\mid 0<|x|<\infty,|\arg x|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\}(\delta>0)$,则有

$$\frac{1}{1+x}+e^{-x}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in S_\delta),$$

$$\frac{1}{x-1}+e^{-x}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\quad(x\to\infty,x\in S_\delta).$$

类似的,设 c 是 X 的有限极限点,由于当 $x\to c$ 时,$\{(x-c)^n\}$ 是渐近序列,若

$$f(x)\sim b_0+b_1(x-c)+\cdots+b_n(x-c)^n+\cdots\quad(x\to c,x\in X),$$

则说形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n$ 是 $x\to c$ 时 $f(x)$ 的渐近幂级数,对于这类渐近幂级数上述性质也是成立的.

下面特别指出常用的渐近幂级数的逐项积分和逐项微分.

定理3 设 $X=(a,+\infty)(a>0)$,若

$$f(x)\sim a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots\quad(x\to\infty,x\in X),$$

则 $f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}$ 在 X 内可积,且有

$$\int_x^{+\infty}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt\sim\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{2x^2}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}+\cdots(x\to+\infty,x\in X)$$

或

$$\int_a^x\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt\sim A-\frac{a_2}{x}-\frac{a_3}{2x^2}-\cdots-\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}-\cdots(x\to+\infty,x\in X),$$

其中

$$A=\int_a^{+\infty}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt.$$

定理4 设 $X=(a,+\infty)(a>0)$,若

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (x \to \infty, x \in X),$$

且当 $x \to +\infty$ 时，$f'(x)$ 具有渐近幂级数，则

$$f'(x) \sim -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \cdots - \frac{na_n}{x^{n+1}} - \cdots \quad (x \to +\infty, x \in X).$$

当 $f(x)$ 是复变元 x 的解析函数时，逐项微分定理中的条件可以减弱而得：

定理 5 设扇形域 $S = \{x \mid |x| > a, \alpha < \arg x < \beta\}$，$S' = \{x \mid |x| > a_1, \alpha_1 < \arg x < \beta_1\}$，其中 $a_1 > a, \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$，若 $f(x)$ 在 S 内解析且

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \quad (x \to \infty, x \in S),$$

则有

$$f'(x) \sim -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \cdots - \frac{na_n}{x^{n+1}} - \cdots \quad (x \to \infty, x \in S').$$

这里再次指出，当 $f(x)$ 是复变元 x 的函数时，其渐近幂级数展开总是要求关于 $\arg x$ 是一致成立的.

最后注意到，若函数 $f(x)$ 存在渐近幂级数展开，则其系数 $\{a_s\}$ 是唯一决定的. 反过来对于任意指定的系数列 $\{a_s\}$，必定存在一个无界域 X 内的解析函数 $f(x)$，使得

$$f(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{x^s} \quad (x \to \infty, x \in X),$$

其中集合 X 可以是实数集合或复平面内的扇形域. 不过，从例 14 可见，这种 $f(x)$ 不是唯一的.

2 实变元积分的渐近方法

2.1 分部积分法

含有一个参数的定积分经常可通过累次分部积分求出它的渐近展开. 例如，对于拉普拉斯积分

$$Q(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt,$$

其中 $q(t)$ 在 $[0, \infty)$ 内无限次可微且对每个 s，有

$$q^{(s)}(t) = O(e^{\sigma t}) \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

这里 σ 是指定的常数，则当 $x > \sigma$ 时，n 次分部积分得

$$Q(x) = \frac{q(0)}{x} + \frac{q'(0)}{x} + \cdots + \frac{q^{(n-1)}(0)}{x^{n-1}} + \varepsilon_n(x),$$

其中 n 是非负整数，而 $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^{\infty} e^{-xt} q^{(n)}(t) dt$. 由条件得 $|\varepsilon_n(x)| \leqslant$

$\frac{A_n}{x^n}\int_0^{\infty} e^{-xt+\sigma t}dt = \frac{A_n}{x^n(x-\sigma)}(x>\sigma)$，这里 A_n 是确定的. 因此 $\varepsilon_n(x) = o(x^{-n-1})(x\to\infty)$，于是得到

$$Q(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{(s)}(0)}{x^{s+1}} \quad (x\to+\infty).$$

例 1　不完全 Γ 函数

$$\Gamma(\alpha,x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \sim e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-s)}{x^s} \quad (x\to\infty),$$

其中 α 是固定的.

解　因为

$$\Gamma(\alpha,x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt = e^{-x}x^{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-xt}(1+t)^{\alpha-1}dt,$$

积分 $\int_0^{\infty} e^{-xt}(1+t)^{\alpha-1}dt$ 是 $q(t)=(1+t)^{\alpha-1}$ 的拉普拉斯积分，由于 $q(t)$ 满足所述条件，故得

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}(1+t)^{\alpha-1}dt \sim \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-s)}{x^s} \quad (x\to\infty).$$

注意 $\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-s+1)} = (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-s)(s=1,2,\cdots)$，所以

$$\Gamma(\alpha,x) = \int_x^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \sim e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-2)}{x^s}$$

$$= e^{-x}x^{\alpha-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-s+1)}x^{-s} \quad (x\to+\infty).$$

例 2　误差函数

$$\mathrm{erf}x \sim \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-s)x^{2s-1}} \quad (x\to\infty).$$

解　因为 $\mathrm{erf} = \int_x^{\infty} e^{-\mu^2}du = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2},x^2)$，所以由例 1 得

$$\mathrm{erf} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-s)x^{2s-1}} \quad (x\to\infty).$$

分部积分法也适合具有复变参数的拉普拉斯积分，比如在物理光学上常见的菲涅耳(Fresnel)积分.

例 3　菲涅耳积分

$$F(x,\alpha) = \int_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}dt \sim \frac{ie^{ix}}{x^{\alpha}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{(ix)^s} \quad (x\to+\infty),$$

其中 $\alpha>0$.

解　积分 $F(x,\alpha) = \int_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{\alpha}}dt$　当 $\alpha>0, x>0$ 时收敛，由分部积分得

$$F(x,\alpha)=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^{\alpha}}\sum_{s=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)(\mathrm{i}x)^{s}}+\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}F(x,\alpha+n+1).$$

由于

$$\left|\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}F(x,\alpha+n+1)\right|=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{\alpha+n+1}}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+n+1}}=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha+n}}.$$

因此由渐近展开定义有

$$F(x,\alpha)=\int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t\sim\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{x^{\alpha}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\mathrm{i}x)^{s}}\quad(x\to\infty).$$

例 4　记 $S_{\delta}=\{z\mid 0<|z|<+\infty,|\arg z|\leqslant\pi-\delta<\pi\}$，则有

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+z}\mathrm{d}t\sim\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{z^{s}}(z\to\infty,z\in S_{\delta}).$$

解　积分$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+z}\mathrm{d}t$ 在扇形域$\{z\mid|z|\geqslant\varepsilon>0,|\arg z|\leqslant\pi-\delta<\pi\}$一致收敛，利用分部积分得

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+z}\mathrm{d}t=\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{z^{s}}+(-1)^{s}n!\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(t+z)^{s+1}}\mathrm{d}t,$$

由于

$$\left|(-1)^{s}n!\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(t+z)^{n+1}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{n!}{|z|^{n+1}\sin^{n+1}\delta}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{n!}{|z|^{n+1}\sin^{n+1}\delta}=O\left(\frac{1}{|z|^{n}}\right)\quad(z\to\infty,z\in S_{\delta}).$$

因此由定义得到

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+z}\mathrm{d}t\sim\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{z^{s}}\quad(z\to\infty,z\in S_{\delta}).$$

2.2　沃森引理

考虑拉普拉斯积分 $Q(x)=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}q(t)\mathrm{d}t$，

其中 $q(t)$ 是$(0,+\infty)$内的实或复值函数，它在有限个点是不连续的或是无穷大，并且有

$$q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_{s}t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}(t\to0^{+}),$$

其中 λ 和 μ 是使 $\mathrm{Re}\lambda>0,\mathrm{Re}\mu>0$ 的常数，此外又设 $q(t)$ 的拉普拉斯积分对充分大的 x 都是收敛的.

沃森(Watson)引理断定，由形式逐项积分可得到 $Q(x)$ 的渐近展开，即

$$Q(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}q(t)dt\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}}\quad(x\to+\infty).$$

例 5　设 $X=(a,+\infty)(a>0)$，则有

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}\mathrm{ch}t\,dt\sim e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{[(2s-1)!!]^2}{s!(8x)^s}\quad(x\to+\infty,x\in X).$$

解　因为 $\int_0^{\infty}e^{-xt}\mathrm{ch}t\,dt=e^x\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{(2t+t^2)^{1/2}}dt$,

$$(2t+t^2)^{1/2}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s-1)!!}{s!2^{2s+\frac{1}{2}}}t^{s+1/2}\quad(0<t<2).$$

应用沃森引理得到

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}\mathrm{ch}t\,dt\sim e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{[(2s-1)!!]^2}{s!(8x)^s}\quad(x\to\infty,x\in X).$$

例 6　设 $X=(a,+\infty)$，则

$$\mathrm{li}(e^x)\sim e^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{x^k}\quad(x\to\infty,x\in X),$$

其中 $\mathrm{li}(u)=\int_0^u\frac{dt}{\ln t}$（当 $u>1$ 时，积分按柯西(Cauchy)主值意义取）.

解　因 $\mathrm{li}(u)=\int_0^u\frac{dt}{\ln t}$，令 $u=e^x,t=e^{x-v}$，得

$$\mathrm{li}(e^x)=e^x\int_0^{\infty}e^{-v}\frac{dv}{x-v}=e^x\int_0^{\infty}e^{-tx}\frac{dt}{1-t}.$$

因为 $\frac{1}{1-t}=1+t+\cdots+t^n+\cdots(0<t<1)$，由沃森引理得到

$$\mathrm{li}(e^x)\sim e^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{x^k}\quad(x\to+\infty,x\in X).$$

对于具有复参数 z 的拉普拉斯积分

$$Q(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}q(t)dt.$$

若收敛横坐标是有限或 $-\infty$，沃森引理仍然适用，记

$$S_\delta=\{z\mid\theta<|z|<+\infty,\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\}(\delta>0),$$

则

$$Q(z)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}}\quad(z\to\infty,z\in S_\delta),$$

其中幂 $z^{(s+\lambda)/\mu}$ 取主值分支.

例 7　用 B_n 表示伯努利(Bernoulli)数，则

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)}\frac{1}{z^{2s}}+\frac{1}{2}\ln 2\pi\quad(z\to\infty,z\in S_\delta).$$

解　由欧拉(Euler)公式，有

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt=\ln z+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-zt}dt,$$

取 $q(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}$，它在 $t=0$ 的泰勒(Taylor)展开式为

$$q(t)=-\frac{1}{2}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_{2s}}{(2s)!}t^{2s-1}(t\to0^+).$$

应用沃森引理有

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_{2s}}{2s}\cdot\frac{1}{z^{2s}}(z\to\infty,z\in S_\delta).$$

利用逐项积分法得

$$\ln\Gamma(z)\sim(z-\frac{1}{2})\ln z-z+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)}\frac{1}{z^{2s}}+\frac{1}{2}\ln2\pi(z\to\infty,z\in S_\delta).$$

若 $q(t)$ 是 t 的解析函数，在扇形域 $\alpha_1<\arg t<\alpha_2(\alpha_1,\alpha_2<0)$ 正则，又设

$$q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_st^{(s+\lambda+\mu)/\mu}\quad(t\to0,\alpha_1+\delta\leqslant\arg t\leqslant\alpha_2-\delta),$$

且存在正常数 σ 使得

$$q(t)=O(e^{\sigma|t|})(t\to+\infty,\alpha_1+\delta\leqslant\arg t\leqslant\alpha_2-\delta),$$

其中 $\delta\in(0,\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2})$，则有 $Q(z)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(\frac{s+\lambda}{\mu})\frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}}(z\to\infty,-\alpha_2+\delta-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant-\alpha_1-\delta+\frac{\pi}{2})$.

2.3　傅里叶积分的渐近展开

傅里叶(Fourier)积分的渐近表示是藉助于如下的黎曼勒贝格(Riemann Lebesgue)引理：设 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$q(t)$ 在 (a,b) 内除去有限个点外连续，若积分 $\int_a^b e^{ixt}q(t)dt$ 在 a,b 及除去的点，关于充分大的 x 是一致收敛的，则

$$\int_a^b e^{ixt}q(t)dt=o(1)\ (x\to+\infty).$$

应当指出，当 x 是实数时，若给定的积分在其积分范围内都绝对收敛，则必定关于 x 是一致收敛的.另一方面，此积分可以是一致收敛的，但却非绝对收敛.例如，当 $0<\delta<1$ 时，由分部积分可见，积分 $\int_0^\infty\frac{e^{ixt}}{t^\delta}dt$ 在两个端点关于充分大的 x 一致收敛，但在上限却非绝对收敛.

首先设 $-\infty<a<b<+\infty$，$q(t)$ 在 $[a,b]$ 上无限次可微，利用分部积分法得

$$\int_a^b e^{ixt}q(t)dt=\sum_{s=0}^{n-1}(\frac{i}{x})^{s+1}\{e^{iax}q^{(s)}(a)-e^{ibx}q^{(s)}(b)\}+\epsilon_n(x),$$

其中

$$\epsilon_n(x)=(\frac{i}{x})^n\int_a^b e^{ixt}q^{(n)}(t)dt.$$

由黎曼-勒贝格引理，当 $x\to+\infty$ 时，有 $\epsilon_n(x)=O(x^{-n})$，因此得到渐近展开：

$$\int_a^b e^{ixt}q(t)dt \sim \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{i}{x}\right)^{s+1}\{e^{iax}q^{(s)}(a)-e^{ibx}q^{(s)}(b)\} \quad (x\to+\infty).$$

若 $b=+\infty$，有类似的结果.设对每个 $s(s=0,1,\cdots)$ 积分 $\int_a^{+\infty}e^{ixt}q^{(s)}(t)dt$ 关于充分大的 x 一致收敛，则

$$\int_a^{+\infty}e^{ixt}q^{(s)}(t)dt \sim \frac{ie^{iax}}{x}\sum_{s=0}^{\infty}q^{(s)}(a)\left(\frac{i}{x}\right)^s \quad (x\to+\infty).$$

不论 b 是否无限，渐近展开的误差界限都由下式确定：

$$|\epsilon_n(x)|\leqslant x^{-n}\int_a^b |q^{(n)}(t)|dt = x^{-n}\mathop{\mathrm{V}}_a^b(q^{(n-1)}),$$

其中 $\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上的全变差，即

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)=\int_a^b |df(x)|.$$

其次，设 $q(t)=(t-a)^{\lambda-1}\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上无限次可微，且 $\varphi^{(s)}(\beta)=0(s=0,1,\cdots)$，若 $0<\lambda<1$，则

$$\int_a^b e^{ixt}(t-a)^{\lambda-1}\varphi(t)d(t) \sim e^{iax}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+\lambda)}{s!}\varphi^{(s)}(a)\left(\frac{i}{x}\right)^{s+\lambda} \quad (x\to+\infty).$$

类似地，设 $q(t)=(b-t)^{\mu-1}\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上无限次可微，且 $\varphi^{(s)}(a)=0(s=0,1,2,\cdots)$.若 $0<\mu<1$，则有

$$\int_a^b e^{ixt}(b-t)^{\mu-1}\varphi(t)dt \sim e^{ixb}e^{-\mu\pi i}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+\mu)}{s!}\varphi^{(s)}(b)\left(\frac{i}{x}\right)^{s+\mu} \quad (x\to\infty).$$

最后，假设 $q(t)=(t-a)^{\lambda-1}(b-t)^{\mu-1}\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上 n 次连续可微，若 $0<\lambda<1, 0<\mu<1$，则

$$\begin{aligned}&\int_a^b e^{ixt}(t-a)^{\lambda-1}(b-t)^{\mu-1}\varphi(t)dt\\&=e^{iax}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\Gamma(s+\lambda)}{s!}\left(\frac{i}{x}\right)^{s+\lambda}\frac{d^s}{da^s}\{(b-a)^{\mu}\varphi(a)\}+\\&\quad e^{ixb}e^{-i\mu\pi}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\Gamma(s+\mu)}{s!}\left(\frac{i}{x}\right)^{s+\mu}\frac{d^s}{db^s}\{(b-a)^{\lambda-1}\varphi(b)\}+\\&\quad O\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x\to+\infty).\end{aligned}$$

2.4　拉普拉斯渐近积分公式

考虑实参数的指数积分　$I(x)=\int_a^{\beta}e^{x p(t)}q(t)dt$，其中 $p(t),q(t)$ 是 $[\alpha,\beta)$ 上的实函数，对于充分大的参数 x 积分都存在.若满足如下条件：

1° $p(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上仅在 ξ 点达到最大值，即

$$\sup_{\alpha\le t<\beta} p(t) \le p(\xi);$$

2° $p(t)$ 在 $t = \xi$ 具有二阶导数，且 $p''(\xi) < 0$；

3° $q(t)$ 在 ξ 点连续且 $q(\xi) \neq 0$，

则

$$I(x) = \int_\alpha^\beta e^{xp(t)} q(t)\mathrm{d}t \sim e^{xp(\xi)} q(\xi)\left[\frac{-\pi}{2xp''(\xi)}\right]^{1/2} \quad (x \to +\infty),$$

其中 $\alpha < \beta \le +\infty$，这个公式通常称为**拉普拉斯(Laplace)渐近积分公式**.

例 8　斯特林(Stirling)渐近公式

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \mathrm{d}x \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \quad (x \to +\infty).$$

解　令 $t = x\tau$，得

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \mathrm{d}x = x^{x+1}\int_0^\infty \exp[x(\ln\tau - \tau)]\mathrm{d}\tau.$$

取 $q(\tau) = 1, p(\tau) = \ln\tau - \tau$，于是 $\xi = 1$. 由拉普拉斯渐近积分公式得

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \mathrm{d}t \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \quad (x \to +\infty).$$

特别取 $x = n$ 是正整数时，则 $n! \sim \left(\frac{n}{t}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \to \infty)$.

例 9　设 $\alpha > 0$，则

$$\int_0^\infty y^{-\alpha y} t^y \mathrm{d}y \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\, t^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{e} t^{1/\alpha}\right) \quad (t \to +\infty).$$

解　将积分中的 y 换为 $\frac{1}{e} t^{1/\alpha}(1+y)$，得

$$\int_0^\infty y^{-\alpha y} t^y \mathrm{d}y = \frac{1}{e} t^{1/\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{e} t^{1/\alpha}\right)\int_{-1}^\infty \exp\left\{\frac{\alpha}{e} t^{1/\alpha}(y - (1+y)\ln(1+y))\right\}\mathrm{d}y.$$

取 $q(y) = 1, p(y) = y - (1+y)\ln(1+y), x = \frac{\alpha}{e} t^{1/\alpha}$，于是 $\xi = 0$，由拉普拉斯渐近公式，当 $\alpha > 0$ 时，有

$$\int_0^\infty y^{-\alpha y} t^y \mathrm{d}y \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\, t^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{e} t^{1/\alpha}\right) \quad (t \to +\infty).$$

从上述例子可见，在应用拉普拉斯渐近公式时，有时需要通过换元将被积函数适当变形使之符合渐近公式的要求.

若令 $f(t) = e^{p(t)}$，则拉普拉斯渐近积分公式可写为

$$\int_\alpha^\beta q(t)(f(t))^x \mathrm{d}t \sim q(\xi)(f(\xi))^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(\xi)}} \quad (x \to +\infty).$$

例 10　勒让德(Legendre)多项式 $p_n(x)$ 的渐近表示为

$$p_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1/2}}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} \quad (n \to +\infty).$$

解　勒让德多项式 $p_n(x)$ 是微分方程

$$(1+x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \text{的解},$$

其积分表示式为

$$p_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta]^n\mathrm{d}\theta.$$

取 $q(\theta)=\frac{1}{2\pi}, f(\theta)=x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta$，于是 $\xi=0$，由拉普拉斯渐近公式

$$p_n(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1/2}}{\sqrt[4]{x^2-1}}\quad(n\to+\infty).$$

例 11　贝塞尔(Bessel)函数 $J_v(\mathrm{i}t)(v=0,1,\cdots)$ 的渐近表示为

$$J_v(\mathrm{i}t)\sim(-\mathrm{i})^v\frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{2\pi t}}\quad(t\to+\infty).$$

解　由汉森(Hansen)展开式，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cos x}=J_0(t)+2\sum_{v=1}^{\infty}J_v(t)i^{-v}\cos vx\quad(\mathrm{i}^2=-1).$$

于是用 $\mathrm{i}t$ 代替 t 得

$$\mathrm{e}^{-t\cos x}=J_0(\mathrm{i}t)+2\sum_{v=1}^{\infty}J_v(\mathrm{i}t)\mathrm{i}^{-v}\cos vx,$$

所以

$$2\mathrm{i}^{-v}J_v(\mathrm{i}t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos vx\,\mathrm{e}^{-t\cos x}\mathrm{d}x,$$

取 $q(x)=\frac{1}{\pi}\cos vx, f(x)=\mathrm{e}^{-\cos x}$，于是 $\xi=\pi$，则由拉普拉斯渐近公式得

$$J_v(\mathrm{i}t)\sim(-\mathrm{i})^v\frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{2\pi t}}\quad(t\to+\infty).$$

最后注意到，上述的拉普拉斯渐近公式，对于 $p''(\xi)=0$ 及 $q(t)$ 在 ξ 点不连续或 $q(\xi)=0$ 的情况是不适用的，因此在实用上需要将拉普拉斯渐近公式加以推广. 除了假设 $p(t)$ 在 $(\alpha,\beta)(-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty)$ 内仅在 $t=\xi$ 点达到最大值外，还设

1° $p'(t)$ 和 $q(t)$ 在 ξ 点的一个邻域内可能除去 ξ 点外都连续；

2° 当 $t\to\xi^+$ 时，

$$p(\xi)-p(t)\sim P(t-\xi)^{\mu};\quad q(t)\sim Q(t-\xi)^{\lambda-1},$$

且第一个渐近关系是可微分的，其中 p,Q,μ 和 λ 是常数且 $P>0,\mu>0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda>0$；

3° 对充分大的 x，积分 $I(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{e}^{xp(t)}q(t)\mathrm{d}t$ 都是绝对收敛的，则当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\int_{\xi}^{\beta}\mathrm{e}^{xp(t)}q(t)\mathrm{d}t\sim\frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\mathrm{e}^{xp(\xi)}}{(px)^{\lambda/\mu}}.$$

同样地，若设 $x\to\xi^-$ 时

$$p(\xi)-p(t)\sim P_1|t-\xi|^{\mu_1};\quad q(t)\sim Q_1|t-\xi|^{\lambda_1-1},$$

则当$x\to+\infty$时，有

$$\int_a^{\xi}e^{x p(t)}q(t)dt\sim\frac{Q_1}{\mu_1}\Gamma(\frac{\lambda_1}{\mu_1})\frac{e^{x p(\xi)}}{(p_1 x)^{\lambda_1/\mu_1}}.$$

于是当$x\to+\infty$时，有

$$I(x)=\int_a^{\beta}e^{x p(t)}q(t)dt\sim(\frac{Q}{\mu})\Gamma(\frac{\lambda}{\mu})\frac{1}{(px)^{\lambda/\mu}}+$$

$$\frac{Q_1}{\mu_1}\Gamma(\frac{\lambda_1}{\mu_1})\frac{1}{(p_1x)^{\lambda_1/\mu_1}}e^{x p(\xi)}.$$

2.5 指数积分的渐近展开

首先考虑实参数的指数积分

$$I(x)=\int_a^{\beta}e^{x p(t)}q(t)dt$$

当$x\to+\infty$时的渐近展开.采用划分积分区间及换元方法总可设$p(t)$的最大值在积分区间的左端点α达到，而另一端点$\beta\leqslant+\infty$.函数$p(t),q(t)$除了满足上述条件外，还假设当$t\to\alpha^+$时，

$$p(t)\sim P(\alpha)+\sum_{s=0}^{\infty}p_s(t-\alpha)^{s+\mu};\quad q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}q_s(t-\alpha)^{s+\lambda-1},$$

而且第一个展开式可以逐项求微分，则由拉普拉斯渐近公式导出当$x\to+\infty$时，指数积分有如下渐近展开

$$\int_a^{\beta}e^{x p(t)}q(t)dt\sim e^{x p(a)}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(\frac{s+\lambda}{\mu})\frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}},$$

其中系数a_s由如下展开式确定

$$\frac{q(t)}{p'(t)}\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_s v^{\frac{s+\lambda-\mu}{\mu}}\quad(v=p(\alpha)-p(t)\to0^+).$$

利用渐近展开的运算可以依次决定a_s.例如

$$a_0=\frac{q_0}{\mu(-p_0)^{\lambda/\mu}},a_1=\{\frac{q_1}{\mu}-\frac{(\lambda+1)p_1q_0}{p_0}\}\frac{1}{(-p_0)^{\frac{\lambda+1}{\mu}}},$$

$$a_2=\left\{\frac{q_2}{\mu}-\frac{\lambda+2}{\mu^2p_0}p_1q_1-[(\lambda+\mu+2)p_1^2-2\mu p_0p_1]\frac{(\lambda+2)q_0}{2\mu^3p_0^2}\right\}\frac{1}{(-p_0)^{\frac{\lambda+2}{\mu}}},$$

…

应当指出，沃森引理实质上是这种展开方法的特例.

其次考虑如下形式的指数积分

$$I(z)=\int_0^{\beta}e^{-zt^2}q(t)dt,$$

其中 z 是复参数,且 $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$,而 $\beta\leqslant+\infty$.

记 $S_\varepsilon=\{z\mid 0<|z|<+\infty;|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon\}$,

其中 $\varepsilon>0$.这类复参数的指数积分有如下基本渐近关系:

1° 设 $q(t)\in L(0,\beta)$,若 $t=0$ 是 $q(t)$ 的连续点,则 $\forall\delta>0$ 有

$$\int_0^\beta q(t)e^{-zt^\delta}dt\sim\frac{q(0)}{\delta}\Gamma(\frac{1}{\delta})z^{-\frac{1}{\delta}}\quad(z\to\infty,z\in S_\varepsilon);$$

2° 设 $q(t)=\varphi(t)t^c$,其中 $\varphi(t)\in L(0,\beta)$,若 $t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的连续点,则 $\forall\delta>0,c>-1$,有

$$\int_0^\beta q(t)e^{-zt^\delta}dt\sim\frac{\varphi(0)}{\delta}\Gamma(\frac{1+c}{\delta})z^{-\frac{1+c}{\delta}}\quad(z\to\infty,z\in S_\varepsilon);$$

3° 设 $q(t)$ 是$[0,\beta]$上有界变差函数,则 $\forall\delta>0$ 有

$$\int_0^\beta q(t)e^{-zt^\delta}dt\sim\frac{q(0^+)}{\delta}\Gamma(\frac{1}{\delta})z^{-1/\delta}\quad(z\to\infty,|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

利用上述渐近公式可得到此类指数积分的渐近展开:

设 $C_k,r_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是任意常数,若

$$-1<r_1<r_2<\cdots<r_n,\text{且 }q(t)=\sum_{k=1}^{n}C_kt^{r_k}+g(t)t^{r_n},$$

其中 $g(t)\to0(t\to0^+)$,则 $\forall\delta>0$,有

$$\int_0^\beta q(t)e^{-zt^\delta}dt=\sum_{k=1}^{n}C_k\cdot\frac{1}{\delta}\Gamma(\frac{1+r_k}{\delta})z^{-\frac{1+r_k}{\delta}}+o(|z|^{-\frac{1+r_n}{\delta}})\quad(z\to\infty,z\in S_\varepsilon).$$

特别当 $q(t)$ 在 $t=0$ 可展开为泰勒级数时,则 $\forall\delta>0$,有

$$\int_0^\beta q(t)e^{-zt^\delta}dt\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{(s)}(0)}{s!}\Gamma(\frac{1+s}{\delta})z^{-\frac{s+1}{\delta}}\qquad(z\to\infty,z\in S_\varepsilon).$$

2.6 平稳位相方法

考虑积分

$$I(x)=\int_a^b e^{ixp(t)}q(t)dt.$$

当参数 $x\to+\infty$ 时的渐近展开,平稳位相方法是确定此展开式中的主要项.

假设 $p(t)$ 在(a,b)上可微,且 $p'(t)$ 在$[a,b]$上只有有限个零点,即位相 $xp(t)$ 在$[a,b]$上只有有限个平稳点.因此,可划分积分区间为有限个子区间,使得在每个子区间上或者 $p'(t)\neq0$,或者 $p'(t)$ 仅在左端点或仅在右端点为零.下面分别讨论.

1° 设 $p(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上无平稳点,即 $p'(t)\neq0$,则当 $x\to+\infty$ 时,有

$$\int_\alpha^\beta e^{ixp(t)}q(t)dt=\frac{q(\beta)}{ixp'(\beta)}e^{ixp(\beta)}-\frac{q(\alpha)}{ixp'(\alpha)}e^{ixp(\alpha)}+O(\frac{1}{x}).$$

2° 设 $p(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上只有 $t=\alpha$ 是平稳点,若 $p''(\alpha)>0$,则当 $x\to+\infty$ 时,有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{\pi}{2xp''(\alpha)}\right\}^{1/2}q(\alpha)e^{ix\varphi(\alpha)+\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

若 $p''(\alpha) < 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{\pi}{-2xp''(\alpha)}\right\}^{1/2}q(\alpha)e^{ix\varphi(\alpha)-\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

若 $p''(\alpha) = 0$，而 $p'''(\alpha) > 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{6}{xp'''(\alpha)}\right\}^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)q(\alpha)e^{ix\varphi(\alpha)+\frac{\pi}{6}i} + O\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right).$$

3° 设 $p(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上仅有 $t=\beta$ 是平稳点，若 $p''(\beta) > 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{\pi}{2xp''(\beta)}\right\}^{1/2}q(\beta)e^{ix\varphi(\beta)+\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

若 $p''(\beta) < 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{\pi}{-2xp''(\beta)}\right\}^{1/2}q(\beta)e^{ix\varphi(\beta)-\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

若 $p''(\beta) = 0$，而 $p'''(\beta) > 0$，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta e^{ix\varphi(t)}q(t)\mathrm{d}t = \left\{\frac{6}{xp'''(\beta)}\right\}^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)q(\beta)e^{ix\varphi(\beta)+\frac{\pi}{6}i} + O\left(\frac{1}{x^{2/3}}\right).$$

例 12 设 β 是正锐角，则当 $x \to +\infty$ 时，有

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix}(\theta - \sec\beta\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \left\{\frac{2}{\pi x\,\mathrm{tg}\beta}\right\}^{1/2}e^{ix(\beta-\mathrm{tg}\beta)+\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

解 取 $p(\theta) = \theta - \sec\beta\sin\theta$，$q(\theta) = \dfrac{1}{\pi}$，由于 $\theta = \beta$ 是 $p(\theta)$ 的平稳点，且 $p''(\theta) = \mathrm{tg}\beta > 0$，注意到

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\varphi(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\beta e^{i\varphi(\theta)}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_\beta^\pi e^{i\varphi(\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

由平稳位相方法得到，当 $x \to +\infty$ 时，有

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2x\,\mathrm{tg}\beta}\right\}^{1/2}e^{ix(\beta-\mathrm{tg}\beta)+\frac{\pi}{4}i} + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2x\,\mathrm{tg}\beta}\right\}^{1/2}e^{ix(\beta-\mathrm{tg}\beta)+\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$= \left\{\frac{2}{\pi x\,\mathrm{tg}\beta}\right\}^{1/2}e^{ix(\beta-\mathrm{tg}\beta)+\frac{\pi}{4}i} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

特别考虑到贝塞尔函数

$$J_v(v\sec\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos v(\theta - \sec\beta\sin\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{\sin v\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-v(t+\sec\beta\,\mathrm{sh}\,t)}\mathrm{d}t,$$

由于

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-v(t+\sec\beta\,\mathrm{sh}\,t)}\mathrm{d}t < \int_0^\infty e^{-vt}\mathrm{d}t = \frac{1}{v},$$

所以当 $v \to +\infty$ 时，有

$$J_v(v\sec\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos v(\theta - \sec\beta\sin\theta)\mathrm{d}\theta + O\left(\frac{1}{v}\right) = \mathrm{Re}I(v) + O\left(\frac{1}{v}\right),$$

因此得到贝塞尔函数的渐近表示式：当 $v \to +\infty$ 时，有

$$J_v(v\sec\beta) = \left\{\frac{2}{\pi v \mathrm{tg}\beta}\right\}^{1/2}\cos\left[v(\beta - \mathrm{tg}\beta) + \frac{1}{4}\pi\right] + O\left(\frac{1}{v}\right).$$

例 13 当$v \to +\infty$时,有

$$I(v) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iv(\theta - \sin\theta)}d\theta = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{v}\right)^{1/3}e^{\frac{1}{6}\pi i} + O\left(\frac{1}{v^{2/3}}\right).$$

从而当$v \to +\infty$时,贝塞尔函数$J_v(v)$有如下渐近式

$$J_v(v) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos v(\theta - \sin\theta)d\theta - \frac{\sin v\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-v(t+\mathrm{sh}t)}dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}\cdot 3^{1/6}\cdot \pi v^{1/3}} + O\left(\frac{1}{v^{1/3}}\right).$$

解 取$q(\theta) = \frac{1}{\pi}$,$p(\theta) = \theta - \sin\theta$,在$[0,\pi]$中只有$\theta = 0$是$p(\theta)$的平稳点,且$p''(0) = 0$,$p'''(0) = 1$,于是由平稳位相方法得

$$I(v) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\pi}\left(\frac{6}{v}\right)^{1/3}e^{1/6\pi i} + O\left(\frac{1}{v^{2/3}}\right)(v \to +\infty).$$

同例12一样,当$v \to +\infty$时,$J_v(v) = \mathrm{Re}[I(v)] + O\left(\frac{1}{v}\right)$.所以,当$v \to +\infty$时,有

$$J_v(v) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi}\frac{1}{2^{2/3}\cdot 3^{1/6}\cdot v^{1/3}} + O\left(\frac{1}{v^{2/3}}\right).$$

在应用平稳位相方法时,有时需通过换元将被积函数变形使之符合要求.

例 14 确定艾里(Airy)积分 $A_i(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}v^3 - xv\right)dv$ 当$x \to +\infty$时的渐近表示式.

解 令$v = \sqrt{x}(1+t)$,$x > 0$,得

$$A_i(-x) = \frac{x^{1/2}}{\pi}\int_{-1}^\infty \cos\left[x^{3/2}\left(-\frac{2}{3} + t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\right]dt.$$

于是当$x > 0$时,有

$$A_i(-x) = \sqrt{x}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^\infty e^{ix^{3/2}(-2/3+t^2+\frac{1}{3}t^3)}\right\}dt,$$

取$q(t) = \frac{1}{\pi}$,$p(t) = -\frac{2}{3} + t^2 + \frac{1}{3}t^3$,由于在$[-1,\infty)$内$p(t)$只有$t = 0$是平稳点且$p''(0) = 2$,因此应用平稳位相方法得到(此时视$x^{3/2}$为$x$)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^\infty e^{ix^{3/2}(-\frac{2}{3}+t^2+\frac{1}{3}t^3)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 e^{ix^{3/2}(-\frac{2}{3}+t^2+\frac{1}{3}t^3)}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{ix^{3/2}(-\frac{2}{3}+t^2+\frac{1}{3}t^3)}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4x^{3/2}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{2}{3}ix^{3/2}+\frac{\pi}{4}i} + O(x^{-3/2}) \quad (x \to +\infty),$$

因而得到渐近表示式

$$A_i(-x)=\left(\frac{1}{\pi x^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\quad(x\to+\infty),$$

于是得到如下渐近公式

$$Ai(-x)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)\quad(x\to+\infty).$$

应用平稳位相方法也可以导出渐近等价关系和渐近展开,比如设在(α,β)内$p'(t),q(t)$连续且$p'(t)>0$,而$p''(t),q'(t)$至多有有限个不连续点,若当$t\to\alpha^+$时,有

$$p(t)-p(\alpha)\sim P\cdot(t-\alpha)^{\mu};\quad q(t)\sim Q(t-\alpha)^{\lambda-1},$$

且这些关系中第一个是两次可微分,而第二个是可微分,其中P,μ和λ是正常数,而Q是常数(实或复).此外还设,当$\lambda<\mu$时,对任何$\eta\in(\alpha,\beta),q(t)/p'(t)$在$(\eta,\beta)$内是有界变差,而当$\lambda\geqslant\mu$时,$q(t)/p'(t)$在$(\alpha,\beta)$内是有界变差.且当$t\to\beta^-$时,$q(t)/p'(t)$的极限存在,若$p(\beta)=\infty$时,此极限为零,则积分

$$\int_{\alpha}^{\beta}e^{ix\varphi(t)}q(t)dt$$

对充分大的x一致收敛,且

1° 当$\lambda<\mu$时,$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}e^{ix\varphi(t)}q(t)dt\sim e^{\frac{i\pi\lambda}{2\mu}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{ix\varphi(\alpha)}}{(px)^{\lambda/\mu}}\quad(x\to+\infty).$

2° 当$\lambda\geqslant\mu$时,有

$$\int_{\alpha}^{\beta}e^{ix\varphi(t)}q(t)dt\sim\lim_{t\to\alpha^+}\frac{q(t)}{p'(t)}\frac{e^{ix\varphi(\alpha)}}{ix}+\lim_{s\to\beta^-}\left\{\frac{q(t)e^{ix\varphi(t)}}{p'(t)}\right\}\frac{1}{ix}\quad(x\to+\infty).$$

3 围道积分的渐近方法

3.1 复变元积分的拉普拉斯方法

考虑复变元积分

$$I(z)=\int_{\Lambda}e^{-z\varphi(t)}q(t)dt,$$

其中Λ表示联结a,b两点的路径,这里设端点a是有限的,而端点b可以是有限或无穷.

将第2章中实变元积分的拉普拉斯方法推广到复变元时,选取多值函数分支必须格外小心.设ω表示路径Λ在a点的角系数,即当$t\to a(t\in\Lambda)$时,辐角$\arg(t-a)$的极限值.又设函数$p(t),q(t)$在含有路径Λ的开区域内,可能除去端点a,b外都是正则的,此外还设

1° 在a点邻域存在收敛的级数展开式:

$$p(t)=p(a)+\sum_{s=0}^{\infty}p_s(t-a)^{s+\mu};\quad q(t)=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(t-a)^{s+\lambda-1},$$

其中 $p_0 \neq 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$. 若 μ 或 λ 是非整数,函数 $(t-a)^{\mu}$ 和 $(t-a)^{\lambda}$ 的分支由下式确定:当 $t \to a$ 时 $(t \in \Lambda)$ 有 $(t-a)^{\mu} \sim |t-a|^{\mu} e^{i\mu\omega}$; $(t-a)^{\lambda} \sim |t-a|^{\lambda} e^{i\lambda\omega}$,并解析开拓到其他地方.

2° 参数 z 限定在扇形域: $\theta = \arg z$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ 且 $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$,或在一条射线上.

3° 积分 $I(z)$ 在 b 点对一切充分大的 $|z|$ 绝对且一致收敛.

4° $\mathrm{Re}\{e^{i\theta}(p(t)-p(a))\}$ 在 Λ 上至多仅在 $t = a$ 点达到最小值.

在上述条件下,有

$$I(z) = \int_{\Lambda} e^{-zp(t)} q(t) \mathrm{d}t \sim e^{-zp(a)} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{\frac{s+\lambda}{\mu}}}$$

$$(z \to \infty, \text{且 } \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2),$$

其中幂 $z^{\frac{s+\lambda}{\mu}}$ 的分支取 $|z|^{\frac{s+\lambda}{\mu}} e^{i\frac{\theta(s+\lambda)}{\mu}}$,而系数 a_s 用本篇2.5节中的方法确定.此外, p_0 的幂选取使得 $\arg p_0$ 为 $|\arg p_0 + \mu\omega| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 的分支,这种选取是可能且唯一的.

3.2 鞍 点 法

考虑积分

$$I(z) = \int_{\Lambda} e^{-zp(t)} q(t) \mathrm{d}t,$$

其中 Λ 是联结 a, b 两点的积分路径.当 $\mathrm{Re}\{zp(t)\}$ 在 Λ 上的最小值不出现在端点 a,而出现在 Λ 中某一个内点 t_0 时,为简单起见,设 $\theta = \arg z$ 是固定的, t_0 与 z 无关.将路径 Λ 在 t_0 点割开,得到

$$I(z) = \int_{\Lambda_1} e^{-zp(t)} q(t) \mathrm{d}t - \int_{\Lambda_2} e^{-zp(t)} q(t) \mathrm{d}t,$$

其中 Λ_1 是 Λ 中从 t_0 到 b 的部分,而 Λ_2 是 Λ 中从 t_0 到 a 的部分.当 $|z|$ 充分大时,对这两个积分的渐近展开可以应用本篇3.1节中的拉普拉斯方法得到.注意到3.1节中条件1°,在点 t_0 将 $p(t)$, $q(t)$ 展开为泰勒级数,若 $p'(t_0) \neq 0$,则发现这两个积分的渐近展开是完全相同的,因相减之后只留下误差项.若 $p'(t_0) = 0$,则 μ 是不小于1的整数,因而在构造系数 a_2 时,利用了 $p_0^{\frac{1}{\mu}}$ 的不同分支.因此,两个积分的渐近展开不能抵消.

可见当 $p'(t_0) \neq 0$ 时,直接应用3.1节中的拉普拉斯方法是不适宜的.利用柯西定理改变原积分路径 Λ 为新积分路径 Λ',使得 $\mathrm{Re}\{zp(t)\}$ 的最小值或者出现在 Λ' 的端点之一,或者出现在 $p'(t)$ 的零点,然后再应用3.1节的拉普拉斯方法给出积分的渐近展开.这种方法称为黎曼鞍点方法,有时也称最速下降线法.利用鞍点法时, $p'(t)$ 的零点是非常重要的,称它为鞍点.之所以这样命名是因为展布在 t 平面上的曲面 $|e^{p(t)}|$ 在 t_0 点既非最大也非最小,而呈鞍状.而新路径 Λ' 称为最速下降线.

总括来说,用鞍点法寻求积分 $I(z)$ 的渐近展开有如下几个步骤:

1° 找出鞍点位置,即求出 $p'(t)=0$ 的一个根 t_0;

2° 从 t_0 出发选取一条最速下降线 Λ';

3° 设法使 Λ' 与 Λ 延展为一个闭围道;

4° 分段应用 3.1 节的拉普拉斯方法及必要的估计.

对一个积分确定鞍点是容易的,但构造一条新路径 Λ' 使得其端点之一或是鞍点达到最小值是较麻烦的,但当参数 z 仅限定是实参数时,有一些巧妙的方法,不过必须了解 t 平面到 $p(t)$ 平面间的共形映照. 至于积分 $I(z)$ 渐近展开的余项估计,采用沿 $I_m(zp(t))=$ 常数的积分路径是有效的.

例 1　求贝塞尔函数

$$J_v(v\operatorname{sech}\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i}e^{-v(t-\operatorname{sech}\alpha\operatorname{sh}t)}dt.$$

对固定的 $\alpha>0$,当 $v\to+\infty$ 时的渐近展开.

解　取 $p(t)=t-\operatorname{sech}\alpha\operatorname{sh}t$,其鞍点是方程:

$$\operatorname{ch}t=\operatorname{ch}\alpha$$

的根,即 $t=\pm\alpha,\pm\alpha+2\pi i,\cdots$,取 $t_0=\alpha$,并选取图 3-1 所示的积分路径 Λ'.

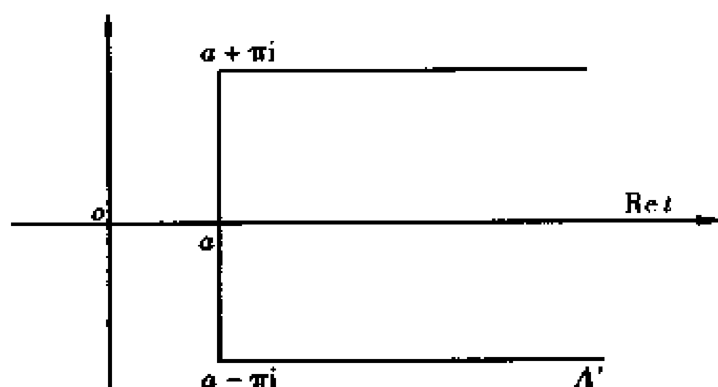


图 3-1

在 Λ' 上的铅直部分有 $t=\alpha+i\tau(-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi)$,因此 $\operatorname{Re}\{p(t)\}=\alpha-\operatorname{th}\alpha\cos\tau>\alpha-\operatorname{th}\alpha(\tau\neq0)$,而在水平部分有 $t=\alpha\pm\pi i+\tau(0\leqslant\tau<+\infty)$,因此

$$\operatorname{Re}\{p(t)\}=\alpha+\tau+\operatorname{sech}\alpha\operatorname{sh}(\alpha+\tau)\geqslant\alpha+\operatorname{th}\alpha.$$

可见,当 $v>0$ 时,$\operatorname{Re}\{vp(t)\}$ 在 Λ' 上的点 α 达到最小值,注意到 $p(t)$ 在 α 的泰勒展开式为

$$p(t)=\alpha-\operatorname{th}\alpha-\frac{1}{2}(t-\alpha)^2\operatorname{th}\alpha-\frac{1}{6}(t-\alpha)^3-\frac{1}{24}(t-\alpha)^4\operatorname{th}\alpha+\cdots$$

采用3.1 节中的记号,有 $\mu=2,p_0=-\frac{1}{2}\operatorname{th}\alpha,p_1=-\frac{1}{6},p_2=-\frac{1}{24}\operatorname{th}\alpha$ 以及 $\lambda=q_0=1$. 在路径 Λ' 的上半部分 $\omega=\frac{1}{2}\pi$,又 $\theta=\arg v=0$,因此应取 $\arg p_0=-\pi$,利用 3.1 节中的拉普拉斯方法,得

$$\int_\alpha^{\infty+\pi i}\exp[-v(t-\operatorname{sech}\alpha\operatorname{sh}t)]dt\sim\exp[-v(\alpha-\operatorname{th}\alpha)]\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{a_s}{v^{\frac{s+1}{2}}}$$

$$(v \to +\infty),$$

其中系数 a_s 可用2.5节中的方法确定，例如

$$a_0 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{ch}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{i};\quad a_1 = \frac{1}{3}\mathrm{cth}^2\alpha;$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\mathrm{cth}^2\alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{cth}\alpha\right)^{3/2}\mathrm{i};\cdots.$$

类似地，在路径 A' 的下半部分 $\omega = -\frac{\pi}{2}$，因此取 $\arg p_0 = \pi$，由3.1节中的方法可得

$$\int_\alpha^{\infty - \mathrm{i}\pi}\exp[-v(t - \mathrm{sech}\alpha\mathrm{sh}t)]\mathrm{d}t \sim$$

$$\exp[-v(\alpha - \mathrm{th}\alpha)]\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{a'_s}{v^{\frac{s+1}{2}}}\quad (v \to +\infty),$$

其中 $a'_0 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{ch}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}(-\mathrm{i})$；$a'_1 = \frac{1}{3}\mathrm{cth}^2\alpha$；

$$a'_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\mathrm{cth}^2\alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{cth}\alpha\right)^{3/2}\mathrm{i};\cdots$$

因此，当 $v \to +\infty$ 时，有

$$\begin{aligned} J_v(v\mathrm{sech}\alpha) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty - \pi\mathrm{i}}^{\infty + \pi\mathrm{i}}\exp[-v(t - \mathrm{sech}\alpha\mathrm{sh}t)]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\alpha^{\infty + \pi\mathrm{i}}\exp[-v(t - \mathrm{sech}\alpha\mathrm{sh}t)]\mathrm{d}t - \\ &\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\alpha^{\infty - \pi\mathrm{i}}\exp[-v(t - \mathrm{sech}\alpha\mathrm{sh}t)]\mathrm{d}t \sim \\ &\quad \frac{\mathrm{e}^{-v(\alpha - \mathrm{th}\alpha)}}{(2\pi v\mathrm{th}\alpha)^{1/2}}\left\{1 + \left(\frac{1}{8}\mathrm{cth}\alpha - \frac{5}{24}\mathrm{cth}^3\alpha\right)\frac{1}{v} + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

这就是德拜(Debye)渐近展开.

注意，本例中没有给出展开式的一般项，因为计算高次系数较容易的方法是通过微分方程.

其次本例中的最速下降线是容易想到的，所以不需要共形映照，然而对于 v 和 α 取复值时，共形映照是不可避免的.

4 积分渐近展开方法拓广

4.1 具有对数奇点的积分之渐近展开

沃森引理、拉普拉斯方法以及平稳位相方法都可以拓广使之适用被积函数在鞍点具有对数奇性的积分. 比如，设 $q(t)$ 是 t 的实或复值函数，它在 $(0, +\infty)$ 内有有限个不连续点和无穷大，并且当 $t \to 0^+$ 时有

$$q(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{\frac{s+\lambda-\mu}{\mu}},$$

其中 λ,μ 是具有 $\mathrm{Re}\lambda > 0$ 和 $\mathrm{Re}\mu > 0$ 的常数,则利用沃森引理可得到:当 $x \to +\infty$ 时,有

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) \ln t \mathrm{d}t \sim \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma'\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}} - \ln x \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}}.$$

这个展开式可以理解为从渐近展开式

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) \mathrm{d}t \sim \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}} \quad (x \to +\infty).$$

关于指数 $\frac{s+\lambda}{\mu}$ 形式微分得到,因而可以重复任意多次而得到如下积分 $\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) \ln^k t \mathrm{d}t$ 当 $\alpha \to +\infty$ 时的渐近展开,其中 k 是正整数.

4.2 拉普拉斯渐近方法的拓广

考虑如下形式的指数积分

$$I(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} \exp F(x,\lambda) \mathrm{d}x$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近值.

设 $F(u,v)$, $F_u(u,v)$, $F_{uu}(u,v)$ 在定义域 $D = \{(u,v) \mid -\infty \leqslant \alpha \leqslant u \leqslant \beta \leqslant +\infty, v > 0\}$ 上连续且满足条件:

1° 存在连续函数 $u = \varphi(v)$,使得当 v 充分大时有 $F_u(\varphi(v),v) = 0$,且当 $v \to +\infty$ 时,$\varphi(v) \to \xi (\alpha < \xi < \beta)$;

2° 对一切 $u(\alpha < u < \beta)$ 及充分大 v 有 $F_{uu}(u,v) < 0$;

3° 当 $(u,v) \to (\xi,\infty)$ 时,$F_{uu}(u,v) \sim F_{uu}(\xi,v) \to -\infty$,

则当 $\lambda \to +\infty$ 时成立渐近公式

$$I(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} \exp F(x,\lambda) \mathrm{d}x \sim \exp[F(\varphi(\lambda),\lambda)] \left(\frac{-2\pi}{F_{uu}(\xi,\lambda)} \right)^{1/2}.$$

例 1 当 $\lambda \to +\infty$ 时,有

$$\int_0^{\infty} u^{\lambda} \exp\left(-\frac{u\lambda^2}{A\lambda + B\lambda^{1/2}}\right) \mathrm{d}u \sim A\left(\frac{e\lambda}{A\lambda + B\lambda^{1/2}}\right)^{-\lambda} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

解 因为 $u^{\lambda} \exp\left\{-\frac{u\lambda^2}{A\lambda + B\lambda^{1/2}}\right\} = \exp\left\{-\frac{u\lambda^2}{A\lambda + B\lambda^{1/2}} + \lambda \ln u\right\}$,

故取 $F(u,\lambda) = -\frac{u\lambda^2}{A\lambda + B\lambda^{1/2}} + \lambda \ln u$,则有

$$F_u(u,\lambda) = -\frac{\lambda^2}{A\lambda + B\lambda^{1/2}} + \frac{\lambda}{u};$$

$$u=\varphi(\lambda)=\frac{A\lambda+B\lambda^{1/2}}{\lambda}\to A=\xi\quad(\lambda\to+\infty);$$

$$F_{uu}(u,\lambda)=-\frac{\lambda}{u^2}<0;$$

$$F_{uu}(u,\lambda)\sim F_{uu}(A,\lambda)\to-\infty\quad(u\to\xi,\lambda\to+\infty).$$

于是由拓广了的拉普拉斯渐近公式得到，当$\lambda\to+\infty$时，

$$\int_0^\infty u^\lambda\exp\left(-\frac{u\lambda^2}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}\right)\mathrm{d}u\sim A\left(\frac{\mathrm{e}\lambda}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}\right)^{-\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

例2 求当$\lambda\to+\infty$时，积分

$$\int_0^\infty u^\lambda\frac{1}{1+u}\exp\left(\frac{-u\lambda^2}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}\right)\mathrm{d}u$$

的渐近值.

解 若取 $F(u,\lambda)=\frac{-u\lambda^2}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}+\lambda\ln u-\ln(1+u)$，则得

$$F_u(u,\lambda)=-\frac{\lambda^2}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}+\frac{\lambda(1+u)-u}{u(1+u)}.$$

存在 $u=\varphi(\lambda)$，使得 $F_u(\varphi(\lambda),\lambda)=0$，

$$u=\varphi(\lambda)=\frac{1-E-\lambda^{-1}+\sqrt{(1-E-\lambda^{-1})^2+4E}}{2E},$$

其中 $E=\frac{\lambda}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}$，于是当$\lambda\to\infty$时，$\varphi(\lambda)\to\xi=A$. 又

$$F_{uu}(u,\lambda)=\frac{-\lambda}{u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}<0\quad(\lambda\text{ 充分大时}),$$

$$F_{uu}(\xi,\lambda)=\frac{-\lambda}{\xi^2}+\frac{1}{(1+\xi)^2}\to-\infty\quad(\lambda\to+\infty),$$

且当$(u,\lambda)\to(\xi,+\infty)$时，$F_{uu}(u,\lambda)\sim F_{uu}(\xi,\lambda)$.

于是由拓广的拉普拉斯渐近积分公式得到：当$\lambda\to+\infty$时，有

$$\int_0^\infty u^\lambda\frac{1}{1+u}\exp\left\{\frac{-u\lambda^2}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}\right\}\mathrm{d}u\sim$$

$$(1+A)\frac{(\varphi(\lambda))^\lambda}{1+\varphi(\lambda)}\exp\left(\frac{-\lambda^2\varphi(\lambda)}{A\lambda+B\lambda^{1/2}}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{2\left(1+\frac{1}{A}\right)^2-1}}.$$

从上面例子可见，拓广了的拉普拉斯渐近方法与2.4节中的拉普拉斯方法主要差别是被积函数的极值位置 $u=\varphi(\lambda)$是一个动点.

4.3 具有两个参数的指数积分的福克斯渐近公式

考虑如下形式的积分

$$I(\lambda,u)=\int_0^b q(t)\exp\{-\lambda\varphi(t)+ucp(t)\}\mathrm{d}t$$

当$\lambda\to+\infty$, $u\to+\infty$时，积分的渐近值，其中$b\leqslant+\infty$，假设：

1° $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)>0$且$\varphi(t)\in C^3[0,b]$且在$(0,b]$上是不减的正函数；

2° $\psi(0)=0$且$\psi(t)\in C^2[0,b]$；

3° $q(t)\in L[0,b]$且$t=0$是$q(t)$的连续点，$q(0)\neq0$.

那么，当$\lambda\to+\infty$, $u\to+\infty$时有如下渐近关系：

(A)　若$u=o(\lambda^{1/2})$或$\psi'(0)=0$，则有

$$I(\lambda,u)\sim\frac{1}{2}q(0)\left(\frac{2\pi}{\lambda\varphi''(0)}\right)^{1/2}\quad(\lambda\to+\infty,u\to+\infty).$$

(B)　若$u\asymp\lambda^{1/2}$，则

$$I(\lambda,u)\sim\frac{1}{2}q(0)\left(\frac{2\pi}{\lambda\varphi''(0)}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{(\alpha\varphi'(0))^2u^2}{2\varphi''(0)\lambda}\right)\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\psi'(0)u}{(2\lambda\varphi''(0))^{1/2}}\right)\right]$$

$$(\lambda\to+\infty,u\to+\infty),$$

其中erf(·)为误差函数.

(C)　若$\lambda^{1/2}=o(u)$，且$\psi'(0)<0$，则

$$I(\lambda,u)\sim-\frac{q(0)}{u\psi'(0)}\quad(\lambda\to+\infty,u\to+\infty).$$

(D)　若$\lambda^{1/2}=o(u)$，且$\psi'(0)>0$，则

$$I(\lambda,u)\sim q(0)\left(\frac{2\pi\cdot}{\lambda\varphi''(0)}\right)^{1/2}\exp(-\lambda\varphi(\tau)+u\psi(\tau))$$

$$(\lambda\to+\infty,u\to+\infty),$$

其中τ是由方程$\lambda\varphi'(\tau)=u\psi'(\tau)$决定的.

例3　设$\Gamma(\alpha,x)=\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t}x^{\alpha-1}\mathrm{d}t$是不完全$\Gamma$函数的余函数，那么

1° 若$y=o(x^{1/2})$，则

$$\Gamma(x+y+1,x)\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-x}x^{x+y+\frac{1}{2}}\quad(x\to+\infty,|y|\to+\infty).$$

2°若$|y|\asymp x^{\frac{1}{2}}$，则

$$\Gamma(x+y+1,x)\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\frac{y}{2x}-x}x^{x+y+\frac{1}{2}}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{y}{(2x)^{1/2}}\right)\right]$$

$$(x\to+\infty,|y|\to+\infty).$$

3° 若$y>0$，且$x=o(y^2)$，则

$$\Gamma(x+y+1,x)\sim\left(\frac{x+y}{\mathrm{e}}\right)^{x+y}(2\pi x)^{1/2}\quad(x\to+\infty,y\to+\infty).$$

4° 若$y<0$，且$x=o(y^2)$，则

$$\Gamma(x+y+1,x)\sim-\frac{1}{y}x^{x+y+1}\mathrm{e}^{-x}\quad(x\to+\infty,y\to+\infty).$$

解　因为$\Gamma(\alpha+1,x)=\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\alpha}\mathrm{d}u$. 令$u=x(t+1)$, $\alpha=x+y$，得到

$$\Gamma(x+y+1,x)=e^{-x}x^{x+y+1}\int_0^{\infty}\exp[-x(t-\ln(1+t))+y\ln(1+t)]dt.$$

于是取 $\varphi(t)=t-\ln(1+t)$，$\psi(t)=\ln(1+t)$，$\lambda=x$ 和 $u=y$，应用福克斯渐近公式便得到所要的渐近关系.

4.4　一类较一般的指数积分的拉普拉斯方法

考虑如下形式的指数积分

$$I(x)=\int_a^b\exp\{-x\varphi(t)+x^{\alpha}\psi(t)\}q(t)dt$$

在 $x\to+\infty$ 时的渐近公式，其中 α 是常数.

在这类积分中若取 $\lambda=x_1$，$u=x^{\alpha}$，在一定条件下自然可应用 4.3 节中的福克斯渐近公式，这里讨论怎样应用拉普拉斯方法推导它的渐近关系.

设 $t=a$ 是 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 内达到最小值的点，考虑当 $\psi(t)$ 在 $t=a$ 时具有怎样的条件才能将 $x^{\alpha}\psi(t)$ 项略去，而使得当 $x\to+\infty$ 时有

$$I(x)\sim\int_a^b\exp\{-x\varphi(t)\}q(t)dt.$$

事实上，若假设满足如下条件：

1° $\varphi'(t)$ 和 $q(t)$ 在 a 点的某个邻域内可能除去 a 点外连续；

2° 当 $t\to a^+$ 时，$\varphi(t)-\varphi(a)\sim P(t-a)^{\mu}$；$q(t)\sim Q(t-a)^{\lambda-1}$，其中 P,Q,u 和 λ 是常数且 $p>0$，$u>0$ 和 $\mathrm{Re}\lambda>0$；

3° 当 $t\to a^+$ 时，$\psi(t)\sim R(t-a)^{v}$，其中 R,v 是常数，且 $R\neq0$，$v\geqslant0$ 且 $v>u\alpha$（如果 $R>0$ 则要求 $\alpha<1$），

则当 $x\to+\infty$ 时，有

$$I(x)=\int_a^b q(t)\exp\{-x\varphi(t)+x^{\alpha}\psi(t)\}dt\sim\int_a^b q(t)\exp\{-x\varphi(t)\}dt.$$

于是应用 2.4 节的拉普拉斯渐近公式得到，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$I(x)\sim\frac{Q}{u}\Gamma\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{e^{-x\varphi(a)}}{(Px)^{\lambda/\mu}}.$$

这个公式表明，当 $\psi(t)$ 在 $t=a$ 适合上述条件 3° 时，确定积分 $I(x)$ 的渐近值可将 $x^{\alpha}\psi(t)$ 项略去，然后应用推广了的拉普拉斯渐近公式.

现在假设当 $t\to a^+$ 时，有 $\psi(t)\sim R(t-a)^{v}$，但 $v\leqslant u\alpha$，此时 $x^{\alpha}\psi(t)$ 项已不能作为摄动而略去. 若 $v<u\alpha$，则 $\alpha>0$，于是将 x^{α} 换作 x，则得

$$I(x^{1/2})=\int_a^b q(t)\exp\{-x^{1/\alpha}\varphi(t)+x\psi(t)\}dt.$$

于是在上述相应条件下可将 $-x^{1/\alpha}\varphi(t)$ 项略去，然后应用推广了的拉普拉斯渐近公式.

当 $v=u\alpha$ 时，上述方法都是不适用的，因此必须寻求新的渐近公式，更一般地，考虑积分

$$\Im(x)=\int_0^b \exp\{-x\varphi(t)+x^{\frac{\mu}{\alpha}}\gamma(t)+s(x,t)\}q(x,t)\mathrm{d}t,$$

其中 $b<+\infty$,且

1° 在区间$(0,b]$内 $\varphi'(t)$和 $\gamma(t)$是连续的,且 $\varphi'(t)>0$;

2° 当$t\to 0^+$时,$\varphi(t)-\varphi(0)=pt+O(t^{\mu_1})$;

$$\varphi'(t)=u p t^{u-1}+O(t^{u_1-1});\quad \gamma(t)=Rt^{v}+O(t^{v_1}),$$

其中 $p>0,u_1>u>\gamma\geqslant 0$,且 $v_1>v$;

3° 对充分大的 x,函数 $s(x,t)$和 $q(x,t)$在$(0,b]$内都连续且$|s(x,t)|\leqslant Sx^{\gamma}t^{\sigma}$;$|q(x,t)-Qt^{\lambda-1}|\leqslant Q_1x^{\beta}t^{\lambda_1-1}$,其中 S,Q_2,Q_1 和 $\gamma,\sigma,\lambda,\beta$ 及λ_1 都是与 x,t 无关的常数且$\sigma\geqslant 0;\lambda>0;\lambda_1>0;\gamma<\min(1,\frac{\sigma}{u});\beta<\frac{\lambda_1-\lambda}{u}$(注意这里并没有要求 γ、β 或 $\lambda_1-\lambda$ 为正数),

则当$x\to+\infty$时,有渐近表示式

$$\Im(x)=\frac{Q}{u}F_i(\frac{v}{u},\frac{\lambda}{u};\frac{R}{p^{v/\lambda}})\frac{\mathrm{e}^{-x\varphi(0)}}{(px)^{\lambda/u}}\{1+O(1/x^{\omega/u})\},$$

其中 $\tilde{\omega}=\min(u_1-u;\sigma-u\gamma,\lambda_1-\lambda-u\beta,v_1-v)$,而 $F_i(\xi,\eta;y)$是华生(Faxén)积分:

$$F_i(\xi,\eta;y)=\int_0^{\infty}\exp(-\tau+y\tau^{\xi})\tau^{\eta-1}\mathrm{d}\tau\quad(0\leqslant\mathrm{Re}\xi<1,\mathrm{Re}\eta>0).$$

参数值 $\xi=\eta=\frac{1}{2}$和 $\xi=\eta=\frac{1}{3}$的华生积分是最常见的,关于它们有如下关系式:

$$F_i(\frac{1}{2},\frac{1}{2};y)=\sqrt{\pi}\exp(y^2/4)(1+\mathrm{erf}(\frac{1}{2}y));$$

$$F_i(\frac{1}{2},\frac{1}{2};y)-F_i(\frac{1}{2},\frac{1}{2};-y)=2\sqrt{\pi}\exp(y^2/4);$$

$$F_i(\frac{1}{3},\frac{1}{3};y)=3^{2/3}\pi H_i(3^{-\frac{1}{3}}y);$$

$$\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}F_i(\frac{1}{3},\frac{1}{3};y\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}})+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}F_i(\frac{1}{3},\frac{1}{3};y\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{3}})$$
$$=3^{2/3}2\pi Ai(-3^{-1/3}y).$$

其中,$H_i(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\frac{1}{3}t^3+xt)\mathrm{d}t$ 称为斯哥尔积分,而 $A_i(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\frac{1}{3}t^3+xt)\mathrm{d}t$ 称为艾里(Airy)积分.

4.5　具有梅林变换的核函数积分的渐近展开

考虑积分$\int_0^{+\infty}g(x\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau$ 在$x\to+\infty$时的渐近展开.其中核函数 $g(t)$具有用下式定义的梅林(Mellin)变换

$$G(\alpha)=\int_0^{\infty}g(\tau)\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau.$$

例如,取 $g(t)=\mathrm{e}^{-t}$,则

$$G(\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2}\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau=\Gamma(\alpha)(\alpha>0).$$

又若取 $g(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$,则

$$G(\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2}\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

因而这类积分是拉普拉斯积分的推广.

在2.2节中沃森引理断定,从渐近关系

$$q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_s t^{\frac{s+\lambda-\mu}{\mu}}\quad(t\to 0^+),$$

通过逐项积分可导出:当$x\to+\infty$时,有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}q(t)\mathrm{d}t\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_s}{\lambda^{\frac{s+\lambda}{\mu}}},$$

其中 $\mathrm{Re}\lambda>0,\mu>0$ 且上式左端的积分收敛,要问对于具有梅林变换的核函数积分这个诱导关系是否成立?回答是肯定的.

设
$$q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}a_s t^{\frac{s+\lambda-\mu}{\mu}}\qquad(t\to 0^+),$$

则当$x\to+\infty$时,有$\int_0^{+\infty}g(xt)q(t)\mathrm{d}t\sim\sum_{s=0}^{\infty}G\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}}$,其中 $\mathrm{Re}\lambda>0,\mu>0$ 且左端的积分收敛.例如,当$x\to+\infty$时,有

$$\int_0^{+\infty}\exp(-x^2t^2)q(t)\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2\mu}\right)\frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}},$$

$$\int_0^{+\infty}Ai(xt)q(t)\mathrm{d}t\sim\sum_{s=0}^{\infty}3^{-\frac{s+\lambda+2\mu}{3\mu}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda+2\mu}{3\mu}\right)}\frac{a_s}{x^{\frac{s+\lambda}{\mu}}},$$

其中 $\mathrm{Re}\lambda>0,\mu>0$,而 $q(t)$保证左端积分收敛.特别当 $q(t)$在 $t=0$ 时可展开为处处收敛的泰勒级数:

$$q(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{(s)}(0)}{s!}t^s(0<t<\infty),$$

则

$$\int_0^\infty g(xt)q(t)\mathrm{d}t\sim\sum_{s=0}^{\infty}G(s+1)\frac{q^{(s)}(0)}{s!}\left(\frac{1}{x}\right)^{s+1}\quad(x\to+\infty),$$

例如取 $q(t)=\mathrm{e}^t,g(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$,则

$$\int_0^\infty\exp\{-x^2t^2+t\}\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{1}{s!}\left(\frac{1}{x}\right)^{s+1}\quad(x\to+\infty).$$

如果 $g(t)$的拉普拉斯变换 $\Phi(v)=\int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-vt}\mathrm{d}t$,且有收敛横坐标 $v_c\leqslant 0$,则

$\Phi(v)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}v^sG(s+1)$. 由此可见 $G(s+1)=(-1)^s\Phi^{(s)}(0^+)(s=0,1,\cdots)$. 于是当 $q(t)$在 $t=0$ 可展开为处处收敛的泰勒级数时,则当 $x\to+\infty$时,有

$$\int_0^{+\infty}g(xt)q(t)\mathrm{d}(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\Phi^{(s)}(0^+)q^{(s)}(0)(\frac{1}{x})^{s+1}.$$

例如取 $g(t)=J_0(t)$为 0 阶贝塞尔函数,它的拉普拉斯变换为

$$\Phi(v)=\int_0^{\infty}J_0(x)\mathrm{e}^{-vx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}v^{2s},$$

则

$$\Phi^{(s)}(0^+)=\begin{cases}(-1)^k[(2k-1)!!]^2, & s=2k,\\ 0, & s=2k+1(k=0,1,\cdots),\end{cases}$$

于是当$x\to+\infty$时,有

$$\int_0^{+\infty}J_0(xt)q(t)\mathrm{d}t\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}q^{(2k)}(0)(\frac{1}{x})^{2k+1},$$

其中 $q(t)$是确保积分存在的函数.

4.6 布列斯丁展开法

考虑积分

$$I(\alpha,x)=\int_0^l\mathrm{e}^{-xp(\alpha,t)}q(\alpha,t)t^{\lambda-1}\mathrm{d}t.$$

对固定 $\alpha\in[0,l]$在$x\to+\infty$时的渐近展开,其中 $\lambda>0,0<l\leqslant+\infty$.

假设 $p_{tt}(\alpha,t)$和 $q(\alpha,t)$是 α,t 的连续函数,对给定 α 函数$p(\alpha,t)$在$[0,l)$中的最小值在 $t=\alpha$ 点达到,且设 $p_t(\alpha,\alpha)=0$ 而 $p_{tt}(\alpha,\alpha)\neq0$, $q(\alpha,\alpha)\neq0$. 利用 2.4 节的拉普拉斯渐近公式得到:当$x\to+\infty$时,有

$$I(\alpha,x)\sim\begin{cases}\mathrm{e}^{-xp(\alpha,\alpha)}q(\alpha,\alpha)\alpha^{\lambda-1}\{\frac{x}{2\pi}p_{tt}(\alpha,\alpha)\}^{-1/2}, & \alpha\neq0;\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-xp(0,0)}q(0,0)\Gamma(\frac{1}{2}\lambda)\{\frac{x}{2}p_{tt}(0,0)\}^{-1/2}, & \alpha=0.\end{cases}$$

可见 $I(\alpha,x)$的渐近值,不论 $\lambda=1$ 与否,当$\alpha\to0^+$时并不能导出在 $\alpha=0$ 的渐近值. 这个不连续性说明对于任意小的 α 值,上述渐近关系对 α 并非一致的.

布列斯丁(Bleistein)提出一种关于 α 一致的渐近展开方法,为此利用如下关系,在积分 $I(\alpha,x)$中引入新变元 w:

$$p(\alpha,t)=\frac{1}{2}w^2-a(\alpha)w+b(\alpha),$$

并选取 $a(\alpha),b(\alpha)$使得 $t=0$ 对应于 $w=0$,而平稳点 $t=\alpha$ 对应于$w=a(\alpha)$,于是

$$b(\alpha)=p(\alpha,0),a(\alpha)=\{2p(\alpha,0)-2p(\alpha,\alpha)\}^{1/2},$$

即

$$w(t)=\begin{cases}(2p(\alpha,0)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}-(2p(\alpha,t)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}, & 0\leqslant t\leqslant\alpha;\\ (2p(\alpha,0)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}+(2p(\alpha,t)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}, & \alpha<t<l.\end{cases}$$

在这个变换下 t 和 w 之间是一一对应的，且因

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(2p(\alpha,t)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}}\dfrac{\partial p(\alpha,t)}{\partial t}, & 0<t\leqslant\alpha;\\ +\dfrac{1}{(2p(\alpha,t)-2p(\alpha,\alpha))^{1/2}}\dfrac{\partial p(\alpha,t)}{\partial t}, & \alpha<t<l\end{cases}$$

在 $t=\alpha$ 导数是连续的，故变换在 $t=\alpha$ 无奇异性.

若记 $w(l)=L$，在引入新变元后积分 $I(\alpha,x)$ 有如下形式：

$$I(\alpha,x)=\mathrm{e}^{x\varphi(\alpha,0)}\int_0^L\exp\left[-x\left(\frac{1}{2}w^2-aw\right)\right]f(\alpha,w)w^{\lambda-1}\mathrm{d}w,$$

其中，$f(\alpha,w)=q(\alpha,t)\left(\frac{t}{w}\right)^{\lambda-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w}$，而 L 是 α 的函数.

在 $w=a$ 点将 $f(\alpha,w)$ 展开为泰勒级数：

$$f(\alpha,w)=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(\alpha)(w-a)^s,$$

其中系数 $\varphi_s(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 是连续的.

在积分 $I(\alpha,x)$ 的表示式中将 L 换作 ∞，然后对 $f(\alpha,w)$ 的级数逐项积分，便可得关于 α 是一致成立的渐近展开：

$$I(\alpha,x)\sim\frac{\mathrm{e}^{-x\varphi(\alpha,0)}}{x^{\lambda/2}}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(\alpha)\frac{F_s(a\sqrt{x})}{x^{s/2}}\quad(x\to+\infty),$$

其中

$$F_s(y)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2+y\tau\right)(\tau-y)^s\tau^{\lambda-1}\mathrm{d}\tau.$$

当然上述渐近级数是理解为关于一个适当的渐近序列的渐近展开.

例 4　寻求积分

$$I(\alpha,t)=\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{x(\cos\theta+\theta\sin\alpha)}\mathrm{d}\theta,$$

当 $x\to+\infty$ 时，关于 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 一致成立的渐近展开.

解　取 $p(\alpha,\theta)=-\cos\theta-\theta\sin\alpha$，$q(\alpha,\theta)=1$ 和 $\lambda=1$，于是

$$\frac{\partial p(\alpha,\theta)}{\partial\theta}=\sin\theta-\sin\alpha.$$

可见在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 中 $p(\alpha,\theta)$ 在 $\theta=\alpha$ 点达到最小值. 令

$$\cos\theta+\theta\sin\alpha=1+aw-\frac{1}{2}w^2,$$

其中，$a=\sqrt{2}(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-1)^{1/2}$，因此

$$w=\begin{cases}a-\sqrt{2}(\cos\alpha+(\alpha-\theta)\sin\alpha-\cos\theta)^{1/2}, & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha;\\ a+\sqrt{2}(\cos\alpha+(\alpha-\theta)\sin\alpha-\cos\theta)^{1/2}, & \alpha\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

于是对新变元 w 有

$$I(\alpha,x)=\mathrm{e}^{x}\int_0^L\exp\{-x(\frac{1}{2}w^2-\alpha w)\}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w,$$

其中 $L=\alpha+\sqrt{2}(\cos\alpha+(\alpha-\frac{1}{2}\pi)\sin\alpha)^{1/2}$，而

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}w}=\frac{w-\alpha}{\sin\theta-\sin\alpha}=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(\alpha)(w-\alpha)^s.$$

这里系数 $\varphi_s(\alpha)$ 通过计算可得，比如有

$$\varphi_0(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}};\quad \varphi_1(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{3\cos^2\alpha};\quad \varphi_2(\alpha)=\frac{5-2\cos^2\alpha}{24(\cos\alpha)^{7/2}}.$$

记 $X_s(\alpha,x)=\Gamma(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2})+(-1)^s r(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2},x(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-1))$，其中 $r(u,x)$ 是不完全的 Γ-函数：

$$r(u,x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}t^{u-1}\mathrm{d}t(\mathrm{Re}\,u>0).$$

利用布列斯丁展开法，对任意正整数 n，当 $x\to+\infty$ 时有渐近表示式：

$$I(\alpha,x)=\frac{\mathrm{e}^{x(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)}}{(2x)^{1/2}}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\varphi_s(\alpha)X_s(\alpha,x)(\frac{2}{x})^{s/2}+O(\frac{1}{x^{n/2}})\right\},$$

其中 $O(\frac{1}{x^{n/2}})$ 当 $x\to+\infty$ 时，在区间 $[0,\alpha_0]$（$\alpha_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ 中任意数）上关于 α 一致成立. 可见，当 $x\to+\infty$ 时，积分 $I(\alpha,x)$ 关于 α 在 $[0,\alpha_0]$ 上一致成立如下的渐近展开：

$$I(\alpha,x)\sim\frac{\alpha(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)}{(2x)^{1/2}}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(\alpha)x_s(\alpha,x)(\frac{2}{x})^{\frac{s}{2}}.$$

4.7 切斯特-弗里德曼-尤雪尔方法

考虑如下形式的围道积分

$$I(\alpha,x)=\int_{\Lambda}\mathrm{e}^{-xp(\alpha,t)}q(\alpha,t)\mathrm{d}t,$$

其中 $p(\alpha,t)$ 和 $q(\alpha,t)$ 是复变元 t 的解析函数且是参数 α 的连续函数. 又设 $p_t(\alpha,t)$ 有两个零点，其中一个是 $t=\hat{\alpha}$，并且至少有一个零点属于 Λ，为了得当 $x\to+\infty$ 时，积分 $I(\alpha,x)$ 在 $\hat{\alpha}$ 的一个邻域内关于 α 一致成立的渐近展开，类似于布列斯丁展开方法，切斯特-弗里德曼-尤雪尔（Chester-Friedman-Ursell）提出一种展开方法.

在积分 $I(\alpha,x)$ 中利用如下关系引入新变元 w

$$p(\alpha,t)=\frac{1}{3}w^3+a(\alpha)w^2+b(\alpha)w+c.$$

上式右端的平稳点是二次三项式 $w^2+2aw+b$ 的零点 $w_1(\alpha)$，$w_2(\alpha)$. 选取 $a(\alpha)$，$b(\alpha)$ 使得 $w_1(\alpha)$ 与 $w_2(\alpha)$ 分别对应于 $p_t(\alpha,t)$ 的零点. 而系数 c 随意指定，在此变换下，积分 $I(\alpha,x)$ 变成如下形式：

$$I(\alpha,x)=\mathrm{e}^{-x}\int_{\Omega}\exp\left\{-x\left(\frac{1}{3}w^3+aw^2+bw\right)\right\}f(\alpha,w)\mathrm{d}w,$$

其中 Ω 是路径 Λ 在 w 平面的像，而

$$f(\alpha,w)=q(\alpha,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w}=q(\alpha,t)\frac{w^2+2aw+b}{p_t(\alpha,t)}.$$

根据 $a=a(\alpha)$、$b=b(\alpha)$的选取，不论 $\alpha=\hat{\alpha}$与否，$f(\alpha,w)$在 $w_1(\alpha)$和 $w_2(\alpha)$点都是解析的，将 $f(\alpha,w)$在积分的新被积函数中的指数因式的最小处展开为泰勒级数，并逐项积分，则对充分大的 x，积分 $I(\alpha,x)$可用依赖路径 Ω 的艾里函数或斯哥尔函数的积分渐近表示.

5 级数和序列的渐近方法

5.1 欧拉-麦克劳林公式

为了给出数值积分、收敛缓慢的级数求和，以及级数和的渐近展开中一个十分有用的欧拉-麦克劳林(Maclaurin)公式，下面预先介绍伯努利多项式和伯努利数的性质.

由如下生成函数

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{s=0}^{\infty}B_s(x)\frac{t^s}{s!}\quad(|t|<2\pi)$$

确定的多项式 $B_s(x)(s=0,1,\cdots)$称为伯努利多项式，它们在 $x=0$ 的值称为伯努利数 $B_s=B_s(0)$. 前9个伯努利数是

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},$$

$$B_5=0,\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_7=0,\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_9=0.$$

事实上，奇下标的伯努利数中只有 $B_1\neq0$，其余都是零，而相应的伯努利多项式为

$$B_0(x)=1,B_1(x)=x-\frac{1}{2},B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},B_3(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1),$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\quad B_5(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{3}\right),$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}.$$

伯努利多项式有如下重要性质：

$$B_s(x)=\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}B_{s-j}x^j;\qquad\int_0^1B_s(x)\mathrm{d}x=0(s\geqslant1);$$

$$B_s^1(x)=sB_{s-1}(x);\quad B_s(1-x)=(-1)^sB_s(x);$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^{s} = \frac{1}{j+1}\{B_{s+1}(n+1) - B_{s+1}\}(s \geqslant 1);$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2s}} = (-1)^{s-1}\frac{(2\pi)^{2s}B_{2s}}{2(2s)!}(s \geqslant 1);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2s-1}}{e^{2\pi x}-1}dx = (-1)^{s-1}\frac{B_{2s}}{4s}\ (s \geqslant 1),$$

此外,当 $s \geqslant 1$ 时,$B_{2s+1}(x)$在$[0,1]$上只有 $0,\frac{1}{2},1$ 三个零点,而 $B_{2s}(x) - B_{2s}$在$[0,1]$上只有 0,1 两个零点且有

$$|B_{2s}(x)| \leqslant |B_{2s}| \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

第一形式的欧拉-麦克劳林公式　设 a,m 和 n 都是整数且 $a<n,m>0$,又设 $f^{(2m)}(x)$在区间(a,n)内是绝对可积的,则有

$$\sum_{j=a}^{n} f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{s=1}^{m-1}\frac{B_{2s}}{(2s)!}(f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(a)) + \int_0^n \frac{B_{2m} - B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}f^{(2m)}(x)dx,$$

其中$[x]$表示$(x-1,x]$内的整数,也即 x 的整数部分.

第二形式的欧拉-麦克劳林公式　设 $f(z)$满足如下条件:

1° $f(z)$在带域 $a \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant n$ 上连续,在其内部正则;

2° 当$a \leqslant x \leqslant n$ 时,$f(x)$是实的;

3° 当 $\mathrm{Im}\, z \to \infty$时,在 $a \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant n$ 内关于 Rez 一致成立 $f(z) = O(e^{2\pi(\mathrm{Im}z)})$;

4° 积分 $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\{f(a+iy)\}}{e^{2\pi y}-1}dy$ 收敛;

5° 在直线 $\mathrm{Re}z = n$ 上$f^{(2m)}(z)$是连续的,

则

$$\sum_{j=a}^{n} f(j) = \int_a^n f(z)dz + \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(n) - 2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\{f(a+iy)\}}{e^{2\pi y}-1}dy + \sum_{s=1}^{m}\frac{B_{2s}}{(2s)!}f^{(2s-1)}(n) + 2\frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\{f^{(m)}(n+i\sigma_n y)\}\frac{y^{2m}}{e^{2\pi y}-1}dy,$$

其中 σ_n 是$(0,1)$区间内的某个数;a,m,n 就是整数,且 $a<n,m>0$.

例 1　求和数 $s(n) = \sum_{s=1}^{n} j\ln j$ 关于 n 的渐近展开式.

解　取 $f(x) = x\ln x$,所以

$$f'(x) = \ln x + 1,\quad f^{(s)}(x) = (-1)^s\frac{(s-2)!}{x^{s-1}}\quad (s \geqslant 2).$$

由第一形式的欧拉-麦克劳林公式得

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \int_1^n x\ln x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}n\ln n + \frac{1}{12}\ln n + c - \\
&\quad \sum_{s=2}^{m-1}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)(2s-2)n^{2s-2}} - R_m(n) \\
&= \frac{1}{2}n^2\ln n - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n\ln n + \frac{1}{12}\ln n + c - \\
&\quad \sum_{s=2}^{m-1}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)(2s-2)n^{2s-2}} - R_m(n),
\end{aligned}
$$

其中 $m \geqslant 1$ 是整数，而

$$
c = \frac{1}{4} - \frac{1}{720} - \frac{1}{12}\int_1^{\infty}\frac{B_4(x-[x])}{x^3}\mathrm{d}x;
$$

$$
R_m(n) = \int_0^n \frac{B_{2m} - B_{2m}(x-[x])}{2m(2m-1)x^{2m-1}}\mathrm{d}x.
$$

利用伯努利多项式的性质导出：

$|B_{2m} - B_{2m}(x-[x])| \leqslant |B_{2m}|$，且 $B_{2m} - B_{2m}(x-[x])$ 与 B_{2m} 同号，因此

$$
|R_m(n)| \leqslant \frac{|B_{2m}|}{2m(2m-1)(2m-2)}\frac{1}{n^{2m-1}}\quad(m \geqslant 2).
$$

于是当 $n \to \infty$ 时，有 $R_m(n) = O(\frac{1}{n^{2m-2}})$，因而得到，当 $n \to +\infty$ 时有

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \frac{1}{2}n^2\ln n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\ln n + \frac{1}{2}\ln n + c - \\
&\quad \sum_{s=2}^{m-1}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)(2s-2)}\frac{1}{n^{2s-2}} + O(\frac{1}{n^{2m-2}}).
\end{aligned}
$$

其中常数 c 可由级数 $\sum_j j\ln j$ 的前 n 项直接求和并利用 $R_m(n)$ 的界得到. 例如，准确到八位小数时有 $c = 0.248\ 754\ 49$.

例 2　求和数 $s(n) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-k^2\alpha/n}$ 关于 n 的渐近展开式，其中 α 是正常数. 当 $n \to +\infty$ 时，有

$$
s(n) = (\frac{\pi n}{\alpha})^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1}{2}-m})\quad(m \geqslant 2).
$$

5.2　整函数的渐近性质

考虑用麦克劳林(Maclaurin)级数

$$
f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j
$$

定义的整函数在 $|z| \to +\infty$ 时的渐近性质. 为此，时常将此和表示作围道积分，然后应用第 3 和 4 章中的渐近方法处理.

例 3 考虑函数 $f(\rho,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x^j}{j!}\right)^{\rho}$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近性质，其中 $\rho\in(0,4]$ 中的常数.

解 对于任何正整数 n，利用留数定理推出

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{x^j}{j!}\right)^{\rho}=\frac{1}{2i}\int_{\Lambda}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}^{\rho}\operatorname{ctg}\pi t\,\mathrm{d}t,$$

其中 Λ 是图 5-1 所示的闭围道. 注意到

$$\frac{\operatorname{ctg}\pi t}{2i}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{-2\pi it}-1}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\pi it}-1},$$

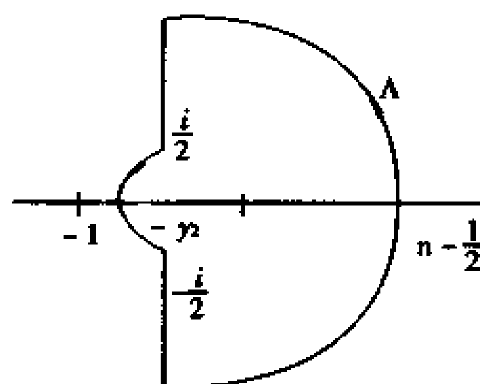


图 5-1

因而

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{x^j}{j!}\right)^{\rho}=\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}^{\rho}\mathrm{d}t-\int_{\Lambda 1}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{e^{-2\pi it}-1}+$$

$$\int_{\Lambda 2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{e^{2\pi it}-1},$$

其中 Λ_1,Λ_2 分别表示闭围道 Λ 的上半部分和下半部分.

由斯特林渐近公式可以证明若 $0<\rho<4$，沿大圆弧的积分，当 $n\to+\infty$ 时是趋于零的，又当 $|x|\geqslant 1$ 和 $\operatorname{Re}t\leqslant 0$ 时，有 $|x^{t\rho}|\leqslant 1$，因而得到

$$f(\rho,x)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}^{\rho}\mathrm{d}t+o(1)\qquad(x\geqslant 1).$$

对上面积分应用斯特林渐近公式和 2.4 节中例 9 的方法可以得到：当 $\rho\in(0,4]$ 时，有

$$f(\rho,x)\sim\frac{e^{\rho x}}{\rho^{1/2}(2\pi x)^{\frac{\rho-1}{2}}}\quad(x\to+\infty).$$

5.3 序列渐近的达布奇点法

设 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 是一个已知序列. 要求确定当 $n\to+\infty$（或 $n\to-\infty$）时，序列 $\{A_n\}$ 的渐近性质. 达布(Darboux)提出如下方法.

引入序列 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 的生成函数 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_nz^n$. 它在 z 平面具有有限个异于原点的孤立奇点，用 r 表示这种奇点到原点的最短距离. 又设存在已知函数 $G(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_nz^n$，它具有如下性质：

1° $G(z)$ 在 $0<|z|<r$ 内正则；

2° 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A_n-B_n)r^ne^{in\theta}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 k 次连续可微函数 $f(\theta)$，

于是

$$A_n - B_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

将上式中积分 k 次分部积分得

$$A_n - B_n = \frac{1}{2\pi r^n}\left(\frac{1}{in}\right)^k\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

因 $f^{(k)}(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,应用黎曼-勒贝格引理有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)e^{-in\theta}d\theta = o(1) \quad (n \to +\infty),$$

因而当 $n \to \infty$ 时有

$$A_n - B_n = o(r^{-n}n^{-k}), k \geqslant 0 \text{ 或 } A_n = B_n + o(r^{-n}n^{-k}), n \to \infty.$$

这样从已知序列 $\{B_n\}$ 的渐近性质,可导出序列 $\{A_n\}$ 的渐近性质.

例 4　寻求勒让德多项式 $P_n(z)$ 的渐近表达式.

解　勒让德多项式序列 $\{P_n(z)\}$ 的生成函数是

$$F(z,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\xi^n = (1 - 2z\xi + \xi^2)^{-1/2},$$

其中 $-1 < z < 1$. 令 $z = \cos\theta(0 < \theta < \pi)$,则 $1 - 2z\xi + \xi^2 = (\xi - e^{i\theta})(\xi - e^{-i\theta})$,可见 $F(z,\xi)$ 在 $|\xi| = 1$ 上有两个奇点:$\xi = e^{\pm i\theta}$,于是 $r = 1$,为将 F 按照 $(\xi - e^{\pm i\theta})$ 展开,选取分支,使得

$$\sqrt{\xi - e^{\pm i\theta}} = e^{\pm i\frac{\theta+\pi}{2}}\sqrt{1 - \xi e^{\pm i\theta}}.$$

于是当 $\xi = 1$ 时,有 $\sqrt{1 - 2z\xi + \xi^2} = 1$,利用二项式展开定理得

$$\begin{aligned} F(z,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\xi - e^{i\theta}}}[(\xi - e^{i\theta}) + (e^{i\theta} - e^{-i\theta})]^{-1/2} \\ &= \frac{e^{3\pi i/4}}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(\xi - e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n} \\ &= \frac{e^{-3\pi i/4}}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(\xi - e^{-i\theta})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{-i\theta} - e^{i\theta})^n}. \end{aligned}$$

对于任意确定的非负整数 k,取

$$G_k(z,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{s=0}^{k}\binom{\frac{1}{2}}{s}\left\{e^{3\pi i/4}\frac{(\xi - e^{i\theta})^{s-\frac{1}{2}}}{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^s} + e^{-3\pi i/4}\frac{(\xi - e^{-i\theta})}{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^s}\right\}.$$

容易验证函数 $F(z,\xi) - G_k(z,\xi)$ 在 $|\xi| = 1$ 上是具有 k 次连续可微的函数,令 $w = \frac{3}{4}\pi - \left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\theta + \pi)$,则 $G_k(z,\xi)$ 可展开为 ξ 的幂级数

$$\begin{aligned} G_k(z,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{s=1}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s-\frac{1}{2}}{n}\left\{\frac{e^{i[w-(\theta+\pi)n]}}{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^s} + \frac{e^{-i[w-(\theta+\pi)n]}}{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^s}\right\}\xi^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(k)}(z)\xi^n, \end{aligned}$$

其中

$$p_n^{(k)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{s=0}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{s}\binom{s-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{(2\sin\theta)^s}\Big\{\exp[i(\frac{\pi}{4}+(s-n-\frac{1}{2})\theta-(n-\frac{1}{2}s)\pi)]+\exp[-i(\frac{\pi}{4}+(s-n-\frac{1}{2})\theta-(n-\frac{1}{2}s)\pi)]\Big\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\sin\theta}}\sum_{s=0}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{s}\binom{s-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n}{(2\sin\theta)^s}\cos(\frac{\pi}{4}(1+2s)+(s-n-\frac{1}{2})\theta).$$

于是应用达布奇点法得，当$n\to+\infty$时，有

$$P_n(z) = P_n^{(k)}(z)+o(n^{-k})$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\sum_{s=0}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{s}\binom{s-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n}{(2\sin\theta)^s}\cdot\cos[\frac{\pi}{4}(1+2s)+(s-n-\frac{1}{2})\theta]+o(n^{-k}),$$

且此渐近关系在$-1+\varepsilon\leqslant z\leqslant 1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$上一致成立．特别取$k=0$得到

$$P_n^{(\theta)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\sin\theta}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cos(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\sim(\frac{2}{\pi n\sin\theta})^{1/2}\cos(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})(n\to\infty)$$

或

$$P_r^{(0)}(z)=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\cos(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+o(n^{-3/2}).$$

于是当$n\to+\infty$时，勒让德多项式$P_n(z)$有如下渐近表达式：

$$P_n(z)=\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\cos(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+o(n^{-3/2}).$$

且此渐近关系在$-1+\varepsilon\leqslant z\leqslant 1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$上一致成立．

5.4 哈尔方法

设$f(t)$是已知函数$F(x)$的拉普拉斯逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{tx}F(x)dx\quad(c>0).$$

要求确定当$t\to+\infty$时，$f(t)$的渐近性质．

类似于达布方法，哈尔(Haar)提出如下方法．设存在一个函数$g(t)$，它是已知函数$G(x)$的拉普拉斯逆变换

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{tx}G(x)dx,$$

且当$t\to+\infty$时，$g(t)$的渐近性质是已知的，于是有

$$f(t)-g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathrm{e}^{tx}(F(x)-G(x))\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ct}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itv}\{F(c+iv)-G(c+iv)\}\mathrm{d}v.$$

假设上面积分对一切充分大的 t 是一致收敛的,那么由黎曼-勒贝格引理得:当 $t\to+\infty$ 时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itv}\{F(c+iv)-G(c+iv)\}\mathrm{d}v=o(1).$$

于是,当 $t\to\infty$ 时,有 $f(t)=g(t)+o(\mathrm{e}^{ct})$.

如果还假设积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itv}\{F^{(k)}(c+iv)-G^{(k)}(c+iv)\}\mathrm{d}v\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

对一切充分大的 t 是一致收敛的,应用 m 次分部积分得

$$f(t)-g(t)=\frac{\mathrm{e}^{ct}}{2\pi}\left(\frac{1}{it}\right)^m\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itv}\{F^{(m)}(c+iv)-G^{(m)}(c+iv)\}\mathrm{d}v.$$

利用黎曼-勒贝格引理,当 $t\to+\infty$ 时,有

$$f(t)=g(t)+o(t^{-m}\mathrm{e}^{ct}).$$

由上式可见,当 $c\to0^+$ 时,即积分围道尽可能向右移时,所得的结果最好.

6　渐近展开的余项估计

6.1　余项估计的收敛因子

设 $f(z)$ 有如下渐近展开:

$$f(z)\sim a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\quad(z\to\infty,z\in S),$$

其中,$s=\{z\mid\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2\}$,特别地,$s$ 可能退化为正或负实轴上的区间,假设渐近级数中直到 $(n+1)$ 项为止,每项的绝对值是逐项减少的,而此项之后每项是逐项增加的.显然 $n=n(z)$ 是 $|z|$ 的不连续函数且与 $\arg z$ 无关,于是

$$R_n(z)=f(z)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s}{z^s}$$

称为渐近展开的余项,特别称 $R_{n(z)}(z)$ 为最优余项.

现在要求确定　$c(z)=\dfrac{R_{n(z)}(z)}{a_{n(z)}z^{-n(z)}}$,使得

$$f(z)=\sum_{s=0}^{n(z)-1}\frac{a_s}{z^s}+c(z)\frac{a_{n(z)}}{z^{n(z)}}.$$

当然如果当 $|z|$ 很大时,能估计出 $c(z)$ 的量度,那么就可以得到最优余项的估

计,在实用上,较有效的方法是作出 $c(z)$关于 z 或 $n(z)$降幂的渐近展开.有时对 $c(z)$只需计算到几位有效数字便可在相当程度上提高函数 $f(z)$的精度,故称 $c(z)$ 为收敛因子.

例 1 考察指数积分

$$E_1(z)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-zt}}{t}dt\quad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

渐近展开的余项.

解
$$E_1(z)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-zt}}{t}dt=e^{-z}\int_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{1+t}dt.$$

由于对任何非负整数 n 有

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^nt^n}{1+t},$$

于是 $E_1(z)=e^{-z}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}u_s(z)+R_n(z)\right\}$,其中

$$u_s(z)=(-1)^ss!\ z^{-s-1},\quad R_n(z)=(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{1+t}t^ndt,$$

因此

$$E_1(z)\sim e^{-z}\sum_{s=0}^{\infty}u_s(z)=e^{-z}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^ss!\frac{1}{z^{s+1}}.$$

在此渐近展开中,当$|z|$不是整数时,绝对值最小的项是 $u_{[|z|]}(z)$;而当$|z|$是整数时,则存在两个同样大小的项 $u_{|z|}(z)$和 $u_{|z|-1}(z)$.现在记 $\theta=\arg z$,寻求

$$R_n\{(n+\xi)e^{i\theta}\}=(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{\exp\{-(n+\xi)e^{i\theta}t\}t^n}{1+t}dt$$

对固定 ξ,θ,当$n\to+\infty$时的渐近值,上式右端积分中被积函数的鞍点由下式确定 $\frac{d}{dt}\{t\exp(-e^{i\theta}t)\}=0$,即 $t=e^{-i\theta}$,将积分路径旋转 $-\theta$ 角使得新路径过 $e^{-i\theta}$点.于是,令 $t=\tau e^{-i\theta}$,得到

$$R_n\{(n+\xi)e^{i\theta}\}=(-1)^ne^{-i(n+1)\theta}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(n+\xi)\tau}}{1+\tau e^{-i\theta}}\tau^nd\tau.$$

虽然此表示式是在$|\theta|<\frac{\pi}{2}$的假设下导出的,但再次将积分路径旋转并利用解析开拓原理,容易看到此表示式对于$|\theta|<\pi$ 也是正确的.因而利用拉普拉斯方法得到:当$n\to+\infty$时,对任何致密集中的 ξ 和 $\theta\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$($\delta>0$)一致成立

$$R_n\{(n+\xi)e^{i\theta}\}\sim(-1)^n(1-\alpha)e^{-n-\xi-i(n+1)\theta}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{1/2}\cdot\left\{1+\frac{\xi^2-2\xi+2\alpha\xi+\frac{1}{6}-2\alpha+2\alpha^2}{2n}+\cdots\right\},$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{1+e^{i\theta}}.$$

因而对于收敛因子 $C_n(z)=\frac{R_n(z)}{u_n(t)}$，只要利用 $n!$ 的斯特林渐近展开式，便可得：当 $n\to+\infty$ 时，关于有界的 ξ 和 $\theta\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 一致成立

$$C_n\{(n+\xi)e^{i\theta}\}\sim(1-\alpha)\{1+\frac{\alpha(\xi-1+\alpha)}{n}+\cdots\}.$$

对于指定的 z 值，要利用此结果时，取 $\theta=\arg z$，$n=[|z|]$ 和 $\xi=|z|-[|z|]$，于是 $(n+\xi)e^{i\theta}=z$，则　$R_n((n+\xi)e^{i\theta})=u_n((n+\xi)e^{i\theta})C_n((n+\xi)e^{i\theta})$. 比如在 $C_n((n+\xi)e^{i\theta})$ 的渐近展开中只取第一项，取近似等式：$C_n((n+\xi)e^{i\theta})\approx1-\alpha=\frac{1}{1+e^{-i\theta}}$.

特别当 $z>0$ 时，此时 $\theta=0$，于是 $1-\alpha=\frac{1}{2}$，有近似等式 $R_{[z]}(z)\approx\frac{1}{2}u_{[z]}(z)$.

为了说明收敛因子的作用，取 $z=5$，则

$$u_0(5)=0.2,\quad u_1(5)=-0.04,\quad u_2(5)=0.016,$$

$$u_3(5)=-0.0096,\quad u_4(5)=0.00768,\quad u_5(5)=-0.0768,$$

于是

$$u_0(5)+u_1(5)+u_2(5)+u_3(5)+u_4(5)=0.17408.$$

又

$$e^5E_1(5)=0.170422176\cdots.$$

所以
$$R_5(5)=e^5E_1(5)-\sum_{j=0}^{4}u_j(5)=-0.00366\cdots$$

若利用收敛因子法，注意到

$$C_5(5)\sim\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots).$$

如果只取前二项得到 $C_5(5)\approx0.475$，于是

$$R_5(5)\approx C_5(5)u_5(5)=-0.00174\cdots.$$

由此例可见，利用收敛因子法得到余项估计与真值之间只差 0.000 01，所以利用收敛因子法估计余项是可行的.

6.2　余项估计中的欧拉变换法

提高余项估计精度的另一种方法是将给定的渐近级数，变换为一个新级数，使得新级数开始的一些项以较快的速度减少，经过变换得到的新级数的最优余项，经常比原来级数的最优余项为小，有时甚至可以使新级数收敛. 经常采用的是欧拉变换法. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 是给定的序列，作

$$b_s=k^s[\Delta^s(a_jk^j)]_{j=0}\qquad(s=0,1,2,\cdots),$$

其中 k 是任意数，而 Δ 是向前差分运算：

$$\Delta v_j = v_{j+1} - v_j;\quad \Delta^2 v_j = \Delta v_{j+1} - \Delta v_j;\cdots;$$
$$\Delta^s v_j = \Delta^{s-1} v_{j+1} - \Delta^{s-1} v_j.$$

序列$\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$称为$\{a_s\}_0^{\infty}$ 的欧拉变换.

假设 $g(z)$是复变元 z 的解析函数,且

$$g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^{s+1}}(z \to \infty, z \in S),$$

其中 s 是给定的扇形域,则

$$g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s}{(z-k)^{s+1}}(z \to \infty, z \in S).$$

取 $k=1$ 和 $z=-1$,上述变换简化为

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s a_s \sim \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{\Delta^s a_0}{2^{s+1}}.$$

现在给定渐近展开式 $f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} u_s(z)$,而

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} u_s(z)$$

是最优余项,令 $a_s = (-1)^s u_{s+n}(z)(s=0,1,\cdots)$.利用欧拉变换,有

$$\sum_{s=n}^{\infty} u_s(z) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s a_s \sim \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{\Delta^s a_0}{2^{s+1}}.$$

因而在应用时适当选取非负整数 m,将和数 $\sum_{s=0}^{m}(-1)^s \frac{\Delta^s a_0}{2^{s+1}}$ 作为 $R_n(z)$的近似值.

有时为了提高估计精度,可对 $\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{\Delta^s a_0}{2^{s+1}}$ 再次应用欧拉变换.

例 2 已知渐近展开 $e^z E_1(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} u_s(z)$,其中 $u_s(z) = (-1)^s \frac{s!}{z^{s+1}}$,要求用欧拉变换法计算 $e^5 E_1(5)$的近似值.

解 由于

$$R_5(5) = e^5 E_1(5) - \sum_{j=1}^{4} u_j(5) = \sum_{j=5}^{\infty} u_j(5),$$

令

$$a_s = (-1)^s u_{s+5}(z),$$

取 $m=6$,计算到第 5 位小数,得到表 6-1.

于是

$$R_5(5) \approx \sum_{s=1}^{6}(-1)^s \frac{\Delta^s a_0}{2^{s+1}} = 10^{-5}(-384+38-27+12-9+7-6)$$
$$= -0.003\,69.$$

因而 $$e^5 E_1(5) = \sum_{j=0}^{4} u_j(5) + R_5(5) \approx 0.174\,08 - 0.003\,63 = 0.170\,39.$$

它与 $e^5E_1(5)=0.170\,422\,176\cdots$ 只差 0.000 03.

表 6-1

s	a_s	Δa_s	$\Delta^2 a_s$	$\Delta^3 a_s$	$\Delta^4 a_s$	$\Delta^5 a_s$	$\Delta^6 a_s$
0	-0.007 68	-0.001 54	-0.002 14	-0.001 92	-0.002 90	-0.004 34	-0.008 04
1	-0.009 22	-0.003 68	-0.004 06	-0.004 72	-0.007 14	-0.012 38	
2	-0.012 90	-0.007 74	-0.008 78	-0.011 86	-0.019 52		
3	-0.020 64	-0.016 52	-0.020 64	-0.031 38			
4	-0.037 16	-0.037 16	-0.052 02				
5	-0.074 32	-0.089 18					
6	-0.16 35						

参考文献

1 徐利治,陈文忠.渐近分析方法及应用.北京:国防工业出版社,1991.

2 徐利治,陈文忠.现代工程数学手册(Ⅱ)渐近分析篇.武汉:华中工学院出版社,1986.

3 Wong R. Asymptotic approximations of integrals. New York: Academic Press, 1989.

·近代数学卷·

第 18 篇

函数逼近方法

编　者　陈文忠
审校者　徐利治

目　录

引　言

函数逼近论有着悠久的历史，半个多世纪以来的不断发展，已使它成为一个既富有深刻理论内容，又有着巨大应用价值的数学分支.

本篇的主要目的是较全面地展示函数逼近方法中最基本最重要的内容，同时也尽可能提供领会和掌握函数逼近方法的独特技巧. 为此，本篇着重讲解函数逼近论中经典的理论和方法，并特别介绍十分有用的样条函数方法和非线性逼近方面的基础知识. 此外，本篇还提供一系列显式表示的逼近方法与逼近算子. 因为这些方法和算子具有计算上的可行性，希望对现代科技工作者是有益的.

1　插值方法

插值方法是数值分析很古老的一个分支. 它有着悠久的历史. 等距结点内插公式是由我国隋朝数学家刘焯(544～610)首先提出的；而不等距结点内插公式是由唐朝数学家张遂(683～727)提出的. 这比西欧学者发表相应结果早一千多年.

插值方法在数值分析的许多分支(例如，数值积分，数值微分，微分方程数值解，曲线或曲面拟合，近似计算函数值等)均有应用. 下面，仅以近似计算函数值为例来说明.

设已知某个函数关系 $y=f(x)$ 的列表函数值：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

及 $\bar{x}\neq x_i(i=0,1,\cdots,n)$，问应该如何估值 $\bar{y}=f(\bar{x})$. 对于函数关系 $y=f(x)$. 我们所知道的仅仅是上述的表列值. 表列值是间接求得的，例如是由实验(观测)得来的，或者是从级数或微分方程求得的.

为了估值 $\bar{y}$，可以使用插值方法. 插值方法的目的是寻求简单的连续函数 $\varphi(x)$，使它在 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处取给定值 $\varphi(x_i)=y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，而在别处希望它能近似地代表函数 $f(x)$. 因为 $f(x)$ 已是有解析表达式的简单函数，所以它在 $x=\bar{x}$ 处的值可以按表达式精确地计算出来. 这样，就可以将 $\varphi(\bar{x})$ 看成 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 的近似值了.

称给定点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值结点. 称函数 $\varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的关于结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的**插值函数**. 称 $y=f(x)$ 为被插函数.

严格地说，插值方法一词只用于 $\bar{x}$ 落在给定点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之间的情形，所以也称它为内插法. 如果 $\bar{x}$ 落在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之外，并且仍以插值函数 $\varphi(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的值近似地代替 $f(\bar{x})$，则一般称这种近似计算函数值的方法为外推法.

1. 拉格朗日插值公式

设 $y=f(x)$是实变量 x 的单值函数. 又设已知 $f(x)$在 $n+1$ 个不同的点 x_0, $x_1,\cdots,x_n$ 处的值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,亦即 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 1795 年拉格朗日证明了下面的定理.

定理 1　有唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$满足条件:$P_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$.

通常称条件 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$为插值条件;称 n 次多项式 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$为拉格朗日因子;称 n 次多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}y_il_i(x)$ 为拉格朗日插值多项式. 其中

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

拉格朗日插值公式 $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}y_il_i(x)$ 结构紧凑、思路清晰,所以至今在理论分析上仍有重要价值.

例 1　已知 $f(-1)=2,f(1)=1,f(2)=1$. 求 $f(x)$的拉格朗日插值多项式.

解　依 $l_i(x)$的表示有($x_0=1,x_1=1,x_2=2$)

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{1}{6}(x^2-3x+2),$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-\frac{1}{2}(x^2-x-2),$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x^2-1).$$

从而

$$P_2(x)=\frac{1}{6}[2(x^2-3x+2)-3(x^2-x-2)+2(x^2-1)]=\frac{1}{6}(x^2-3x+8).$$

2. 牛顿插值公式

拉格朗日插值公式的缺点是,当插值结点的个数有所变动时(例如,为了提高精度,有时需要增加插值结点的个数),拉格朗日因子 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$就要随之发生变化,从而整个公式的结构也要发生变化,这在计算实践中是不方便的. 为了克服它的上述缺点,我们引进牛顿型的插值公式.

显然,$n+1$ 个结点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次拉格朗日插值多项式也可以写成下列形式:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

下面来确定上式中的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$.

令 $P_{n-1}(x)$表示 n 个结点 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$上的$(n-1)$次拉格朗日插值多项式. 由于

$$P_n(x_i)=P_{n-1}(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n-1).$$

所以

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

此处 c 为常数,由条件 $P_n(x_n)=y_n$ 可以定出

$$c=\frac{y_n-P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

又因为 $P_{n-1}(x_n)=\sum_{i=0}^{n-1}y_il_i(x_n)$,故又有

$$\begin{aligned}c&=\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\\&\quad\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\\&=\sum_{i=0}^{n}y_i\Big\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\Big\}^{-1}.\end{aligned}$$

取记号

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=c=\sum_{i=0}^{n}y_i\Big\{\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}(x_i-x_l)\Big\}^{-1}.$$

得 $p_n(x)$与 $p_{n-1}(x)$之间的关系式:

$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

同理

$$p_{n-1}(x)=p_{n-2}(x)+f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}).$$

继续下去,最终得到

$$\begin{aligned}p_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+\cdots+\\f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).\end{aligned}$$

则称上述为牛顿型的插值公式.

牛顿插值公式的系数很不好记,有必要另寻方法确定它们.为此,引进差商的概念,并指出牛顿插值公式中各系数 $f(x_0,x_1,\cdots,x_i)(i=1,\cdots,n)$即是$f(x)$的 i 阶差商.设已知不同的自变量 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的函数值$f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$,称

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}(i\neq j)$$

为 $f(x)$的一阶差商(或均差).一阶差商的一阶差商

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_i,x_j)-f(x_j,x_k)}{x_i-x_k}(i\neq k)$$

叫做$f(x)$的二阶差商.一般说来,称$(n-1)$阶差商的一阶差商

$$f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)=\frac{f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_1)-f(x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_0)}{x_n-x_0}$$

为函数$f(x)$的 n 阶差商.

差商有以下性质.

1° 若 $F(x)=cf(x)$,c 为常数,则

$$F(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)=cf(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0).$$

2° 若 $F(x)=f(x)+g(x)$，则

$$F(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)=f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)+g(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0).$$

3° 若 $f(x)=x^m$，m 为自然数，则

$$f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)=\begin{cases}0, & n>m;\\ 1, & n=m;\\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-n \text{ 次的齐次函数}. & n<m.\end{cases}$$

4° 差商 $f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_0)$ 是 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的对称函数. 亦即当任意调换 x_0, $x_1,\cdots,x_n$ 的位置时，差商的值不变.

5° 差商可以表示成两行列式之商

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}.$$

例 2　已知列表函数：

x	2	3	5	6
y	5	2	3	4

求这个函数的插值多项式.

解　先造差商表 1-1：

表 1-1

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2	5			
		-3		
3	2		$\frac{7}{6}$	
		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$
5	3		$\frac{1}{6}$	
		1		
6	4			

然后将从上表顶部对角线上取得的值 $f(x_0)$，$f(x_0,x_1)$，$f(x_0,x_1,x_2)$，$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$ 代入公式

$$P_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+\cdots+ f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

便得到了要求的多项式：

$$P_3(x)=5-3(x-2)+\frac{7}{6}(x-2)(x-3)-\frac{1}{4}(x-2)(x-3)(x-5).$$

3. 插值余项

设 $P_n(x)$ 是在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处关于 $f(x)$ 的插值多项式. 希望知道，当 $x\neq x_k$

$(k=0,1,\cdots,n)$时,$f(x)$与$P_n(x)$的偏差.所谓偏差,意指此方法所固有的误差,而忽略了在计算$P_n(x)$时造成的舍入误差.通常,舍入误差与在逼近中的固有误差相比是小的.按习惯,称$E(f;x)=f(x)-P_n(x)$为插值误差(或插值余项).

定理 2 若$f(x)$在包含着插值结点$x_0,x_1,\cdots,x_n$的区间$[a,b]$上$n+1$次可微,则对任意$x\in[a,b]$,有与x有关的ξ存在$(a<\xi<b)$,使得

$$E(f,x)=f(x)-P_n(x)=\frac{\omega(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

其中$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

通常不知道式中的点ξ(一旦知道了ξ,就知道了精确的误差).尽管如此,还是可从式中得到有用的信息.如若$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上有上界M_{n+1},亦即

$$M_{n+1}=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|,$$

则由式子立刻得到

$$|E(f;x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|(a\leqslant x\leqslant b).$$

显然,牛顿插值公式与拉格朗日插值公式有相同的插值余项.

例 3 设$f(x)=\ln x$,并假设已给出值表:

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x$	-0.916 291	-0.693 147	-0.356 675	-0.223 144

试近似估值$\ln 0.6$,并指出精度.

解 利用4点3次拉格朗日插值公式.简单计算过程如下:

$$l_1(x)=\frac{1}{0.012}(x-0.5)(x-0.7)(x-0.8),$$

$$l_2(x)=\frac{1}{0.006}(x-0.4)(x-0.7)(x-0.8),$$

$$l_3(x)=-\frac{1}{0.006}(x-0.4)(x-0.5)(x-0.8),$$

$$l_4(x)=\frac{1}{0.012}(x-0.4)(x-0.5)(x-0.7),$$

$$l_1(0.6)=-\frac{1}{6},\quad l_2(0.6)=\frac{2}{3},$$

$$l_3(0.6)=\frac{2}{3},\quad l_4(0.6)=-\frac{1}{6}.$$

$$\ln 0.6\approx-\frac{1}{6}\ln 0.4+\frac{2}{3}\ln 0.5+\frac{2}{3}\ln 0.7-\frac{1}{6}\ln 0.8=-0.509\,975.$$

又因为$f^{(4)}(x)=-6/x^4$,所以

$$\max_{[0.4,0.8]}|f^{(4)}(x)|=6/(0.4)^4<234.4.$$

从而
$$|E(f;0,6)|<\frac{1}{24}\times0.0004\times234.4<0.00391.$$

综合上述,有

真值：　　$\ln 0.6 = -0.510\ 826$,

近似值：　　$P_3(0.6) = -0.509\ 975$,

真误差：　　$\ln 0.6 - P_3(0.6) = -0.000\ 851$,

估计上界：　　$|\ln(0.6) - P_3(0.6)| < 0.003\ 91$.

4. 有限差分及其性质

设已知函数 $f(x)$ 在一串等距结点 $x_0 + jh(j = 0,1,\cdots)$ 上的值 $f(x_0), f(x_0 + h),\cdots, f(x_0 + nh),\cdots$. 现在定义表达式 $\Delta f(x_0 + jh) = f(x_0 + (j+1)h) - f(x_0 + jh)$ 为 $f(x)$ 在点 $x_0 + jh$ 处的一阶有限差分，或简称一阶差分. 一阶差分的一阶差分叫二阶差分，记为

$$\Delta^2 f(x_0 + jh) = \Delta f(x_0 + (j+1)h) - \Delta f(x_0 + jh).$$

一般说来，n 阶差分定义为 $n-1$ 阶差分的一阶差分，例如

$$\Delta^n f(x_0 + jh) = \Delta^{n-1} f(x_0 + (j+1)h) - \Delta^{n-1} f(x_0 + jh).$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0),$$

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0 + h) - \Delta^2 f(x_0),$$

$$\cdots$$

按定义可知符号 Δ 满足指数律：$\Delta^p \Delta^q f(x_0) = \Delta^{p+q} f(x_0)$，其中 p, q 是正整数.

有限差分的理论是微分学的原始形式. 在历史上，微分学正是由有限差分的理论产生的，所以差分与微分有着极其相似的性质. 不妨列举如下.

1° 常数的差分等于零，亦即若 $f(x) \equiv c$，则

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = c - c = 0.$$

2° 常数因子可以提到差分号外，亦即若 k 为常数，则

$$\Delta kf(x) = kf(x+h) - kf(x) = k(f(x+h) - f(x)) = k\Delta f(x).$$

3° 如果当 $x = x_0 + jh(j = 0,1,\cdots,n)$ 时，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x),$$

其中 c_i 是一些常数，则用归纳法可以证明

$$\Delta^n f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta^n \varphi_i(x_0).$$

4° 如果当 $x = x_0 + jh(j = 0,1,\cdots,n)$ 时，$f(x) = \varphi(x)\psi(x)$，则

$$\Delta^n f(x_0) = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^v \varphi(x_0) \Delta^{n-v} \psi(x_0 + vh).$$

5° 设 $P_n(x)$ 为一 n 次多项式(最高次项的系数为 a_n)，则当 $k < n$ 时 $P_n(x)$ 在 x_0 处的 k 阶差分为 x_0 的 $n-k$ 次多项式；当 $k = n$ 时是常数，即 $\Delta^n P_n(x) = a_n h^n n!$；当 $k > n$ 时为零.

6° 设已知 $f(x_0 + jh)(j = 0,1,\cdots,n)$ 的值，用逐次代入法容易证明，计算差分有以下公式：

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0 + h) - \Delta f(x_0)$$
$$= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0),$$
$$\cdots$$
$$\Delta^n f(x_0) = \Delta^{n-1} f(x_0 + h) - \Delta^{n-1} f(x_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(x_0 + (n-i)h).$$

按相似的方法,对上述类型的方程用逐次消元法,可得到

$$f(x_0 + nh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i f(x_0).$$

实际计算差分时,常用形如表 1-2 的表格(差分表):

表 1-2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	…
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
		Δy_3				
x_4	y_4					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

下面的定理揭示了函数的差商、差分和导数之间的关系.

定理 3 设函数 $y = f(x)$ 在包含结点 $x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}$ 的区间 (a, b) 上为 k 次可微函数,则

$$f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}) = \frac{\Delta^k y_j}{k!\, h^k},$$
$$f(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$
$$\frac{\Delta^k y_j}{h^k} = f^{(k)}(\xi).$$

此处 $\min(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}) < \xi < \max(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k})$.

上面介绍的差分叫向前差分.鉴于计算实践的需要,再介绍一个向后差分和中心差分的概念.

设 $y_j = f(x_0 - jh)(j = 0, 1, \cdots, n)$ 为已知,则分别定义

$$\nabla f(x_0) = f(x_0) - f(x_0 - h),$$
$$\nabla^2 f(x_0) = \nabla f(x_0) - \nabla f(x_0 - h),$$
$$\cdots$$
$$\nabla^n f(x_0) = \nabla^{n-1} f(x_0) - \nabla^{n-1} f(x_0 - h)$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的向后 1 阶,2 阶,…,n 阶差分.

由向后差分定义,容易验证

$$\nabla f(x_k) = f(x_k) - f(x_{k-1}) = hf(x_k, x_{k-1}),$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f(x_k) &= \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}) \\
&= hf(x_k, x_{k-1}) - hf(x_{k-1}, x_{k-2}) \\
&= 2h^2 f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}), \\
&\cdots \\
\nabla^n f(x_k) &= n!\,h^n f(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-n}).
\end{aligned}
$$

在实际计算向后差分时，常采用向后差分表(表 1-3)：

表 1-3

x_{n-3}	f_{n-3}			
x_{n-2}	f_{n-2}	∇f_{n-2}		
			$\nabla^2 f_{n-1}$	
x_{n-1}	f_{n-1}	∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_n$
			$\nabla^2 f_n$	
x_n	f_n	∇f_n		

由方程 $\delta f(x_0) = f(x_0 + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2})$ 定义的差分叫作一阶中心差分. 类似地，称

$$
\delta^n f(x_0) = \delta^{n-1} f(x_0 + \frac{h}{2}) - \delta^{n-1} f(x_0 - \frac{h}{2})
$$

为 n 阶中心差分. 容易验证($f_{\frac{1}{2}} = f(x_0 + \frac{h}{2})$，余类推)

$$
\delta f_{\frac{1}{2}} = f_1 - f_0 = hf(x_0, x_1),
$$

$$
\delta f_{-\frac{1}{2}} = f_0 - f_{-1} = hf(x_0, x_{-1}),
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^2 f_1 &= \delta f_{1+\frac{1}{2}} - \delta f_{1-\frac{1}{2}} = (f_{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} - f_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}) - (f_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}) \\
&= (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = h(f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)) \\
&= 2h^2 f(x_0, x_1, x_2),
\end{aligned}
$$

$$
\delta^{2m+1} f_{k+\frac{1}{2}} = h^{2m+1}(2m+1)!\,f(x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m}, x_{k+m+1}),
$$

$$
\delta^{2m+1} f_{k-\frac{1}{2}} = h^{2m+1}(2m+1)!\,f(x_{k-m-1}, x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m}),
$$

$$
\delta^{2m} f_k = h^{2m}(2m)!\,f(x_{k-m}, \cdots, x_k, \cdots, x_{k+m}).
$$

可以利用表 1-4 计算中心差分：

表 1-4

x_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-\frac{3}{2}}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
x_2	f_2				

三种差分之间有下列关系：

1° $\nabla^k f_0 = \Delta^k f_{-k}$;

2° $\delta^{2k} f_0 = \Delta^{2k} f_{-k}$;

3° $\delta^{2k+1}f_{1/2} = \Delta^{2k+1}f_{-k}$.

5. 等距结点上的插值公式

对于给定的等距结点的数据,可以灵活地运用插值余项极小化原则,给出适应具体需要的插值公式.一般说来,在左端点 $x = x_0$ 附近进行插值宜用牛顿向前插值公式,在右端点 $x = x_n$ 附近插值宜用牛顿向后插值公式.如果在插值区间中间进行插值,宜用带中心差分的插值公式.

(1) 牛顿向前插值公式

设已知 $y_i = f(x_0 + ih)(i = 0,1,\cdots,N)$,需求于

$$x = x_0 + th, 0 \leqslant t \leqslant 1/2$$

处的$f(x)$近似值.按余项极小化原则,插值结点应取 $x_0, x_1, \cdots, x_n (n \leqslant N)$,注意差商与差分的关系,由牛顿插值公式,得到

$$f(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 + E(f,x),$$

其中

$$E(f;x) = \frac{h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_0 + nh.$$

通常称其为牛顿向前插值公式.

(2) 牛顿向后插值公式

设 $x = x_n + th$,由插值公式可得牛顿向后插值公式:

$$f(x) = f(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!}\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_n + E(f,x),$$

其中

$$E(f;x) = \frac{h^{n+1}t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

这里 ξ 在诸 x_i 与 x 之间.

此公式适用于计算函数在最后一个结点附近的近似值(内插或外插).

(3) 高斯(K.F.Gauss)插值公式

现在引进带中心差分的插值公式,在插值公式中用结点列

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_{-1} = x_0 - h, x_2 = x_0 + 2h, x_{-2} = x_0 - 2h, \cdots$$

替代结点列 $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \cdots$ 得到

$$f(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{\delta f_{1/2}}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\delta^2 f_0}{2!h^2} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\frac{\delta^3 f_{1/2}}{3!h^3} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2)\frac{\delta^4 f_0}{4!h^4} + \cdots.$$

若设 $x = x_0 + th, n = 2m$(或 $2m+1$),则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0 + th) \\
&= f_0 + t\delta f_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{t(t^2-1)}{3!}\delta^3 f_{1/2} + \\
&\quad \frac{t(t^2-1)(t^2-2)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots + \\
&\quad \frac{t(t^2-1)(t^2-2)\cdots(t^2-(m-1))(t^2-m)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0 \\
&\quad \left(\text{或} + \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{1/2}\right) + E(f;x).
\end{aligned}
$$

当 $n = 2m$ 时取至偶数阶差分 δ^{2m};当 $n = 2m+1$ 时取至奇数阶差分 δ^{2m+1}.

插值余项为:当 $n = 2m$ 时,有

$$E(f;x) = h^{2m+1}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(\xi).$$

当 $n = 2m+1$ 时,有

$$E(f;x) = h^{2m+2}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t-m-1)}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi).$$

在插值公式中用结点列

$$x_0, x_{-1} = x_0 - h, x_1 = x_0 + h, x_{-2} = x_0 - 2h, x_2 = x_0 + 2h, \cdots$$

替代结点列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 时,得到的是高斯向后公式:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0 + th) \\
&= f_0 + t\delta f_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{t(t^2-1)}{3!}\delta^3 f_{-1/2} + \\
&\quad \frac{t(t^2-1)(t+2)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots + \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-(m-1)^2)(t+m)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0 \\
&\quad \left(\text{或} + \frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{-1/2}\right) + E(f;x).
\end{aligned}
$$

$E(f;x)$ 是余项,当 $n = 2m$ 时,有

$$E(f;x) = h^{2m+1}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(\xi).$$

当 $n = 2m+1$ 时,有

$$E(f;x) = h^{2m+2}\frac{t(t^2-1)\cdots(t^2-m^2)(t+m+1)}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi).$$

6. 逐步线性插值法

设已知列表函数

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

并假定希望近似地估值 $f(\bar{x})(\bar{x} \neq x_i, i = 0,1,\cdots,n)$. 可以设想按下列作法实现:

1° 过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 作直线 $p_1(x)$,计算 $p_1(\bar{x})$;

2° 过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 作二次插值多项式 $p_2(x)$,计算 $p_2(\bar{x})$ 并比

较 $p_2(\bar{x})$ 与 $p_1(\bar{x})$;

3° 过点$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$作三次插值多项式$p_3(x)$,计算$p_3(\bar{x})$并比较$p_3(\bar{x})$与$p_2(\bar{x})$;

4° 继续下去,直至相邻的值$p_m(\bar{x})$与$p_{m-1}(\bar{x})$按给定的有效数字重合为止.

下面讨论如何从值$p_1(\bar{x}),p_2(\bar{x}),\cdots,p_{m-1}(\bar{x})$计算出值$p_m(\bar{x})$. 将用$p_{0,1,\cdots,n}(x)$表示$f(x)$的在点$x_0,x_1,\cdots,x_n$处的$n$次插值多项式.仔细说来,$p_{0,1}(x)$表示过两点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$的一次插值多项式;$p_{1,2}(x)$表示过两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$的一次插值多项式;$p_{1,3,5}(x)$表示过点$(x_1,y_1),(x_3,y_3),(x_5,y_5)$的二次插值多项式;余类推.依插值的唯一性,有$p_{1,2}(x)=p_{2,1}(x),p_{1,3,5}(x)=p_{3,5,1}(x)$等.

定理4 设 $n\geqslant 2$,则

$$p_{0,1,\cdots,n}(x)=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix}p_{0,1,\cdots,n-1}(x) & x_{n-1}-x\\ p_{0,1,\cdots,n-2,n}(x) & x_n-x\end{vmatrix}.$$

例4 由一个正弦函数表(x以弧度计,步长为0.1),求sin4.238的值.

解 依艾特肯(Aitken)插值法,计算可按表1-5进行:

表1-5

x	$\sin x$	1次	2次	3次	4次	5次	x_i-x
4.0	-0.756 802 50						-238
4.1	-0.818 277 11	-0.903 112 07					-138
4.2	-0.871 575 77	-0.893 382 69	-0.889 685 53				-38
4.3	-0.916 165 94	-0.883 230 83	-0.889 394 01	-0.889 574 75			62
4.4	-0.951 602 07	-0.872 708 24	-0.889 126 31	-0.889 579 28	-0.889 571 94		162
4.5	-0.977 530 12	-0.861 868 85	-0.888 883 16	-0.889 583 90	-0.889 571 91	-0.887 571 99	262

所求的值(指真值)是 -0.889 572 00.

7. 插值余项的佩亚诺(Peano)估计

令$[a,b]$是有限区间,$m\geqslant 1$是整数.若

$$f(x),f^{(1)}(x),\cdots,f^{(m-1)}(x)$$

在$[a,b]$上连续,而$f^{(m)}(x)$在$[a,b]$上分段连续且$|f^{(m)}(x)|\leqslant M_m$,则说函数$f(x)$属于函数类$W^m(M_m;a,b)$.

例5 令$f(x)=|x|,[a,b]=[-1,1]$.容易验证$f(x)\in W^1(1!;-1,1)$.

例6 令$[a,b]=[-1,1]$及$f(x)=\begin{cases}3x^2 & x\geqslant 0;\\ -3x^2 & x\leqslant 0,\end{cases}$

则

$$f^{(1)}(x)=\begin{cases}6x, & x\geqslant 0;\\ -6x, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f^{(2)}(x)=\begin{cases}6, & x>0;\\ -6, & x<0.\end{cases}$$

因此,$f(x)\in W^1(6;-1,1)$,同时$f(x)\in W^2(6;-1,1)$.

令 x 和 t 是实数，$k \geqslant 0$ 是整数，二个变量 x 和 t 的函数 $(x-t)_+^k$ 定义如下：

$$(x-t)_+^k = \begin{cases}(x-t)^k, & x \geqslant t;\\ 0, & x < t.\end{cases}$$

若 t 为固定常数，则 $(x-t)_+^k$ 就是 x 的截断多项式．对于 $k=0,1,2$ 截断多项式的图形如图1-1所示．

图1-1

当 x 固定时，$(x-t)_+^k$ 是 t 的函数，类似可绘其图．

用 $[a,b]$ 来记包含着点 $\alpha, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的最小区间．$E(f;\alpha)$ 表插值误差，亦即 $|E(f;\alpha)| = |f(\alpha) - P_n(\alpha)|$，其中 $P_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在结点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的 n 次插值多项式．

定理5　设 m 是正整数 $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$，则当 $f(x)$ 属于 $W^m(M_m;a,b)$ 时，存在一个仅依赖于 $m, \alpha, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $K_m(t)$．

$$\begin{aligned}K_m(t) &= \frac{1}{(m-1)!}E((x-t)_+^{m-1};\alpha)\\ &= \frac{1}{(m-1)!}\left((\alpha-t)_+^{m-1} - \sum_{k=0}^{n} l_k(\alpha)(x_k-t)_+^{m-1}\right),\end{aligned}$$

使得 $E(f;\alpha) = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t)\mathrm{d}t$．

定理6　设 m 是一正整数 $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$，$f(x) \in W^m(M_m;a,b)$，则 $|E(f;\alpha)| \leqslant e_m M_m$，其中

$$e_m = \int_a^b |K_m(t)|\,\mathrm{d}t.$$

定理7　设 m 是一正整数 $(1 \leqslant m \leqslant n+1)$，则有函数 $f_0(x) \in W^m(M_m;a,b)$ 使得 $|E(f_0;\alpha)| = e_m M_m$．

定理8　由 $|E(f;x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$

和 $|E(f;\alpha)| \leqslant e_m M_m$ 给出的插值误差的界是恒等的，换言之

$$\int_a^b |K_{m+1}(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}|(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\cdots(\alpha-x_n)|.$$

2　一致逼近

这一章介绍俄罗斯学者契贝谢夫(Чебышев)提出的最佳一致逼近的理论．

2.1 魏尔斯特拉斯第一定理

在实变数函数的数学分析中,居于最重要地位的函数类是连续函数类 $C[a,b]$ 与连续的周期函数类 $C_{2\pi}$. $C[a,b]$ 是定义在某一闭区间$[a,b]$上的一切连续实函数所成的集合;$C_{2\pi}$ 是定义在整个实轴$(-\infty,\infty)$上的一切具有2π周期的连续实函数的集合.

定理1(魏尔斯特拉斯(Weierstrass)第一定理) 设$f(x)\in[a,b]$,则对于任意给定的 $\epsilon>0$,都存在这样的多项式 $P(x)$,使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|<\epsilon.$$

注1 魏尔斯特拉斯的第一定理实际上正好解决了如何利用多项式作成的函数项级数表示连续函数的问题.因为任意取定一个单调下降于0的数列 δ_n,则对每个 δ_n 都可找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x)-f(x)|<\delta_n$.于是令

$$Q_1(x)=P_1(x),Q(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x),n>1,$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}Q(x)$ 的第 n 部分和恰好与 $P_n(x)$ 相合,因而该级数也就一致地收敛于 $f(x)$.

2.2 博雷尔存在定理

由定理1知:凡 $C[a,b]$ 类中的任何函数都可以用多项式近似地表示并具有预先任意指定的精确度.然而,这时近似多项式的次数却可能很高.因此自然要问,如果预先对近似多项式的次数加以限制,则近似多项式将能达到怎样的最高精度?为讨论这个问题,要引进一系列的重要概念.

以后总用 H_n 表示次数不高于 n 的那些实系数多项式的集合,即形如

$$P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

的多项式的集合.其中诸高次项的系数 c_n 与 c_{n-1} 等也可以是0,因此显然有 $H_0\subset H_1\subset H_2\subset\cdots$

设 $f(x)\in C[a,b]$, $P(x)\in H_n$,则数值 $\Delta(P)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-f(x)|$ 便称为 $P(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差;而偏差的下确界

$$E_n=E_n(f)=\inf_{P\in H_n}|\Delta(P)|$$

便叫 H_n 对给定函数 $f(x)$ 的最小偏差,又称为 H_n 中的多项式对 $f(x)$ 的最佳逼近.

自然人们会想到去问:H_n 中是否总存在这样的多项式$P(x)$使得$\Delta(P)=$最小偏差 E_n?往下讲到波雷尔的一个定理时,就知道问题的答案是肯定的,即最小偏差是能够达到的.

不难看出 $E_n\geqslant0$, $E_0\geqslant E_1\geqslant E_2\geqslant\cdots$ 又根据魏尔斯特拉斯第一定理,可知 $E_n\to0(n\to\infty)$.

定理2(博雷尔(E. Borel)定理) 对于任何$f(x) \in C[a,b]$,集合H_n中总存在这样的多项式$P(x)$,使得$\Delta(P) = E_n$.

为了简化,给$C[a,b]$中的每个函数规定范数,即若$f(x) \in C[a,b]$,则称$\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$为$f(x)$的范数.不难看出这种范数有与通常绝对值完全相似的性质.如,当且仅当$f(x) \equiv 0$时,才有$\|f\| = 0$;若$g(x)$为$C[a,b]$中任一函数,则$\|f\| \leqslant \|f-g\| + \|g\|$,及由移项可知$|\|f\| - \|g\|| \leqslant \|f-g\|$(范数不等式).

借助范数符号,博雷尔定理的另外叙述为:对于任何$f(x) \in C[a,b]$,集合H_n中总存在多项式

$$P_0(x) = C_0^* + C_1^* x + \cdots + C_n^* x^n,$$

使得

$$\|f(x) - C_0^* - C_1^* x - \cdots - C_n^* x^n\| = \inf_{P \in H_n} \|f(x) - C_0 - C_1 x - \cdots - C_n x^n\|.$$

在博雷尔定理中,所肯定存在的那个满足条件$\Delta(P) = E_n$的n次多项式$P(x)$,称为函数$f(x)$的最小偏差多项式或最佳逼近多项式.这种多项式究竟具有什么样的特征以及是否唯一存在等问题,应该说比魏尔斯特拉斯逼近定理或博雷尔的存在定理所要回答的问题更进了一步.然而却远在逼近定理发现之前30年,就已由契贝谢夫所全部解决了.契贝谢夫之所以未能去完成逼近定理的发现,主要是由于当时没有注意到考虑$E_n \to 0(n \to \infty)$的问题.同时在契贝谢夫当初看来,最佳逼近多项式的存在似乎是毫无疑问的(从而是无需证明的),因此直到他死了十年以后(1905年),才由博雷尔补充建立了上述的存在定理.

2.3 契贝谢夫定理

设给定一个函数$f(x) \in C[a,b]$,又设$P(x)$是$f(x)$在H_n类中的一个最佳逼近多项式,即

$$\|P(x) - f(x)\| = E_n.$$

如果$E_n = 0$,那么这表示$f(x)$是一个次数不高于n的多项式.除了这种显而易见的情况不予考虑之外,一般总是假定$E_n > 0$.

因为连续函数$|P(x) - f(x)|$在闭区间$[a,b]$上总能达到最大值,所以至少会有一点x_0使得

$$|P(x_0) - f(x_0)| = E_n.$$

把任何这样的点称为$P(x)$的偏离点——简称(e)点,并且根据下列情况

$$P(x_0) - f(x_0) = E_n \text{ 或 } P(x_0) - f(x_0) = -E_n$$

而分别称呼这种(e)点为$(+)$点或$(-)$点(亦可称为$P(x)$对$f(x)$的正偏离点或负偏离点).显然,$(+)$点和$(-)$点都是存在的.

定理3(契贝谢夫基本定理) H_n中的一个多项式$P(x)$成为$C[a,b]$中某给定函数$f(x)$的最佳逼近多项式之充分必要条件是:$|P(x) - f(x)|$在闭区间$[a,b]$的不少于$n+2$个点处达到其绝对极大值,而且这些点依次为正偏离点和负偏

离点.

基本定理中所说的 $n+2$ 个点组成的组通常称为契贝谢夫交错组. 定理的主要意思实际也就是说明交错组的存在乃是最佳逼近多项式的特征. 作为基本定理的一个推论,还很容易得出唯一性定理.

定理4　对于给定的 $f(x)\in C[a,b]$,集合 H_n 中只存在一个最佳逼近多项式.

2.4　契贝谢夫多项式

契贝谢夫多项式的发现是和考虑如下的问题分不开的:给定函数 $f(x)=x^n(-1\leqslant x\leqslant 1)$,问怎样以不高于 $n-1$ 次的多项式 $P_{n-1}(x)=-c_0-c_1x-\cdots-c_nx^{n-1}$ 去作最佳逼近?

根据契贝谢夫基本定理,如果 $P_{n-1}(x)$ 是 x^n 的最佳逼近多项式,那么偏差 $|x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0|$ 就得在区间 $[-1,1]$ 的某 $n+1$ 个点(所谓交错组)处依次改变符号并达到它的最大值. 显然,上述的偏差也可以看作是 n 次多项式

$$P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,c_n=1$$

与 $f(x)\equiv 0$ 的偏差. 因此原来所考虑的问题也可以称之为最小零偏差问题——亦即以 H_n 中最高次项系数为1的多项式去作0的最佳逼近的问题. 同时,对0的最佳逼近多项式 $P_n(x)$ 也可称之为 n 次的最小零偏差多项式.

一般地,形如 $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 的多项式所能给出的最小零偏差为

$$\|\tilde{T}_n\|=\frac{1}{2^{n-1}}\|\cos(n\arccos x)\|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

这里 $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^n}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n]$ 是 n 次契贝谢夫多项式.

再指出契贝谢夫多项式系统的一个重要性质,即在区间 $[-1,1]$ 上关于权函数

$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交性质:当 $m\neq n$ 时,$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{T}_m(x)\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0.$

令 $x=\cos\theta$,则 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\theta$,且 $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta$,因之上述积分转化为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2}\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta\mathrm{d}\theta=0\quad(m\neq n).$$

2.5　魏尔斯特拉斯第二定理

讨论了用代数多项式逼近连续函数的问题之后,自然就会想到,用三角多项式去逼近周期性连续函数的问题. 先来讨论实系数三角多项式所具有的某些性质.

多项式 $T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 中的系数 a_n 和 b_n 如果不全为0,

则称 $T(x)$ 为 n 阶的三角多项式.

命题 1　两个三角多项式的乘积仍然是一个三角多项式,而且它的阶等于原来两个多项式之阶的和.

命题 2　若三角多项式 $T(x)$ 具有偶性:$T(-x)=T(x)$,则它必可表示为

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx.$$

命题 3　凡具有奇性 $T(-x)=-T(x)$ 的三角多项式恒可表示为

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}b_n\sin kx.$$

三角多项式的零点. 对于任意一个具有实系数的 n 阶三角多项式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

而言,凡使 $T(x)$ 取零值的实数 x_0 便称为它的零点. 如果

$$T(x_0)=T'(x_0)=\cdots=T^{(r-1)}(x_0)=0 \quad 而 \quad T^{(r)}(x_0)\neq 0$$

那么就称 x_0 为 r 重零点. 下面所说的零点概指实数值的零点而言.

显然一个三角多项式也可以没有零点. 如 $\cos x\pm 2$ 就没有零点. 又由于三角多项式是以 2π 为周期的函数,因此如果当 x_0 是一个零点时,则一切形如 $x_0+2m\pi(m=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的数也都成为零点. 不过对这些带 2π 周期的零点,今后都不加以区别,而把它们称为是互相等价的.

在计算零点的个数时,虽然等价的零点是不计算的(实际、等价零点有无限多个),但零点的重数却可以计算在内,即 m 重零点可算作 m 个.

命题 4　凡不恒等于零的 n 阶三角多项式 $T(x)$ 的零点个数恒不能超过 $2n$.

利用三角多项式,可以任意近似地表示周期性的连续函数.

定理 5(魏尔斯特拉斯第二定理)　设 $f(x)\in C_{2\pi}$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在这样的三角多项式 $T(x)$,使得 $\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T(x)-f(x)|<\varepsilon$.

最后指出,第一定理和第二定理实际是一对互相等价的命题.

2.6　三角多项式的最佳逼近问题

利用三角多项式来逼近 $C_{2\pi}$ 中的函数时,同样有最佳逼近问题. 从问题的提法、理论的展开以及所达到的结论来看,可以说是和代数多项式的逼近理论完全相似的. 就若干重要定理(如博雷尔的存在定理,契贝谢夫的基本定理和唯一性定理)的论证方法来看,它们也是完全平行的.

以 H_n^* 来表示一切 n 阶三角多项式 $T(x)$ 作成的集合. 对于给定了的一个函数 $f(x)\in C_{2\pi}$,同样可以定义

$$\Delta(T)\equiv\|T(x)-f(x)\|=\max|T(x)-f(x)|,$$
$$E_n^*=E_n^*(f)=\inf_T\{\Delta(T)\},$$

而分别称 $\Delta(T)$ 与 E_n^* 为偏差与最小偏差. 同样,如果 $T^*(x)\in H_n^*$ 是一个达到最

小偏差的多项式

$$\Delta(T^*) = E_n^*,$$

那就称它为最小偏差多项式或最佳逼近多项式. 完全平行地有下述的博雷尔存在定理.

定理 6　对于每个 n,在 H_n^* 中都有这样的三角多项式 $T(x)$ 存在,使得 $\Delta(T) = E_n^*$.

定理 7　H_n^* 中的三角多项式 $T(x)$ 成为某给定函数 $f(x) \in C_{2\pi}$ 的最小偏差多项式的充要条件是,对函数差 $T(x) - f(x)$ 而言存在有 $2n+2$ 个点

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+2}(0 \leqslant x_k < 2\pi)$$

作成的交错组.

定理 8　对于所给函数 $f(x) \in C_{2\pi}$,在集合 H_n^* 中只存在一个最小偏差多项式.

特别是,有如下一条推论.

推论 1　若 $f(x)$ 是 $C_{2\pi}$ 中的一个偶函数,则它的最小偏差多项式 $T(x)$ 也必是偶函数 —— 偶性的三角多项式.

3　函数的结构性质与多项式逼近阶之间的联系

3.1　连续模数及其性质

"连续模数"是一种用来表示函数连续性状态的基本数量,在分析函数的结构性质与多项式逼近速度之间的关系时,它起着很重要的作用. 这种数量最早是在费尼(Vallé)、波辛(Poussun)等人的著作中被引入的.

今后用 $\langle a,b\rangle$ 来表示以 a,b 为端点的一般区间(可以是开的、闭的或半开半闭的区间,也可以是 $(-\infty,+\infty)$). 假设 $f(x)$ 是定义在 $\langle a,b\rangle$ 上的一个实函数,那么,可以把数量 $\omega(\delta) = \sup\limits_{|x-y|\leqslant\delta} |\,|f(x)-f(y)|\,|$ 叫做函数 $f(x)$ 的连续模数,其中 δ 是一个任意正数.

连续模数 $\omega(\delta)$ 实际是表明了当自变数的两个值相差不大于 δ 时,函数值之间究竟顶多能相差多少. 对于固定的 δ,ω 是函数振荡特性的度量. 下面列出有关连续模数的一系列简单性质.

1° 函数 $\omega(\delta)$ 是单调递增的,亦即当 $\delta_1 < \delta_2$ 时将有 $\omega(\delta_1) < \omega(\delta_2)$.

2° 函数 $f(x)$ 在 $\langle a,b\rangle$ 上一致连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$.

3° 若 n 是一个正整数,则 $\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)$.

4° 对于任意正数 λ 都有不等式 $\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta)$.

5° 设 $f(x) \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 $\langle a,b\rangle$ 上恒适合如下的利普希茨(Lipschitz)条件:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

其中正常数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 和 M 分别称为指数和系数.亦可把满足此种条件的所有函数作成的集合称为利普希茨函数类 $\mathrm{Lip}_M\alpha$. 这样,下列两个关系式

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_M\alpha, \omega(\delta) \leqslant M\delta^{\alpha}$$

便是完全等价的.

3.2 关于逼近速度的杰克逊定理

函数的结构性质(如像连续性、可微性、满足利普希茨条件等属性) 究竟对最小偏差 E_n(或 E_n^*) 趋于 0 的速度会发生怎样的影响呢?这是在逼近论发展到一定的历史阶段自然要提出的问题.关于这个问题的探讨,有若干基本结论是在杰克逊(D. Jackson)1911 年的博士论文中获得的.下面记述他所得到的一些主要结果.

定理 1 设 $f(x) \in \mathrm{Lip}_M\alpha$,并且具有周期 2π,则一定存在一绝对常数 K 使得:

$$E_n^* \leqslant \frac{KM}{n} \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 $E_n^* = E_n^*(f)$ 为 n 阶三角多项式对 $f(x)$ 的最佳逼近(或最小偏差).

定理 2(杰克逊基本定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$,则对于一切正整数 n 都成立着如下的估计式:

$$E_n^* \leqslant K\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 K 为绝对常数,$\omega\left(\frac{1}{n}\right)$ 表示 $f(x)$ 的连续模数.

推论 1 魏尔斯特拉斯的第二定理恒成立.

推论 2 若 $f(x) \in \mathrm{Lip}_M\alpha(0<\alpha<1)$,则 $E_n^* \leqslant KM\frac{1}{n^{\alpha}}$.

推论 3 若 $f(x) \in C_{2\pi}$,且存在着有界的微商 $f'(x)$,而 $|f'(x)|<M$,则 $E_n^* \leqslant KM\frac{1}{n}$.

3.3 伯恩斯坦不等式

在函数结构性质的研究中,起着极重要作用的一个强有力工具,是 1912 年创立的伯恩斯坦(Бернштейн) 不等式.下面即可看到,无论是从该不等式的重要性还是从简明性来看,都是值得高度重视的.

伯恩斯坦不等式 设 $T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 是一个 n 阶的三角多项式,则它的导数有估值式:

$$|T'(x)| \leqslant n \cdot \max|T(x)|.$$

这个命题可以改述为如下的等价形式:

若 $\max|T'(x)| = 1$，则 $\max|T(x)| \geqslant \frac{1}{n}$.

事实上，只要在原来的估值式的两边，除以常数 $K = \max|T'(x)|$，并将多项式 $\frac{1}{K}T(x)$ 仍记为 $T(x)$，便可看出另述是与原来叙述形式完全等价的(至于 $K > 0$ 这一事实，那是由 $T(x) \neq 0$ 所保证的).

需要指出，估值式中的系数 n 实际是最值可能的. 例如对 $T(x) = \sin nx$ 而言，就有

$$\max|T'(x)| = n \cdot \max|T(x)|.$$

伯恩斯坦第二不等式 设 $P(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式，那末下列估值对一切 $x(-1 < x < 1)$ 都成立：$|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|$.

事实上，令 $x = \cos\theta$，则应用第一不等式于 n 阶三角多项式 $T(\theta) = P(\cos\theta)$ 上，可得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P(\cos\theta)\right| = |\sin\theta \cdot P'(\cos\theta)| = |\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leqslant n \cdot \max|P(x)|.$$

因此第二不等式可作为第一不等式的推论而导出.

推论 4 设 $P(x)$ 是 x 的 n 次代数多项式，那末如下的估值式对开区间 (a,b) 内的一切 x 都成立：

$$|P'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)|.$$

3.4 伯恩斯坦定理和 Zygmund 定理

在 3.2 节中，已经得知函数的结构性质——如连续性、可微性等怎样影响着最佳逼近(或最小偏差)E_n^* 的递减速度. 在这一节中将讨论反向的问题，即怎样根据 E_n^* 的递减速度去作出关于函数结构特征的结论. 关于这一方面所得到的最重要结果是属于伯恩斯坦的.

从上述已经知道什么叫利普希茨函数类 $\mathrm{Lip}_M\alpha$，特别是，在系数 M 无关紧要的情形，可以用记号 $\mathrm{Lip}\alpha$ 来表示这种函数类. 此外，再引进这样一个函数类 W，它是由满足条件

$$\omega(\delta) \leqslant A\delta(1 + |\log\delta|)$$

的一切函数所组成的函数类，其中 A 与可变正数 δ 无关. 可以证明，若函数的定义范围限于有限区间，则有下面的包含关系

$$\mathrm{Lip}1 \subset W \subset \mathrm{Lip}\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

定理 3(伯恩斯坦定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$，并设 E_n^* 表示用 H_n^* 中的三角多项式逼近 $f(x)$ 所得的最小偏差. 又设当 $n = 1,2,3,\cdots$ 时，恒有 $E_n^* \leqslant \frac{k}{n^\alpha}(0 < \alpha \leqslant 1)$，那么当 $\alpha < 1$ 时可以断定 $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$；而当 $\alpha = 1$ 时，则可以断言 $f(x) \in W$.

定理 4　设 $f(x) \in C_{2\pi}$，又设 $E_n^* \leqslant \frac{k}{n^{p+\alpha}}(n = 1,2,\cdots)$，其中 p 为正整数，而 $0 < \alpha \leqslant 1$. 那么，$f(x)$ 必存在有连续的 p 阶微商 $f^{(p)}(x)$，并且当 $\alpha < 1$ 时，$f^{(p)}(x) \in \text{Lip}\alpha$，而当 $\alpha = 1$ 时 $f^{(p)}(x) \in W$.

定理 5　要使 $C_{2\pi}$ 中的函数 $f(x)$ 有任意阶商的必要充分条件是对于任意 p 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^p E_n^*) = 0$.

已经知道，满足条件 $E_n^* < \frac{k}{n}$ 的以 2π 为周期的函数未必属于 $\text{Lip}1$ 类. 因此自然产生这样的问题：由条件 $E_n^* < \frac{K}{n}$ 所界定的类究竟是怎样的函数类？这个问题是由 A.Zygmund 在 1945 年所解决的. 他发现要寻找的函数类，即下述的 Z 类.

Z 类：类中的元素 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，并且有这样的常数 K 使得对一切 x 及一切 $h > 0$ 都满足如下的条件：

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant Kh.$$

定理 6(Zygmund 定理)　函数 $f(x)$ 属于 Z 类的必要与充分条件是 $E_n^* < \frac{A_0}{n}(n = 1,2,\cdots)$，$A_0$ 为某一常数.

3.5　函数的最佳逼近与诱导函数的最佳逼近之间的关系

要研究非周期性函数的结构性质与函数的代数多项式逼近阶之间的联系，最简单的方法就是先通过变数代换法把被逼近的函数转变成三角函数，然后用三角多项式来进行逼近(这时即可应用 3.2,3.4 节中的理论)，最后再把三角多项式转变成代数多项式.

现在根据上述想法来进行具体分析. 假设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数. 通过变数代换 $x = \frac{1}{2}[(b-a)t + (b+a)]$，显然就将 x 的区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 变换成 t 的区间 $-1 \leqslant t \leqslant 1$，同时得到 t 的函数

$$\varphi(t) = f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right).$$

既然 $-1 \leqslant t \leqslant 1$，故不可作变换 $t = \cos\theta$ 而 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，这样便得到一个三角函数

$$\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta).$$

由于 $\cos\theta$ 是 θ 的偶性周期函数，故可将 $\psi(\theta)$ 按照 $\psi(\theta) = \psi(-\theta)$ 与 $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$ 而延拓成为 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶性周期函数.

如上得出的 $\psi(\theta)$ 称为原始函数 $f(x)$ 的诱导函数. 利用此种诱导函数即可讨论代数多项式的最佳逼近和三角多项式的最佳逼近之间的关系.

命题 1　设 E_n 是函数 $f(x) \in C[a,b]$ 的用不高于 n 次的代数多项式的最佳逼近，而 E_n^* 是它的诱导函数 $\psi(\theta)$ 用阶数不高于 n 的三角多项式的最佳逼近，那么 $E_n = E_n^*$.

命题 2　设 $\omega_f(\delta)$，$\omega_\psi(\delta)$ 分别表示函数 $f(x)$ 与诱导函数 $\psi(\theta)$ 的连续模数，则

$$\omega_{\psi}(\delta) \leqslant \omega_f\left(\frac{1}{2}(b-a)\delta\right).$$

命题 3　设$[\alpha,\beta]$是整个包含在(a,b)内的闭区间，而$\tilde{\omega}_f(\delta)$表示$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上的连续模数．则存在一个仅依赖于区间(a,b)及$[\alpha,\beta]$的正常数k使得$\tilde{\omega}_f(\delta) \leqslant \omega_{\psi}(k\delta)$．

3.6　代数多项式逼近理论中的杰克逊定理与伯恩斯坦定理

有了3.5节中的内容作准备，便不难根据三角多项式逼近论中的杰克逊定理与伯恩斯坦定理去导出代数多项式逼近论中的相应命题．

定理 7(杰克逊)　设E_n是函数$f(x) \in C[a,b]$用H_n中的多项式所得的最佳逼近，那么$E_n \leqslant K\omega_f\left(\frac{1}{n}\right)$，其中$K$为一正常数，仅与$a,b$有关．

推论 5　设$f(x) \in \mathrm{Lip}_M\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则$E_n \leqslant KM\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$．

推论 6　设$f(x)$有微商$f'(x)$且$|f'(x)| \leqslant M$，则$E_n \leqslant KM\frac{1}{n}$．

如果用$\omega^{(p)}(\delta)$表示p阶微商$f^{(p)}(x)$的连续模数，那么还有如下的一个更一般的结果．

定理 8(杰克逊)　设$f(x)$在$[a,b]$上具有p阶连续微商，那么当$n>p$时恒有估值式

$$E_n \leqslant A_p\left(\frac{1}{n}\right)^p\omega^{(p)}\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

其中A_p是一个仅依赖于a,b与p的正常数．

定理 9(伯恩斯坦)　设函数$f(x) \in C[a,b]$的最佳逼近E_n满足不等式$E_n \leqslant \frac{A}{n^{\alpha}}(0<\alpha\leqslant 1)$．令$[a_1,b_1]$为整个含于$(a,b)$内的一个闭区间．那么当$\alpha<1$时，$f(x)$在该闭区间上恒属于$\mathrm{Lip}\alpha$类；当$\alpha=1$时，$f(x)$在该闭区间上便属于$W$类．

定理 10(伯恩斯坦)　设p为正整数而$f(x) \in C[a,b]$，并且$E_n \leqslant \frac{A}{n^{p+\alpha}}(0<\alpha\leqslant 1)$，那么$p$阶微商$f^{(p)}(x)$在开区间$(a,b)$内处处存在，并且当$\alpha<1$时$f^{(p)}(x)$在包含于$(a,b)$内的任何闭区间$[a_1,b_1]$上恒属于$\mathrm{Lip}\alpha$类；而当$\alpha=1$时属于$W$类．

最后要着重指出，将伯恩斯坦的一系列定理和杰克逊的定理联系起来(包括Zygmund定理)，可以看出$C_{2\pi}$与$C[a,b]$中的函数正好能够按照它们的最佳逼近的递减速度来进行分类，如分成$\mathrm{Lip}\alpha(0<\alpha<1)$类、Z类，高次可微函数类等．

3.7　作为逼近工具的傅里叶级数

本节讨论用由傅里叶级数的部分和作成的三角多项式来逼近$C_{2\pi}$中的函数间

题.下面将证明拉格朗日的一条定理,由该定理可以看出,傅里叶级数的部分和在作为函数的逼近工具时,确实要比最佳逼近多项式差一些,但它所给出的逼近阶却和最佳逼近仅有极微小的差别.

记 $f(x)\in C_{2\pi}$,并假设有傅里叶展开

$$f(x)\sim A+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中的系数 A,a_k,b_k 按下式确定:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots).$$

显然,如果 $f(x)$ 是一个 n 次三角多项式,则它的傅里叶展开就是该三角多项式本身.

设 $S_n[f]=S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和:

$$S_n[f]=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

由数学分析知道上述的部分和可以表示成如下的狄利克雷(Dirichlet)积分.

$$S_n[f]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t.$$

因此要研究 $S_n[f]$ 对 $f(x)$ 的逼近速度,只需考察狄利克雷积分收敛于 $f(x)$ 的速度即可.为此,有

引理 1 对于任何正整数 $n\geqslant 2$,成立着不等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|\mathrm{d}t<\frac{1}{2}(2+\log n).$$

定理 11(勒贝格(Lebergue),1909) 若函数 $f(x)$ 用 H_n^* 中的三角多项式所得的最佳逼近为 E_n^*,则对一切 x 及一切 $n\geqslant 2$,有 $|S_n[f]-f(x)|\leqslant(3+\log n)E_n^*$.

由勒贝格定理可知:当 $\lim\limits_{n\to\infty}(E_n^*\log n)=0$ 时,部分和 $S_n[f]$ 一致收敛到 $f(x)$.亦即此时 $f(x)$ 可展成一致收敛的傅里叶级数.又根据三角逼近论中的杰克逊基本定理,知道 $E_n^*\leqslant E\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.因此只要 $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{1}{n}\right)\to 0(n\to\infty)$,也就保证了 $f(x)$ 的傅里叶级数的一致收敛性.这就是下面的推论.

推论 7 保证 $f(x)$ 能展成一致收敛的傅里叶级数的充分条件是

$$\lim_{\delta\to 0}[\omega_f(\delta)\log\delta]=0.$$

这就是著名的利普希茨 - 帝尼条件.

显然勒贝格定理中的不等式可以改写成

$$|S_n[f]-f(x)|\leqslant K\log n\cdot E_n^*(n=2,3,\cdots),$$

其中 K 为一绝对常数.已经知道 $\log n$ 虽然随着 n 的增大而增大,但和 $n^{\varepsilon}(\varepsilon>0$ 为任意小的数) 比较起来毕竟缓慢得多.亦即 $\log n=o(n^{\varepsilon})(n\to\infty)$.因此可以认为部分和 $S_n[f]$ 比之 $f(x)$ 的 n 阶的最佳逼近三角多项式并不坏得太过分.

3.8 作为逼近工具的费耶和

函数 $f(x) \in C_{2\pi}$ 的傅里叶级数的部分和 $S_n[f]$ 本身可能不收敛于该函数. 但是将部分和经过平均之后得到的费耶(Fejér) 和

$$\sigma_n(x) = \sigma_n[f] = \frac{S_0[f] + S_1[f] + \cdots + S_{n-1}[f]}{n} \tag{3-1}$$

却恒能一致收敛到 $f(x)$. 这就是通常数学分析教程中讲到的**费耶定理**. 既然费耶和 $\sigma_n(x)$ 仍然是三角多项式而且恒具有收敛性,这就使人想到,作为函数的逼近工具,在某种场合 $\sigma_n[f]$ 对函数 $f(x)$ 的逼近速度可能要比 $S_n[f]$ 快一些. 下面要讲述的伯恩斯坦的一个结果,表明上述猜想确实是正确的.

由 $S_k[f]$ 的积分表达式(狄利克雷积分) 可得出

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{\sin t}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t\Big]\,\mathrm{d}t.$$

又因为 $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$,所以

$$2\sin t\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t = \sum_{k=1}^{n-1}(\cos 2kt - \cos 2(k+1)t)$$
$$= 1 - \cos 2nt = 2\sin^2 nt.$$

由上面的推导得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}.$$

由此及(3-1) 式有

$$\sigma_\lambda[f] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t) + f(x-2t)]\Big[\frac{\sin nt}{\sin t}\Big]^2\mathrm{d}t.$$

由于 $S_k[1] = 1$,故对特例 $f(x) \equiv 1$ 而言自然有

$$1 = \sigma_n[1] = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}2\Big[\frac{\sin nt}{\sin t}\Big]^2\mathrm{d}t.$$

因此

$$\sigma_n[f] - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]\Big[\frac{\sin nt}{\sin t}\Big]^2\mathrm{d}t.$$

定理 12(伯恩斯坦,1912) 若 $f(x) \in C_{2\pi}$,且 $f(x) \in \mathrm{Lip}_M\alpha$,其中 $0 < \alpha < 1$. 那么对于一切 x 成立着估值式

$$|\sigma_n[f] - f(x)| < \frac{AM}{n^\alpha},$$

此处 A 是一个反依赖于 α 的常数 .

将此处定理中的估值式和杰克逊基本定理推论 2 中的估计式作一比较,可知就整个 $\mathrm{Lip}_M\alpha$ 类($0 < \alpha < 1$) 中的全体周期连续函数而言,费耶和所给出的偏差估计恰好与最小偏差 E_n^* 的估计有着同样的阶(当然这并不排除对应个别的函数 E_n^* 具有更快下降速度的可能性),然而在另一方面,根据勒贝格定理看来,傅里叶级数

部分和 $S_n[f]$ 对于 $\mathrm{Lip}_M\alpha$ 中被逼近函数的偏差估计却只能是 $A\log n\cdot\frac{1}{n^\alpha}$. 换句话说，这里需要多出一个无限增大的因子 $\log n$.

4　线性正算子逼近

函数逼近论与泛函分析有着密切的联系.事实上,前面几节中所介绍的用代数多项式或三角多项式逼近给定函数的具体工具(例如,内插多项式、伯恩斯坦多项式、傅里叶级数部分和、费耶和等)都是些线性算子.换言之,若 $L(f;x)$ 为上面所列举的逼近工具之一,又令 a 与 b 为任何实数,而 $f(t)$ 与 $\varphi(t)$ 为属于算子 $L(f;x)$ 存在域的函数,则

$$L(af+b\varphi;x)=aL(f;x)+bL(\varphi;x).$$

这些著名的逼近工具有如此重要的共性,自然启示人们可以在研究泛函分析某些概念的同时来研究函数逼近理论.

4.1　线性正泛函

引进泛函数的概念.

定义 1　如果对给定集 F 的每一个函数 $f(x)$,都有一个实数 Φ 与之对应,即 $\Phi=\Phi(f)$,则说在函数集 F 上定义了一个泛函数 $\Phi(f)$.集 F 称为泛函数的存在域.

由上述定义可以推出,泛函数与函数之间的不同点仅在于这些量的存在域不同:点集为函数的存在域,函数集为泛函数的存在域.这两个概念之间的其他差别是没有的.

定义 2　如果当函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 都属于泛函数 $\Phi(f)$ 的存在域时,$af(x)+b\varphi(x)$ 亦然,且有等式(线性关系式)

$$\Phi(af+b\varphi)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)$$

成立,其中 a,b 为任意两实数,则 $\Phi(f)$ 称为线性的.

例 1　$\Phi(f)=Af(\alpha)$.

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于 $x=\alpha$ 有定义的函数 $f(x)$ 所成的集合 F 上有意义.它的线性可由下列等式推得

$$\Phi(af+b\varphi)=A(af(\alpha)+b\varphi(\alpha))=aAf(\alpha)+bA\varphi(\alpha)=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi).$$

例 2　$\Phi(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$.

泛函数 $\Phi(f)$ 在那些于诸点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 上有定义的函数 $f(x)$ 所成的集合 F 上有意义.由等式

$$\begin{aligned}\Phi(af+b\varphi)&=\sum_{k=1}^{n}A_k(af(x_k)+b\varphi(x_k))=a\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)+b\sum_{k=1}^{n}A_k\varphi(x_k)\\&=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi)\end{aligned}$$

推出其线性.

例 3　$\Phi(f)=\int_\alpha^\beta \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$,其中 $\varphi(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续.泛函数的线性可由等式

$$\begin{aligned}\Phi(af+b\varphi)&=\int_\alpha^\beta \varphi(x)(af(x)+b\varphi(x))\mathrm{d}x\\&=a\int_\alpha^\beta \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x+b\int_\alpha^\beta \varphi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=a\Phi(f)+b\Phi(\varphi).\end{aligned}$$

定义 3　若对于每一个正函数 $f(x)$(称不取负值的函数为正函数)都有 $\Phi(f)\geqslant 0$,则称线性泛函数 $\Phi(f)$ 为正的.

容易看出,线性正泛函数 $\Phi(f)$ 的值当其变元增大时不减小.其实,若 $f_1(x)\geqslant f_2(x)$,则 $f_1(x)-f_2(x)\geqslant 0$,所以 $0\leqslant\Phi(f_1-f_2)=\Phi(f_1)-\Phi(f_2)$ 且 $\Phi(f_1)\geqslant\Phi(f_2)$.由于这一情况,可以说线性正泛函数是单调增大的.

例 4　若 $A\geqslant 0$,泛函数 $\Phi(f)=Af(\alpha)$ 是正的.

例 5　若 $A_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$,泛函数 $\Phi(f)=\sum_{k=1}^n A_kf(x_k)$ 是正的.

例 6　设 $\varphi(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,则泛函数 $\Phi(f)=\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$ 是正的.

其实,若 $\varphi(x_0)<0,a\leqslant x_0\leqslant b$,则由于 $\varphi(x)$ 是连续的,故有区间$[\alpha,\beta]$($a\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant b,\alpha<\beta$)使得于其上 $\varphi(x)$ 是负的.现在令

$$f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\0, & 其他,\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 是正函数,但是

$$\Phi(f)=\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\varphi(x)\mathrm{d}x<0.$$

现在来研究线性正泛函数序列$\{\Phi(f)\}$的收敛性,主要是研究在怎样的条件下对于一切点 $x=\alpha$ 处连续并在实轴上有界的函数$f(x)$,成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha).$$

定理 1(Коровкин,1953)　若线性正泛函数 $\Phi_n(f)$ 满足条件:

$$\Phi_n(1)\to 1,\Phi_n(\varphi)\to 0(n\to\infty).$$

其中 $\varphi(x)=(x-\alpha)^2$,则对于任何于点 $x=\alpha$ 处连续且在实轴上有界的函数$f(x)$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha)$.

推论 1　若对于线性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$,下列三条件满足:$\Phi_n(1)\to 1$,$\Phi_n(x)\to\alpha$,$\Phi_n(x^2)\to\alpha^2$,则对于任何在实轴上有界并于点 $x=\alpha$ 处连续的函数 $f(x)$,序列 $\Phi_n(f)$ 收敛于 $f(\alpha)$.

定理 2(Коровкин,1953)　若线性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$ 满足条件:

$$\Phi_n(1)\to 1,\Phi_n(\psi)\to 0,$$

其中 $\varphi(x)=\sin^2\frac{x-\alpha}{2}$，则对于以 2π 为周期，于 $x=\alpha$ 处连续且有界的函数 $f(x)$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(f)=f(\alpha)$.

推论 2　若线性正泛函数序列 $\Phi_n(f)$ 满足条件：

$$\Phi_n(1)\to 1,\Phi_n(\cos x)\to\cos\alpha,\Phi_n(\sin x)\to\sin\alpha,$$

且周期函数 $f(x)$ 于点 $x=\alpha$ 处连续且有界，则

$$\Phi_n(f)\to f(\alpha).$$

4.2　线性正算子

用具体的例子引出与函数概念相近的算子概念. 设 $\varphi(x,t)$ 对于集 E 中每一 x 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上关于 t 连续，则积分

$$\mathrm{L}(f;x)=\mathrm{L}(f(t);x)=\int_a^b\varphi(x,t)f(t)\mathrm{d}t=g(x)$$

对于每一在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(t)$ 都确定出一个函数 $g(x)=\mathrm{L}(f;x)$. 此处 $\mathrm{L}(f;x)$ 与微积分中的函数 $f(x)$ 相似，所差的只是变元与值的含意不同. 函数的存在域与变化域为数集，而 $\mathrm{L}(f;x)$ 的存在域与变化域为函数集.

定义 4　设已知函数集 F，如果对于集 F 中的每一函数 $f(t)$，均有一个函数 $\varphi(x)=\mathrm{H}(f(t);x)$ 与之对应，则说在函数集 F 上定义了算子 $\mathrm{H}(f;x)=\mathrm{H}(f(t);x)$.

定义 5　如果随着 $f(t)$ 与 $\varphi(t)$ 属于 $H(f;x)$ 的存在域，$af(t)+b\varphi(t)$（其中 a 与 b 为任意的实数）也属于它的存在域且成立如下等式：

$$\mathrm{H}(af+b\varphi;x)=a\mathrm{H}(f;x)+b\mathrm{H}(\varphi;x),$$

则称算子 $\mathrm{H}(f;x)$ 是线性的.

例 7　由 $\mathrm{L}(f(t);x)=\int_a^b\varphi(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 定义的算子 $\mathrm{L}(f;x)$ 是线性的.

事实上，由下列等式即可推出算子 $\mathrm{L}(f;x)$ 的线性：

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\alpha f_1+\beta f_2;x)&=\int_a^b\varphi(x,t)(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t))\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_a^b\varphi(x,t)f_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b\varphi(x,t)f_2(t)\mathrm{d}t\\&=\alpha\mathrm{L}(f_1;x)+\beta\mathrm{L}(f_2;x).\end{aligned}$$

定义 6　如果对于每一正函数 $f(t)$ 及 $x\in E$，线性算子 $\mathrm{L}(f;x)$ 满足条件：$\mathrm{L}(f;x)\geqslant 0$，则称 $\mathrm{L}(f;x)$ 为集 E 上的**线性正算子**.

显然，对于每一固定的值 x，线性算子 $\mathrm{L}(f;x)$ 成为线性泛函数. 因此，如果对于集 E 中每一固定的值 x，线性泛函数均是正的，则线性算子 $\mathrm{L}(f;x)$ 在集 E 上是正的. 例如，当 $u_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 在 E 上为正函数时，算子

$$\mathrm{L}(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)u_k(x)$$

为集 E 上的线性正算子. 又如，若 $\varphi(t,x)$ 对集 E 中每一固定的 x 在区间 $[a,b]$ 上

关于 t 为连续的正函数,则算子

$$L(f;x)=\int_a^b\varphi(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

在集 E 上是正的.

还须指出的是,在线性算子 $L(f;x)$ 中,变元 f 的变元与 x 不同,$L(f;x)=L(f(t);x)$. 在计算算子 $L(f;x)$ 的值时将 x 当作常数(值为集 E 中任意的),因此等式 $L(f(x);x)=f(x)L(1;x)$ 成立,这是由于 $f(x)$ 为常数(与 t 无关).

现在研究线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的条件. 这里的 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,并且在整个实轴上有界. 如在泛函数情形一样,下面将证明,序列 $L_n(f_k;x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f_k(x)=x^k(k=0,1,2)$ 蕴含序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于 $f(x)$(如果 $f(x)$ 满足上面指出的条件).

4.3　Коровкин 定理

定理 3(Коровкин,1953)　设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足条件:

1° $L_n(1;x)=1+\alpha_n(x)$;

2° $L_n(t;x)=x+\beta_n(x)$;

3° $L_n(t^2;x)=x^2+\gamma_n(x)$,

其中 $\alpha_n(x),\beta_n(x),\gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于零;又设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a,b]$ 上连续,于点 b 为右连续,于点 a 为左连续. 则在区间 $[a,b]$ 上序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

定理 4(Коровкин,1953)　设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足条件:

1° $L_n(1;x)=1+\alpha_n(x)$;

2° $L_n(\cos t;x)=\cos x+B_n(x)$;

3° $L_n(\sin t;x)=\sin x+\gamma_n(x)$,

其中 $\alpha_n(x),\beta_n(x)$ 与 $\gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于零. 又设函数 $f(t)$ 有界且具有周期 2π,在区间 $[a,b]$ 上连续,于点 b 右连续,于点 a 左连续. 在上述条件下,序列 $L_n(f;x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

5　平方逼近

这一章较系统地介绍平方逼近的理论和实用调和分析中的一些典型方法.

5.1　最小二乘法

利用插值方法构造近似多项式,总要求这个多项式在预先给定的若干个点上取给定值. 但对于有些情形,上述要求并不十分适宜,因为给定值多数是通过观测或实验得到的,常常带有误差. 即使给定值是精确的,实际问题对各点的近似程度

要求也并不一致，许多时候要求在确定意义下整体近似．当然，在个别数据或实验有严重错误的情况下坚持近似多项式精确符合这些数据或实验是更为不利的．

在一致逼近中，用数量

$$\| p - f \| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | p(x) - f(x) |$$

去度量近似多项式 $p(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 的逼近程度的．若 $\| p_n - f \| \to 0 (n \to \infty)$，那就意味着序列 $p_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$．显然，逼近程度的度量方式并不是唯一的．通常称度量 $\| p - f \|$ 为契贝谢夫度量．这种度量很直观，也有它的长处，但是由于它的非线性特征使得最佳一致逼近多项式的构造问题显得十分困难．

鉴于上述情况，有必要引进新的度量方式．本节就是讨论在平方度量意义下函数的近似表示问题，亦即近似多项式的构造问题．

现介绍历史悠久的最小二乘法．它起源于以测量和观测为基础的天文学．高斯在 1794 年利用最小二乘法解决了多余观测问题，当时他只有 17 岁．这类问题可以用下面的简单例子加以描述．

假定通过观测（或实验）得到表 5-1 所示一组数据（即列表函数）：

表 5-1

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1.4	1.3	1.4	1.1	1.3	1.8	1.6	2.3

下面的任务是用一简单的式子表出这些数据间的关系．从分析数据看出（可画图），这些点差不多分布在一条直线上，因此自然想到用线性式 $y = a + bx$ 表示它们之间的关系．这样就必须定出参数 a 和 b 的值来．这实际上是多余观测问题，用插值法不能确定出 a 和 b 的值．待定参数的确定归结为矛盾方程组的求解问题．

假定有某方法可以定出 a 和 b，则按 $y = a + bx$，给出一个 x 便可以算出一个 y．记

$$\overline{y}_k = a + bx_k (k = 1, 2, \cdots, 8).$$

$\overline{y}_k$ 称为 y_k 的估计值，显然它们不会是完全相同的，它们之间的差（通常称为残差）

$$\epsilon_k = y_k - \overline{y}_k (k = 1, 2, \cdots, 8)$$

无疑是衡量被确定的参数 a 和 b（也就是近似多项式 $y = a + bx$）好坏的重要标志．

可以规定许多原则来确定参数 a, b．例如，

1° 参数的确定，将使残差绝对值中最大的一个达到最小，即 $T = \max_k | \epsilon_k |$ 为最小；

2° 参数的确定，将使残差绝对值之和达到最小，即 $\sum_k | \epsilon_k |$ 为最小；

3° 参数的确定，将使残差的平方和达到最小，即 $\sum_k | \epsilon_k^2 |$ 为最小．

1° 和 2° 两个原则是很直观的，也很理想，但很不好用；而原则 3° 既很直观又很好用．按原则 2° 确定待定参数，从而得到近似多项式的方法，就是通常所说的最小

二乘法.这一方法的理论根据是,概率理论已证明,只有这样的原则才能使得观测(或实验)的偶然误差对于所作的近似多项式有最小的影响.

回到上面所提出的问题上来,用最小二乘法确定参数 a,b. 按最小二乘法,应使

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))^2$$

取最小值.因此,应有

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{8}(y_i-(a+bx_i))x_i=0.$$

由此,得到如下线性方程组:

$$a\sum_{i=1}^{8}i^0+b\sum_{i=1}^{8}x_i=\sum_{i=1}^{8}y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{8}x_i+b\sum_{i=1}^{8}x_i^2=\sum_{i=1}^{8}x_iy_i.$$

经简单计算,这个方程组成为

$$\begin{cases}8a+28b=12.2;\\28a+140b=47.3.\end{cases}$$

解之可得 $a=1.142, b=0.110$,从而得近似多项式 $p_1(x)=1.142+0.110x$.

现在转入讨论更为一般的情形.设已知列表函数 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,m)$,并且用一个通常的 $n(<m)$ 次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

去近似它.问题是应该如何选择 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使得 $p_n(x)$ 能较好地近似列表函数 $f(x)$.按最小二乘法,应该选择哪样的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,它们使得

$$S(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{m}(f(x_i)-p_n(x_i))^2$$

取最小值.注意到 S 是非负的,且是 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的二次多项式,它必有最小值.现在求 S 对 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的偏导数并令其等于零,得到

$$\sum_{i=0}^{m}(y_i-a_0-a_1x-\cdots-a_nx_i^n)x_i^k=0\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

进一步,可以将它们写成

$$\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^k=a_0\sum_{i=0}^{m}x_i^k+a_1\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+1}+\cdots+a_n\sum_{i=0}^{m}x_i^{k+n}$$
$$(k=0,1,\cdots,n).$$

用记号 $s_k=\sum_{i=0}^{m}x_i^k$ 和 $u_k=\sum_{i=0}^{m}y_ix_i^k$,上述方程组成为

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + \cdots + s_na_n = u_0; \\ s_1a_0 + s_2a_1 + \cdots + s_{n+1}a_n = u_1; \\ \quad\vdots \\ s_na_0 + s_{n+1}a_1 + \cdots + s_{2n}a_n = u_n. \end{cases}$$

它的系数行列式是

$$X_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}.$$

由 $s_i(i = 0,1,\cdots,2n)$ 的定义及行列式性质，可以断言

$$X_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum(W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n))^2. \qquad (*)$$

此处符号 W 表示范德蒙德(Vandermonde)行列式，而 $\sum$ 是对所有可能的 $\xi_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 求和(每个 ξ_i 可以取值 $x_0,x_1,\cdots,x_m$，并且当 $i \neq j$ 时 $\xi_i \neq \xi_j$).

由(*)式及范德蒙德行列式的性质指 $W(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \prod\limits_{p<q}^{0,\cdots,n}(x_q - x_p)$ 可知，当 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 互异时，

$$W(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \xi_0^2 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_n^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \xi_0^n & \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

从而，$X_{n+1} \neq 0(>0)$，方程组有唯一解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，它们使得 $S(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \sum\limits_{i=0}^{m}(f(x_i) - p_n(x_i))^2$ 取极小值. 如此，应用最小二乘法找到了 $f(x)$ 的近似多项式 $p_n(x)$.

在利用最小二乘法组成和式 $S(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \sum\limits_{i=0}^{m}(f(x_i) - p_n(x_i))^2$ 时，所有的点 x_i 都起着同样的作用，但是有时依据某种理由认为 $\sum$ 中的某些项的作用大些，而另外一些作用小些(如一些 y_i 是由精度较高的仪器或操作上比较熟练的人员获得的，自然应该予以较大的信任)，这在数学上表现为用和

$$\sum_{i=1}^{m}\rho_i(f(x_i) - p_n(x_i))^2$$

替代和 $S(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \sum\limits_{i=0}^{m}(f(x_i) - p_n(x_i))^2$ 取最小值. 此处 ρ_i 是任意的正数，通常称之为权；而称 $\sum\limits_{i=1}^{m}\rho_i(f(x_i) - p_n(x_i))^2$ 为加权和.

例1 设已知函数 $f(x)$ 的表列值为

x	0.2	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718

试按最小二乘法构造 $f(x)$ 的二次近似多项式.

解 经简单计算可得关于参数 a_0, a_1 和 a_0 的方程组(参阅表 5-2):

表 5-2

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y	
1	0.2	0.04	0.008	0.002	1.221	0.244	0.049	
1	0.5	0.25	0.125	0.063	1.649	0.824	0.412	
1	0.7	0.49	0.343	0.240	2.014	1.410	0.997	
1	0.85	0.723	0.614	0.522	2.340	1.989	1.690	
1	1	1	1	1	2.718	2.718	2.718	
5	3.250	2.503	2.090	1.826	9.942	7.185	5.857	

$$5a_0 + 3.250a_1 + 2.503a_2 = 9.942,$$
$$3.250a_0 + 2.503a_1 + 2.090a_2 = 7.185,$$
$$2.503a_0 + 2.090a_1 + 1.826a_2 = 5.857.$$

解之得 $a_2 = 0.928, a_1 = 0.751, a_0 = 1.035$.故

$$p_2(x) = 0.928x^2 + 0.751x + 1.035.$$

表 5-3 给出了 $p_2(x)$ 在结点处的误差.

表 5-3

x	0.62	0.5	0.7	0.85	1
y	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718
$p_2(x)$	1.223	1.644	2.017	2.344	2.715
$y - p_2(x)$	-0.002	0.005	-0.003	-0.004	0.003

用多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 去近似一个给定的列表函数(即给出的一组观测值 $y_i = f(x_i)$)时,需要确定的参数是 $a_0, a_1, \cdots, a_n$;而 $p_n(x)$ 可以看成是 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的线性函数.但是有时在利用观测(或实验)数据去确定一个经验公式时,往往要确定的函数和待定参数之间不具有线性形式的关系.这样问题就变得有些复杂.然而,常常可以通过变量替换使其线性化.

例如,有时用 $s = pt^q$ 类函数去近似一个由一组观测数据(列表)所描绘的函数,其中 p 和 q 是待定的两个参数.显然 s 已非 p 和 q 的线性函数.怎样线性化呢?为此,在 $s = pt^q$ 两端取对数,得到 $\log s = \log p + q\log t$.记 $\log s = y, \log p = a_0, a_1 =$

$q, x = \log t$，则 $s = pt^q$ 变成 $y = a_0 + a_1 x$. 这是一个一次多项式，它的系数 a_0 和 a_1 可以用最小二乘法求得.

经常还用函数 $S = Ae^{ct}$ 去近似一个已给的列表函数，其中 A, c 是待定的参数. 这时，可以在 $S = Ae^{ct}$ 的两端取对数：

$$\log S = \log A + ct$$

记 $\log S = y, \log A = a_0, c = a_1, x = t$，则 $y = a_0 + a_1 x$. 这样，仍可用最小二乘法定出 a_0, a_1（从而也就定出了 A, c），得到近似函数 $S = Ae^{ct}$.

5.2　空　间　$L^2_{\rho(x)}$

设 $\rho(x)$ 是一个在区间 $[a, b]$ 上 (L) 可积的非负函数，它至多只在一个测度为零的集合上可能等于零. 以后常把 $\rho(x)$ 称为权函数.

对于任意一个定义在区间 $[a, b]$ 上的可测函数 $f(x)$，如果 $\rho(x)f(x)$ 为 (L) 可积，则就说 $f(x)$ 属于 $L_\rho[a, b]$ 类；如果 $\rho(x)(f(x))^2$ 为 (L) 可积，则就说 $f(x)$ 属于 $L^2_\rho[a, b]$ 类.

由不等式 $\rho(x)\,|f(x)| \leqslant \rho(x)\dfrac{1 + f^2(x)}{2}$ 可以看出，凡 L^2_ρ 中的函数都在 L_ρ 内（即 $L^2_\rho \subset L_\rho$）. 又由不等式 $|f(x)g(x)| \leqslant \dfrac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$ 可知 L^2_ρ 中每两个函数之积恒属于 L_ρ.

现在介绍一下范数的概念. 对于 L^2_ρ 中的每一个函数 $f(x)$，都赋予一个数值

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \mathrm{d}x},$$

并称它为 f 的广义绝对值或范数. 由此

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)[f(x) - g(x)]^2 \mathrm{d}x}$$

便给出了两个函数 f 与 g 之间的距离或接近程度的度量. 所谓平方逼近正是按照这种度量方式来规定其逼近概念的.

下面关于范数的三条基本性质是容易验证的：

1° $\| f \| \geqslant 0$，并且当且仅当 $f = 0$ 时 $\| f \| = 0$；

2° $\| cf \| = |c| \cdot \| f \|$，$c$ 为一任意常数；

3° $\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$.

看来只有性质 3 是需要仔细验证的. 事实上，在 Буняковский 不等式

$$\int_a^b \rho fg \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b \rho f^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_a^b \rho g^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

的两边乘以 2，并各加上

$$\int_a^b \rho f^2 \mathrm{d}x + \int_a^b \rho g^2 \mathrm{d}x,$$

得到

$$\int_a^b \rho(f+g)^2\mathrm{d}x \leqslant ((\int_a^b \rho f^2\mathrm{d}x)^{1/2} + (\int_a^b \rho g^2\mathrm{d}x)^{1/2})^2.$$

再将上式两边各自开平方，就恰好得到性质 3° 中的不等式.

仿 L^2 空间的理论，也可对 L_ρ^2 中的元素序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 引进平均收敛性概念. 假如 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$，则称序列 $f_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)(n \to \infty)$. 完全类似地，假如

$$\| f_m - f_n \| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

则称 $\{f_n\}$ 为 L_ρ^2 中的基本序列. 还可以证明，L^2 空间理论中的傅里叶定理在此仍然成立. 亦即，凡 L_ρ^2 中的基本序列必有极限且极限函数仍在 L_ρ^2 中(这也就是关于 L_ρ^2 空间的完备性定理).

5.3　直交函数系与广义傅里叶级数

设 $\rho(x)$ 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的权函数. 如函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则说函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 是直交的. 又如果函数系统

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_k(x), \cdots$$

中的每一对函数在区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 均为直交，则称该系统为 $[a,b]$ 区间上的关于权函数 $\rho(x)$ 的**直交函数系**. 特别地，若 $\rho(x) \equiv 1$，那就可以不必提到权函数. 下面列举几个最常见的直交函数系.

例 2　三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是定义在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的直交函数系.

例 3　余弦函数系与正弦函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$$

均是 $[0, \pi]$ 上的直交函数系.

例 4　勒让德多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 (x^2-1)^n \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

是区间 $[-1,1]$ 上的直交多项式系.

例 5　契贝谢夫多项式系 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)(n = 0,1,\cdots)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上对权函数 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 而言的直交系.

例 6　考虑施图姆－刘维尔(Sturm-Liouville)型微分方程边值问题：

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0, y(a) = y(b) = 0.$$

此处 $\rho(x) > 0$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，而 λ 为数值参数. 除去平凡解 $y(x) \equiv 0$ 不予考虑之外，凡不恒等于零的解 $y(x)$ 均称为基本函数，而对应的 λ 值称为特征值(注意并非任何 λ 值都对应有基本函数). 根据微分方程式理论，上述边值问题的特征值总是存在的. 而且除常数因子不计外，对应于每一特征值都只有一个基

本函数.特征值可以由小到大地排列起来,因而对应的基本函数也可排成一列,如:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \cdots$$
$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad y_3(x), \quad \cdots$$

可以证明,上列的基本函数系在闭区间$[a,b]$上关于权$\rho(x)$是直交系.

事实上,假如$i \neq k$,则

$$y''_i + \lambda_i\rho(x)y_i = 0, \quad y''_k + \lambda_k\rho(x)y_k = 0.$$

用y_k, y_i分别乘第一、第二式,再相减,则得

$$(\lambda_i - \lambda_k)\rho(x)y_iy_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_ky'_i - y_iy'_k) = 0.$$

两边积分又得

$$(\lambda_i - \lambda_k)\int_a^b \rho(x)y_2y_k\mathrm{d}x + [y_ky'_i - y_iy'_k] = 0$$

由边界条件及$\lambda_i \neq \lambda_k$,便得知

$$\int_a^b \rho(x)y_iy_k\mathrm{d}x = 0.$$

下面着重介绍广义的傅里叶展开问题.设$\{\omega_k(x)\}(k = 1,2,3,\cdots)$在区间$[a,b]$上关于权函数$\rho(x)$作成直交函数系,其中每一个$\omega_k(x)$均不几乎处处等于零且均在空间$L^2_\rho$中,因而

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\omega_k^2(x)\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,\cdots)$$

都是有限正数.特别,若$A_k = 1(k = 1,2,\cdots)$,则称$\{\omega_k(x)\}$为标准直交系(显然,$\left\{\frac{\omega_k(x)}{\sqrt{A_k}}\right\}$总是标准直交系).

设$f(x) \in L^2_\rho$,则称按下列算出的常数

$$c_k = \frac{1}{A_k}\int_a^b \rho(x)\omega_k(x)f(x)\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,\cdots)$$

为$f(x)$的广义傅里叶系数,从而有如下的广义傅里叶级数:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x).$$

由于还不能断定上面的傅里叶级数是否平均收敛于$f(x)$,所以只能用联结符号$\sim$去表示它们之间的相应关系.尽管如此,这个级数的部分和却能用来圆满地解答一般形式的最小二乘方问题.这便是下面的定理 1.

定理 1(杜皮拉(Toepler))　对于任意指定的正整数n,用线性组合式$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k(x)$作成的函数来对给定的$f(x)$进行平方逼近时,为使偏差(平均平方偏差)

$$\| F - f \| = \left(\int_a^b \rho(x)[F(x) - f(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

达到最小值,函数$F(x)$必须等于广义傅里叶级数的部分和:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x),$$

而偏差的最小值等于

$$\| S_n(x) - f(x) \| = \left(\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2\right)^{1/2}.$$

注意 $\| S_n - f \| \geqslant 0$,因此根据最小值的那个表达式立即推出

$$\sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

又因为不等式的右端与 n 无关,故可令 $n \to \infty$ 而得出 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \mathrm{d}x$. 通常称为广义贝塞尔(Bessel)不等式.

根据偏差的最小值表达式知上述的贝塞尔不等式能改为所谓的帕塞瓦尔(Parseval)等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} \| S_n(x) - f(x) \| = 0$.

换言之,傅里叶级数的部分和 $S_n(x)$ 平均收敛于 $f(x)$ 这件事是同 $f(x)$ 的帕塞瓦尔等式成立这件事互相等价的. 因此,L_ρ^2 空间中的一个傅里叶级数是否收敛的问题也就归结为帕塞瓦尔等式是否成立的问题.

这里有一个问题:在什么条件下,给定的数列 $\{c_k\}$ 能够有资格作为 L_ρ^2 中某一函数 $f(x)$ 的傅里叶系数,并且作成的傅里叶级数平均收敛于 $f(x)$?正像通常的傅里叶级数论那样,对于这个问题的回答有如下的定理.

定理 2(里斯 - 费希尔(Riesz-Fisher))　设 $\{\omega_k(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 作成直交函数系. 若数列 $\{c_k\}$ $(k = 1,2,\cdots)$ 满足条件: $\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 < +\infty$,其中 $A_k = \int_a^b \rho \omega_k^2 \mathrm{d}x$,则 L_ρ^2 中存在唯一的函数 $f(x)$,使得 $f(x)$ 的傅里叶系数恰好是 $\{c_k\}$,且 $\sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x) \xrightarrow[\rho]{2} f(x)$.

若一个直交函数系 $\{\omega_k\}$ 对于 L_ρ^2 中的每一函数帕塞瓦尔等式都成立,则称它为封闭的直交系.

若 $\{\omega_k\}$ 为封闭的直交系,而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 L_ρ^2 中的任意两函数,它们的傅里叶系数分别为 $\{\alpha_k\}$ 与 $\{\beta_k\}$,则必成立下列的广义帕塞瓦尔等式:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \beta_k.$$

事实上,因为 $f + g$ 的傅里叶系数为 $\{\alpha_k + \beta_k\}$,因此利用通常的帕塞瓦尔等式应该有

$$\int_a^b \rho(f^2 + 2fg + g^2)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\alpha_k^2 + 2\alpha_k\beta_k + \beta_k^2),$$

$$\int_a^b \rho f^2\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\alpha_k^2, \quad \int_a^b \rho g^2\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\beta_k^2,$$

故由上列三式间的比较便得出广义的帕塞瓦尔等式.

给定一个直交系$\{\omega_k\}$,如果L_ρ^2中再也没有一个函数(几乎处处等于零的函数除外)能和一切ω_k相直交,那么$\{\omega_k\}$便称为完备的直交系.

直交系的完备性实际是和封闭性等价的.这就是下述的:

定理3 $\{\omega_k\}$是一个完备直交系的充要条件是:它是一个封闭直交系.

5.4 直交函数结构公式

关于函数系的线性相关与线性无关的概念,实际和通常向量代数中所说的概念是完全一样的.

设$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$是定义在$[a,b]$上的函数系.若能找到一组不全为0的常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$使得

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0,$$

那么就称该函数系是线性相关的.反之,便称之为线性无关的(只要函数是几乎处处等于零,就说它恒等于零,并用记号"$\equiv 0$"表示).显然在线性无关的情形下要使$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(x) = 0$,就只有$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

一个包含可数多个函数的函数系,要是它的每一个有限部分都是线性无关的,那么该函数系便称为线性无关.

例7 函数系$1,x,x^2,\cdots$是线性无关的.

事实上,它的每一个有限部分$x^{n_1},x^{n_2},\cdots,x^{n_k}(0\leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$都是任何区间上的线性无关函数系.

例8 关于权函数$\rho(x)$的任意直交函数系$\{\omega_k(x)\}$都是线性无关的.

事实上,要是$\alpha_1\omega_{k_1} + \cdots + \alpha_n\omega_{k_n} \equiv 0$,则以$\rho\omega_{k_i}$乘等式的两边并积分,得到

$$\alpha_i = 0(i = 1,2,\cdots,n).$$

作为例2的特例,可以知道三角函数系、余弦函数系、正弦函数系等都是线性无关的系统.

设$f(x)$与$g(x)$是L_ρ^2中的两个函数,则称$f(x)$与$g(x)$乘积的积分

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

为$f(x)$与$g(x)$的内积.如果$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$都是$L_\rho^2[a,b]$中的函数,则称由内积构成的行列式

$$\Delta_n = \Delta(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n) = \begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}$$

为函数系$\{\varphi_k(x)\}$的格拉姆(Gram)行列式.借用这种行列式可以给出一个关于函数系统线性相关与否的判别准则:

定理 4 函数系 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为线性相关的充分必要条件是 $\Delta(\varphi_1,\cdots,\varphi_n) = 0$.

进一步有

定理 5 若 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 为线性无关,则 $\Delta_n > 0$.

于此,不准备重述实变函数论中的施密特(Schmidt)直交化手续,而是要进一步指出直交函数的普遍结构公式.

定理 6 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$ 是 $L_\rho^2[a,b]$ 中的一个线性无关函数系(有限或可数).又设

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_{n-1}) & \varphi_1 \\ (\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_{n-1}) & \varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_{n-1}) & \varphi_n \end{vmatrix}$$

按下列公式便可造出一个标准直交系

$$\{\omega_k\}:\omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\Delta_1}},\quad \omega_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{\Delta_k\Delta_{k-1}}}\quad (k \geqslant 2).$$

注 1 由定理6中的直交函数结构公式可以看出,每个 ω_n 都是$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的线性组合.反过来还可看出,每个 φ_n 也都是$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的线性组合.事实上,由于已知 φ_1 是 ω_1 的线性组合,利用递推关系

$$\Delta_{n-1}\varphi_n = \psi_n - \alpha_1\varphi_1 - \cdots - \alpha_{n-1}\varphi_{n-1},\quad \psi_n = \sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}\,\omega_n$$

便可逐步推知每个 φ_n 也都是$\omega_1,\cdots,\omega_n$ 的线性组合.

注 2 令 $\omega_1(x) = \alpha\varphi_1(x)$,则由条件$(\omega_1,\omega_1) = 1$显然导致$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{(\varphi_1,\varphi_1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta_1}}$.一般说来,当把每个$\omega_k$表示成$\varphi_1,\cdots,\varphi_k$的线性组合时(实际也就是施密特标准直交化手续),其中的系数也是唯一确定的.这一事实读者不难自行验证.因此可以断言,定理 6 中的直交函数结构公式的形式乃是唯一确定的(只有分母中的开方根号可以有正与负的两种选择).

注 3 依注记1可知,和所有 φ_k 都直交的函数也将和所有ω_k都直交,而且反之亦然.因此可以断言,函数系$\{\varphi_k\}$与$\{\omega_k\}$或者同时是完备的,或者同时是不完备的.

5.5　直交多项式的一般性质

在讨论广义傅里叶展开时,已经知道利用直交函数的线性组合,能够对指定的函数作平方逼近.另一方面,从实际计算的可行性与简便性观点出发,我们曾一再强调过利用多项式函数作逼近工具是最理想的.因此人们自然就去考虑这样的问题:能否构造出种种最有用的直交多项式系统以便作为平方逼近的工具?

看来上述问题是有解答的.因为一则原始的幂函数系 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ 在任一闭区间$[a,b]$上都是线性无关的;二则根据施密特直交化手续或直交函数结构公式,对于每一个函数 $\rho(x)$ 总是可以将该幂函数系进行直交化.

但还必须考虑这样一个更基本的问题,即不论 $\rho(x)$ 是怎样的权函数,多项式类是否总是在 L_ρ^2 中稠密?也就是问:是否对 L_ρ^2 中的每个函数都能用多项式作任意精确的逼近?事实上有如下的定理.

定理 7　设 $f(x) \in L_\rho^2[a,b]$,则对任意 $\epsilon > 0$,都存在有多项式 $p(x)$ 使得

$$\| f - p \| \leqslant \epsilon.$$

定理 8　对权函数 $\rho(x)$ 而言的标准直交多项式系$\{\varphi_n(x)\}$(φ_n 的次数是 n)是 L_ρ^2 空间中的完备直交系(亦即封闭直交系).

定理 9　幂函数系$1, x, x^2, \cdots$ 对任何 L_ρ^2 空间说来都是完备的.

经过以上的理论分析之后,可以看出,考虑如何去利用直交多项式系统来作为各空间 L_ρ^2 中的平方逼近工具是极有意义的问题.以下便进入较具体的讨论.

令 $\rho(x)$ 为给定的权函数,$\{x^k\}$($k = 0,1,2,\cdots$)为给定在区间$[a,b]$上的幂函数系.称

$$\mu_n = \int_a^b \rho(x) x^n \mathrm{d}x \quad (n = 0,1,\cdots)$$

为权函数 $\rho(x)$ 的矩量.显然内积(x^p, x^q) 可表成

$$(x^p, x^q) = \int_a^b \rho(x) x^{p+q} \mathrm{d}x = \mu_{p+q}.$$

因而格拉姆行列式 $\Delta(1, x, \cdots, x^n)$ 可记成

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^n) \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (x^n,1) & (x^n,x) & \cdots & (x^n,x^n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{n+n} \end{vmatrix}.$$

其次,5.4 节定理 5 证明中规定的 $\psi_n(x)$ 函数可表成

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

为方便计可规定 $\psi_0(x) \equiv 1, \Delta_1 \equiv 1$.于是根据5.4 节的定理6,便可以构造出如下的

标准直交函数系$\{\varphi_n(x)\}$：

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

$$(n=0,1,\cdots).$$

注意$\varphi_n(x)$正好是次数为n的多项式，而且x^n的系数是$\frac{\Delta_{n-1}}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}=\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$ $\neq 0$. 总结一下，便是下面的定理.

定理 10　不论定义在$[a,b]$上的权函数$\rho(x)$如何，都存在有关于权$\rho(x)$的标准直交多项式系$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$，其中$\varphi_n(x)$正好是$n$次多项式，其具体结构形式系由上列公式所给出.

定理 11　设$f_0(x),f_1(x),\cdots$是对权函数$\rho(x)$的直交系，$f_n(x)$正好是n次多项式，而最高次项系数为p_n，则诸f_n必可唯一地表示成

$$f_0(x)=p_0,\quad f_n(x)=p_n\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\varphi_n(x)\quad(n=1,2,\cdots).$$

事实上，因为$f_n(x)$可以表示成

$$f_n(x)=\alpha_0\varphi_0(x)+\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_n\varphi_n(x),$$

而且$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$也可以表示成$f_0(x),f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)$的线性组合，因此由诸$f_k(x)$间的直交性与诸$\varphi_k(x)$间的直交性便推知当$k\leqslant n-1$时恒有

$$(f_n,\varphi_k)=\alpha_k(\varphi_k,\varphi_k)=0\quad(\alpha_k=0).$$

这就表明$f_n(x)=\alpha_n\varphi_n(x)$.

注意$f_n(x)$中x^n的系数为p_n，而$\alpha_n\varphi_n(x)$中x^n的系数为$\alpha_n\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$. 因此由相等关系定出$\alpha_n$的数值之后. 也就得到定理的证明.

定理 12　设$f(x)\in L_\rho^2$. 则在所有次数不高于n的多项式$p(x)$中，使平方偏差

$$\|f-p\|^2=\int_a^b\rho(x)[f(x)-p(x)]^2\mathrm{d}x$$

达到其最大值的只有傅里叶级数的部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(x)\quad(c_k=(f,\varphi_k)),$$

并且最小平方偏差是$\min\|f-p\|^2=\sum_{k=n+1}^\infty c_k^2$.

这个定理是一般的傅里叶定理的推论. 注意标准直交多项式系$\{\varphi_k\}$是封闭的，故有巴塞伐尔等式成立，因而最小平方偏差为

$$\|f-S_n\|^2=\int_a^b\rho[f]^2\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n c_k^2=\sum_{k=1}^\infty c_k^2-\sum_{k=1}^n c_k^2=\sum_{k=n+1}^\infty c_k^2.$$

这就是定理12的证明.多项式 $\varphi_n(x)$ 还有一个有趣的极值性质,即有下面定理.

定理 13　在最高次项系数为1的所有 n 次多项式中,使积分 $(p,p)=\int_a^b \rho(x)[p(x)]^2 dx$ 达到最小值的多项式是

$$p(x)=\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\varphi_n(x).$$

定理 14　标准直交系 $\{\varphi_n\}$ 中的多项式 $\varphi_n(x)$ 的所有根都是单实根,并且都在开区间 (a,b) 之内.

定理 15　设 $n\geqslant 1$,则 $\varphi_n(x)$ 和 $\varphi_{n+1}(x)$ 的根必相互交错.亦即 $\varphi_n(x)$ 的根 ξ_k 和 $\varphi_{n+1}(x)$ 的根 η_k 之间有如下的不等式关系:

$$a<\eta_1<\xi_1<\eta_2<\xi_2<\cdots<\xi_n<\eta_{n+1}<b.$$

令 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 表示最高次项系数是1的直交多项式(n 代表次数,$n=0,1,\cdots$)则

$$\tilde{\varphi}_0(x)=1,\quad \tilde{\varphi}_\lambda(x)=\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\varphi_n(x).$$

下面的定理给出了诸 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 间的一个递推关系.

定理 16　对一切 $n=0,1,\cdots$ 都成立着递推关系 $\tilde{\varphi}_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\tilde{\varphi}_{n+1}(x)-\beta_{n+1}\tilde{\varphi}_n(x)$,其中 α_{n+2} 与 β_{n+1} 为某些常数.

5.6　直交多项式级数的收敛性定理

设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是对权函数 $\rho(x)$ 的标准直交多项式系.又设 $f(x)$ 为空间 $C[a,b]$ 中的一函数.现在要研究在怎样的条件下,连续函数 f 的广义傅里叶级数 $\sum c_k\varphi_k(x)$ 能在通常的意义下收敛于 $f(x)$.

以 $S_n(x)$ 表示级数的第 n 部分和

$$S_n(x)\equiv S_n[f;x]=\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x).$$

注意傅里叶系数 C_k 具有表达式

$$C_k=\int_a^b \rho(t)f(t)\varphi_k(t)dt,$$

因此代入后即得出

$$S_n(x)=\int_a^b \rho(t)f(t)\Big[\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\Big]dt.$$

这相当于普通傅里叶级数理论中的狄利克雷积分,而表达式

$$K_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

可称之为广义狄利克雷核(简称为核).

显然,不高于 n 次的多项式 $P_n(x)$ 按直交多项式 $\{\varphi_k\}$ 展开所得的第 n 部分和 $S_n(x)$ 是与 $P_n(x)$ 等同的:$S_n[P_n;x] \equiv P_n(x)$,于是

$$S_n[f-P_n;x] = S_n[f;x] - S_n[P_n;x] = S_n[f;x] - P_n(x),$$

两边各加 $-f(x)$ 并移项,则得出

$$S_n[f;x] - f(x) = P_n(x) - f(x) + S_n[f-P_n;x],$$

$$|S_n[f;x] - f(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |S_n[f-P_n;x]|.$$

既设 $f(x)$ 为连续函数,故存在最佳逼近 $E_n(f)$,而 $|P_n(x) - f(x)| \leqslant E_n(f) \to 0(n \to \infty)$. 因此 $|S_n[f;x] - f(x)|$ 是否趋向于0的问题归结为是否 $|S_n[f-P_n;x]| \to 0$ 的问题. 显然

$$\begin{aligned}
|S_n[f-P_n;x]| &= \left|\int_a^b \rho(t)[f(t) - P_n(t)]K_n(t,x)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t) - P_n(t)|\int_a^b \rho(t)|K_n(t,x)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant E_n(f)\int_a^b \rho(t)|K_n(t,x)|\mathrm{d}t \\
&= E_n(f)L_n(x),
\end{aligned}$$

其中

$$L_n(x) \equiv \int_a^b \rho(t)|K_n(t,x)|\mathrm{d}t$$

称为勒贝格函数.

这样,便总结出如下的收敛性定理.

定理 17 设 $f(x)$ 为连续函数,则当条件 $E_n(f)L_n(x) \to 0(n \to \infty)$ 满足时便有收敛的傅里叶级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k\varphi_k(x) = f(x).$$

又若在 $[a,b]$ 上 $E_n(f)L_n(x) \xrightarrow{\text{1}} 0$,则上列级数便是一致收敛的.

5.7 几种特殊的直交多项式

下面介绍三种最著名的直交多项式系,即勒让德多项式系 $\{P_n(x)\}$、拉盖尔(Laguerre)多项式系 $\{L_n(x)\}$ 和埃尔米特(Hermite)多项式系 $\{H_n(x)\}$. 这三种多项式无论在数学物理方法中或积分近似计算理论中都居于重要的地位.

1. 勒让德多项式

在区间 $[-1,1]$ 上对于权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 构成直交系的多项式 $P_n(x)$ 称为勒让德多项式($n = 0,1,\cdots$). 自然,可以根据一般结构公式(定理6)来找出 $P_n(x)$ 的显明表达式. 然而行列式的计算毕竟是很麻烦的. 事实上,早在 1814 年罗德里格(Rodrigue)就已经找到了一个极简单而便利的表达式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (x^2-1)^n.$$

容易看出,这确实是一个 n 次多项式,而且 x^n 项的系数是

$$\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

因而当规定最高次项系数为1时,多项式可表作

$$\widetilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(x^2-1)^n.$$

现在来验证上述多项式系确实是关于权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的直交系.记 $\varphi(x)=(x^2-1)^n$,则 $\varphi^{(k)}(\pm 1)=0(0\leqslant k\leqslant n-1)$,而且 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\varphi^{(n)}(x)$.

设 $Q(x)$ 为次数不高于 n 的任意多项式,则由分部积分法易算出

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n(x)Q(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n n!}\left\{[Q(x)\varphi^{(n-1)}(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x\right\}\\&=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x=\cdots\\&=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x_0.\end{aligned}$$

因此,假如 $Q(x)$ 的次数低于 n,则 $Q^{(n)}(x)\equiv 0$,从而 $Q(x)$ 便和 $P_n(x)$ 相直交.这就表明 $P_n(x)$ 是与 $P_{n-1}(x),\cdots,P_1(x),P_0(x)$ 都直交的.因而 $\{P_n(x)\}$ 确实是 $[-1,1]$ 上的直交系.

若在上列计算中取 $Q(x)=P_n(x)$,则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x&=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\\&=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

因此标准直交函数可以表作

$$\widehat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2(x^2-1)^n.$$

根据一般理论,可知 $P_n(x)$ 的所有根都是单实根,且位于开区间 $(-1,1)$ 之内.以下给出 $P_n(x)(n=0,1,\cdots,5)$ 的显式表达式,以供参考.

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

事实上,根据罗德里格公式,利用二项式展开定理及逐项微分容易得到如下的普遍表达式:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

$P_n(x)$ 实际是下列勒让德微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$$

在正规点 $x=0$ 附近满足条件 $y(1)=1$ 的唯一确定的多项式解.

现在指出 $P_n(x)$ 有如下的母函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n(|z|<1).$$

利用母函数可以证明如下的不等式:

$$|P_n(x)|\leqslant 1\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

事实上,令 $x=\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$ 代入母函数公式后,易得出

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)z^n&=[1-z(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+z^2]^{-1/2}\\&=(1-ze^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}\\&=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-ze^{i\theta})^k\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{s}(-ze^{-i\theta})^s\right].\end{aligned}$$

当 $|z|<1$ 时,右端二幂级数是可以相乘的.因此在左右两端比较 z^n 的系数后得出

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}[e^{in\theta}+e^{-in\theta}]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!}e^{i(2k-n)\theta}.$$

注意上式右边各项的系数均为正,而各项将于 $\theta=0$ 时达到最大值.这样便推出

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant P_n(\cos\theta)=P_n(1)=1.$$

这就证明了所需要的不等式.

按勒让德多项式展开,已证得

$$|P_n(x)|\leqslant 1,\widehat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x).$$

由此可知对应于直交系 $\{P_n\}$ 的核 $K_n(t,x)$ 具有估计式

$$|K_n(t,x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\widehat{P}_k(t)\widehat{P}_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}.$$

从而相应的勒贝格函数具有估计式

$$L_n(x)=\int_{-1}^{1}|K_n(t,x)|\,dt\leqslant(n+1)^2.$$

这样,根据5.6节中所建立的收敛性定理,便知凡最佳逼近满足条件 $n^2E_n(f)\to 0(n\to\infty)$ 的每一连续函数 $f(x)$,都可按勒让德多项式展成在全区间 $[-1,1]$ 上一致收敛的广义傅里叶级数.根据杰克逊(Jackson)定理知道,凡有连续二阶微商的函数 $f(x)$ 都满足上述条件,因此有如下的定理.

定理 18 设定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$ 具有连续的二阶微商 $f''(x)$.则 $f(x)$ 按 $\{P_n(x)\}$ 展成的广义傅里叶级数一致收敛到它自身.

最后还值得提到关于 $P_n(x)$ 的一个递推公式:

$$nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)=0.$$

这在证 $P_n(x)$ 的母函数时实际已经得到了，只要在那儿将 A_n 改换成 $P_n(x)$ 就可以. 自然，如果应用一般公式(定理 16)，那也同样可以得到上述结果.

2. 拉盖尔多项式

以前讨论的一切，都是一直假定基本区间 $[a,b]$ 是有限的. 其实，权函数，L_ρ^2 空间以及直交系等概念也完全可以推广到无限区间的情形. 所谓勒让德多项式系 $\{L_n(x)\}$，就是在区间 $(0,+\infty)$ 上关于权函数 e^{-x} 所构成的直交系. 它们可以用类似于罗德里格(Rodrigue)公式的表达式来定义：$L_n(x)=e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x})$.
只要将上式右端的微商算出，就知道 $L_n(x)$ 是 n 次多项式：

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},$$

其中最高次项系数显然是 $(-1)^n$，因此

$$\widetilde{L}_n(x)=(-1)^ne^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x})$$

便是最高次项系数为 1 的拉盖尔多项式.

记 $U_n(x)=x^ne^{-x}$，则它的逐次微商满足条件

$$U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(+\infty)=0\quad(k=0,1,\cdots,n-1).$$

因此假如 $V(x)$ 是次数不高于 n 的多项式，则由分部积分法易算出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)V(x)dx&=\int_0^\infty U_n^{(n)}Vdx\\&=[U_n^{(n-1)}V+\cdots+(-1)^{n-1}U_nV^{(n-1)}]_0^\infty+\\&\quad(-1)\int_0^\infty U_nV^{(n)}dx\\&=(-1)^n\int_0^\infty U_nV^ndx.\end{aligned}$$

因此当 V 的次数低于 n 时，上面的最后结果便是零. 这表明 L_n 是与一切次数较低的多项式相直交的. 从而也就证明 $\{L_n\}$ 是关于权 e^{-x} 的直交系.

又如果在以上的计算中取 $V=L_n(x)$，则

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2dx=(-1)^n\int_0^\infty U_n\cdot(-1)^nn!dx=n!\int_0^\infty x^ne^{-x}dx=(n!)^2.$$

从而可知标准化了的直交函数应该写成

$$\widehat{L}_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^ne^{-x}).$$

3. 埃尔米特多项式

所谓埃尔米特多项式系 $\{H_n(x)\}$，就是在区间 $(-\infty,\infty)$ 上关于权函数 e^{-x^2} 所构成的直交系，它可以通过如下的表达式来定义：

$$H(x)=e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(e^{-x^2}).$$

将上式右端的微商逐步算出，就知道 $H_n(x)$ 是 n 次的多项式，而且用归纳法容易证

明它的最高次项系数是$(-2)^n$. 记 $u = e^{-x^2}$,则

$$u^{(k)}(-\infty) = u^{(k)}(+\infty) = 0 \quad (k = 0,1,\cdots).$$

因此对任何次数不高于 n 的多项式 $V(x)$,利用逐次分部积分法同样可得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) V(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} V^{(n)}(x) dx.$$

因此当 V 的次数低于 n 时,上式右端便是零,这证明了$\{H_n\}$确实是关于权 e^{-x^2} 的直交系.

其次,如果在上式中取 $V(x) = H_n(x)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (-2)^n n! dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

因此标准直交函数的形式应该是

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x).$$

6　样条函数逼近

在第 2 章中,已经讨论了在有限闭区间内的任一连续函数用多项式一致逼近的可能性问题.指出了有限闭区间上的任一连续函数,都可以用多项式逼近至任意精确程度.或者说,多项式类是在整个连续函数类中处处稠密的.那么在函数逼近论范畴里,是否就没有必要引进其他逼近工具了呢?许多事实表明情况并非如此.

首先由于多项式是幂级数的特例,它在一点附近的性质就足以决定其整体性质.然而,自然界较大范围内的许多现象,例如物理或生物现象间的关系却往往呈现互不关联、互相割裂的本性.换言之,在两个不同的区域内,它们的性状可以完全不相关.其次,从数学上来说,例如在多项式插值理论中,由 n 个插值结点所作的插值多项式是一个 $n-1$ 次的多项式,它通常可能有 $n-3$ 个拐点,对于某些比较平滑(平坦)的函数来说,这自然是不理想的.

本章将要介绍的样条函数是一种分段多项式,在各段的多项式之间又具有某种连接性质.正因为如此,样条函数既保持了多项式的简单性和可逼近性,又在各段之间保持了相对独立的局部性质.近 30 多年来,样条函数已成为最有成效的逼近工具之一.

6.1　样条函数及其基本性质

设给定一组结点

$$-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = \infty. \tag{6-1}$$

又设分段函数 $S(x)$ 满足条件:

1° 在区间$[x_j, x_{j+1}]$$(j = 0,1,\cdots,N)$上,$S(x)$ 是一个次数不超过 n 的实系数代

数多项式；

2° $S(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上具有一直到 $n-1$ 阶的连续导数，
则称 $y=S(x)$ 为 n 次样条函数. 常把结点的 n 次样条函数的总体记为 $\mathscr{S}_n(x_1,x_2,\cdots,x_N)$. $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 称为样条结点.

一个 $2n-1$ 次样条函数 $y=S(x)$，如果其在区间 $(-\infty,x_1]$ 与 $[x_N,\infty)$ 上的表达式都是 $n-1$ 次多项式(并不要求该两 $n-1$ 次多项式相同)，则特别称之为 $2n-1$ 次的自然样条函数. 结点的 $2n-1$ 次自然样条函数的总体记为 $R_{2n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$. 显然

$$R_{2n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)\subset\mathscr{S}_{2n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N). \tag{6-2}$$

下面来给出样条函数类 $\mathscr{S}_n(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 中任一样条函数的一般表达式.

对于任意给定的以 $(n-1)$ 为结点的 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，根据定义，其在每个子区间 $[x_j,x_{j+1}]$ $(j=0,1,\cdots,N)$ 上均为一 n 次多项式. 特别地，于子区间 $(-\infty,x_1]$ 内是一 n 次多项式. 不妨设该多项式为 $p_n(x)\in H_n$.

今考虑 $S(x)$ 于 $[x_1,x_2]$ 上的表达式. 由定义，$S(x)$ 于 $[x_1,x_2]$ 上的表达式仍为一个 n 次多项式. 若该 n 次多项式为 $q_n(x)$，并考虑下述 n 次多项式的性质：

$$\eta(x)=q_n(x)-p_n(x).$$

按 n 次样条函数的定义，$p_n(x)$ 与 $q_n(x)$ 于点 $x=x_1$ 处的值以及1阶、2阶，一直到 $n-1$ 阶导数值皆相等：

$$p_n^{(i)}(x_1)=q_n^{(i)}(x_1)\quad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

$$\eta^{(i)}(x_1)=0\qquad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

是故 $x=x_1$ 是 $\eta(x)$ 的 n 重根，即 $\eta(x)$ 含 $(x-x_1)^n$ 这个因子. 由于 $\eta(x)$ 是一 n 次多项式，所以存在某常数 c_1，使得

$$\eta(x)=c_1(x-x_1)^n, \tag{6-3}$$

$$q_n(x)=p_n(x)+c_1(x-x_1)^n. \tag{6-4}$$

它说明 $S(x)$ 于区间 $[x_1,x_2]$ 上的表达式恰为其前一区间上的表达式加上 $(x-x_1)^n$ 的某一常数倍. 这样一来，$S(x)$ 于 $(-\infty,x_2]$ 上的统一表达式应为

$$S(x)=\begin{cases}p_n(x), & -\infty<x\leqslant x_1;\\ p_n(x)+c_1(x-x_1)^n, & x_1\leqslant x\leqslant x_2.\end{cases} \tag{6-5}$$

为把(6-5)式写成一个统一的表达式，引入记号

$$x_+=\max(0,x)=\begin{cases}x, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases} \tag{6-6}$$

$$x_+^m=(x_+)^m,$$

则(6-5)式所示的 $S(x)$ 又可紧凑地表示为

$$S(x)=p_n(x)+c_1(x-x_1)_+^n\qquad(-\infty<x\leqslant x_2).$$

继续采用这种分析方法，可得 $S(x)$ 于整个实轴上的表达式为

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N}c_j(x-x_j)_+^n\quad(-\infty<x<\infty). \tag{6-7}$$

此即为下面的定理.

定理 1 任一 $S(x) \in \mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 均可唯一地表现为

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j (x - x_j)_+^n \quad (-\infty < x < \infty), \tag{6-8}$$

其中 $p_n(x) \in H_n, c_j(j = 1,2,\cdots,N)$ 为实数.

显然,由(6-8)式所给出的任一函数 $S(x)$ 必然满足 n 次样条函数的定义,也即 $S(x) \in \mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$. 因而定理 1 可进一步写成下面的定理.

定理 2 若使 $S(x) \in \mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$,必须且只须存在 $p_n(x) \in H_n$ 和 N 个实数 $C_1, C_2, \cdots, C_N$,使得(6-8)式成立:

$$S(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j (x - x_j)_+^n \quad (-\infty < x < \infty).$$

定理 1 和定理 2 说明函数系

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, (x - x_1)_+^n, \cdots, (x - x_N)_+^n \tag{6-9}$$

构成 n 次样条函数类 $\mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的一组基底.

因为由(6-2)式和定理 2 可知,任一 $S(x) \in R_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 均可表为

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^{N} c_j (x - x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty < x < \infty), \tag{6-10}$$

其中 $p_{n-1}(x) \in H_{n-1}$.

当然一函数 $S(x)$ 只是满足(6-10)式还不足以保证它一定是一个自然样条函数. 因为它在 $[x_N, \infty)$ 上是否为一个 $n-1$ 次的多项式尚不能保证. 为保证这点,便须要求 $S(x)$ 于 $[x_N, \infty)$ 中的表达式

$$p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^{N} C_j (x - x_j)^{2n-1}$$

为一 $n-1$ 次多项式. 即要求上述求和号这一项中 n 次以上的方幂项之系数为 0. 但

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} C_j (x - x_j)^{2n-1} &= \sum_{j=1}^{N} C_j \sum_{i=1}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i (-x_j)^{2n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^{N} C_j (-x_j)^{2n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i-1} \binom{2n-1}{i} x^i \sum_{j=1}^{N} C_j x_j^{2n-1-i}. \end{aligned}$$

要求上式中 $x^n, x^{n+1}, \cdots, x^{2n-1}$ 的系数为 0,即得

$$\sum_{j=1}^{N} C_j x_j^k = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1). \tag{6-11}$$

定理 3 为使 $S(x) \in R_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$,必须且只须存在 $p_{n-1}(x) \in H_{n-1}$ 和满足线性约束(6-11)式的实数 $C_1, C_2, \cdots, C_N$,使得

$$S(x) = p_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^{N} C_j (x - x_j)_+^{2n-1} \quad (-\infty < x < \infty). \tag{6-12}$$

下面讨论样条函数的积分关系式.

定理 4 设 $S(x)$ 由(6-8)式所给出,其中 $n = 2k-1$,且

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < b. \tag{6-13}$$

又设 $f(x)$ 满足下述三性质：

1° $f(x) \in C^{k-1}[a,b]$ 且 $f^{(k)}(x)$ 于每个开区间 (x_i, x_{i+1}) $(i = 0,1,\cdots,N)$ $(x_0 = a, x_{N+1} = b)$ 内连续；

2° $f^{(k-r-1)}(x)S^{(k+r)}(x) = 0 \quad (r = 0,1,\cdots,k-2; x = a,b)$；

3° $f(a)S^{(2k-1)}(a+0) = f(b)S^{(2k-1)}(b-0) = 0$,

则

$$\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^k(2k-1)!\sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i). \tag{6-14}$$

推论 1　若在定理4的条件外，再设 $f(x)$ 于 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 处皆为 0，则 $\int_a^b f^{(k)}(x)S^{(k)}(x)\mathrm{d}x = 0$.

推论 2　设样条结点由(6-13)式给出，$S(x)$ 为由(6-10)式给出的自然样条函数$(n > 1)$，且设 $f(x) \in C^{n-1}[a,b]$，$f^{(n)}(x)$ 于每个区间 (x_i, x_{i+1}) 内连续 $(i = 0,1,\cdots,N)$ $(x_0 = a, x_{N+1} = b)$，则

$$\int_a^b f^{(n)}(x)S^{(n)}(x)\mathrm{d}x = (-1)^n(2n-1)!\sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i).$$

若还有 $f(x_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N)$，则

$$\int_a^b f^{(n)}(x)S^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

对于自然样条函数插值的存在、唯一性，有下面的定理.

定理 5　设 $1 \leqslant n \leqslant N$，则对任意给定的 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 存在唯一的自然样条函数 $S(x) \in R_{2n-1}(x_1, \cdots, x_N)$，使得

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 1,2,\cdots,N). \tag{6-15}$$

定理 5 从理论上指明了自然样条函数插值的存在唯一性. 这不仅有重大的理论意义，而且在实际计算中有一定的指导意义.

下面介绍自然样条函数插值的所谓最光滑性质，它是首先由 J. C. Holladay 于 1957 年给出的.

定理 6　设 $1 \leqslant n \leqslant N$，且 $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leqslant b$. 又设 $S(x) \in R_{2n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 是满足插值条件

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{6-16}$$

的自然样条函数，则对任何满足(6-16)式的函数

$$f(x) \in C^n[a,b]: f(x_j) = y_j \quad (j = 1,2,\cdots,N)$$

必有

$$\int_a^b [S^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b [f^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x, \tag{6-17}$$

且等号仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时才成立.

若于定理 6 中取 $n = 2$，则(6-17)式成为

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leqslant \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \tag{6-17)'$$

大家知道,一个函数当其一阶导数较小时,其二阶导数与其曲率值是很接近的:

$$y'' \approx \pi = y''/(1+y'^2)^{3/2}.$$

而曲率小,在几何上理解为"平滑"当然是很自然的.因此常称自然样条函数插值是最光滑曲线插值.

下面给出在理论和应用中都十分有用的**佩亚诺定理**.

设 L 表示对任意 $f(x) \in C^n[a,b]$ 定义的线性算子

$$L(f) = \sum_{r=0}^{n} \int_a^b f^{(r)}(x) d\mu_r(x). \tag{6-18}$$

定理 7(佩亚诺) 设对一切 n 次多项式 $p(x) \in H_n$,均有 $L(p) = 0$.则对所有 $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$,$L(f)$ 恒可表现为

$$L(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \quad K(t) = \frac{1}{n!} L_x[(x-t)_+^n], \tag{6-19}$$

$L_x[(x-t)_+^n]$ 表示视其中 $(x-t)_+^n$ 为 x 的函数而被 L 作用后所得结果.

函数 $K(t) = \frac{1}{n!} L_x[(x-t)_+^n]$ 称为泛函 L 的佩亚诺核.

推论 3 在定理7的假设外,若核 $K(t)$ 于 $[a,b]$ 不变号,则对一切 $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$,均有

$$L(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} L(x^{n+1}) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6-20}$$

事实上,对(6-19)式右端应用第一积分中值定理,则有

$$L(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6-21}$$

特别地,若于上式中取 $f(x) = x^{n+1}$,可知

$$L(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b K(t) dt.$$

将其代入(6-21)式即得(6-20)式.

下面讨论样条函数的插值问题:给定点列

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{N+n+1},$$

试问对于任意给定的一组实数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N+n+1}$,是否存在唯一的一个 n 次样条函数 $S(x) \in \mathscr{S}_n(x_1, x_2, \cdots, x_N)$,使得

$$S(\xi_j) = y_j \quad (j = 1,2,\cdots,N+n+1). \tag{6-22}$$

定理 8 对于 $k > 0$,行列式

$$|(\xi_i - x_j)_+^k| = \begin{vmatrix} (\xi_1 - x_1)_+^k & (\xi_1 - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_1 - x_m)_+^k \\ (\xi_2 - x_1)_+^k & (\xi_2 - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_2 - x_m)_+^k \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\xi_m - x_1)_+^k & (\xi_m - x_2)_+^k & \cdots & (\xi_m - x_m)_+^k \end{vmatrix} > 0, \tag{6-23}$$

必须且只须下述等式均满足:

$$\xi_{i-k-1} < x_i < \xi_i \quad (i = 1,2,\cdots,N). \tag{6-24}$$

定理 9 对任意给定的 $y_1,y_2,\cdots,y_{N+n+1}$ 插值问题(6-22) 均有解，必须且只须

$$\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1} \quad (i = 1,2,\cdots,N), \tag{6-25}$$

并且在这种情况下，问题(6-22) 的解还是唯一的.

由定理 8 并注意在区间$[\xi_1,\xi_{n+N+1}]$内，$S(x)$ 可表示为

$$\sum_{j=1}^{n+N+1} a_j(x-\xi_j)_+^n, \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+1} \text{ 且 } \xi_{n+j+1} = x_j.$$

因为插值问题(6-22) 是一个线代数方程组，它对任意$\{y_j\}$都有唯一解，必须且只须其相应系数行列式不等于0. 于是由定理8可知，为使对任意给定的一组 $y_1,y_2,\cdots,y_{N+n+1}$，插值问题(6-22)均有解，必须且只须(6-24)不等式成立. 再由 $\xi_{n+j+1} = x_j$ 等关系式，可知此时必须且只须(6-25) 式成立.

定理 9 从理论上完全解决了 n 次样条函数的插值问题解的存在性与唯一性问题. 无论在理论或实际应用上，它都有重要的指导意义.

推论 4 给定插值结点 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$. 考虑具有 N 个样条结点的 $n = m - N - 1$ 次样条函数，其 N 个样条结点取自 $\xi_2,\cdots,\xi_{m-1}$ 之内. 则对任何一组 $y_1,y_2,\cdots,y_m$，插值问题(6-22) 皆有唯一解.

6.2 B 样条及其性质

设

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_N < \cdots \tag{6-26}$$

$x_N \to \pm\infty (v \to \pm\infty)$，$n$ 为自然数.

定义 1
$$M_n(x;y) = n(y-x)_+^{n-1} \tag{6-27}$$

其中 x 为参数，把 $M_n(x;y)$ 作为 y 的函数，考虑其于 $y = x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的 n 阶差商 $M_n(x;x_0,\cdots,x_n)$：

$$M_n(x) = M_n(x;x_0,x_1,\cdots,x_n) = \sum_{N=0}^{n} \frac{n(x_N-x)_+^{n-1}}{\omega'(x_N)}, \tag{6-28}$$

其中
$$\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

显然 $M_n(x)$ 是一个以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为结点的 $n-1$ 次样条函数. 并且按截断多项式的定义，当 $x > x_n$ 时，$M_n(x) = 0$；又当 $x < x_0$ 时，(6-28) 式右端中的截断号"+"可以去掉，而使 $M_n(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式的 n 阶差商. 于是由差商的性质可知，此时也有 $M_n(x) = 0$. 总之

$$M_n(x) = 0, \text{当 } x \bar{\in} [x_0,x_n] \text{ 时}. \tag{6-29}$$

由佩亚诺定理，若 $f(x) \in C^n$，则

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_n} M_n(x;x_0,\cdots,x_n) f^{(n)}(x)\mathrm{d}x. \tag{6-30}$$

特别地，若取 $f(x) = x^n$，则可由上式推知

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_n(x;x_0,\cdots,x_n)\mathrm{d}x = 1. \tag{6-31}$$

定理10 $M_n^{(v)}(x)(v=0,1,\cdots,n-2)$ 于 (x_0,x_n) 内恰有 v 个不同的零点. 特别地,有 $M_n(x)>0$,当 $x\in(x_0,x_n)$ 时,$M_n(x)$ 称为 B 样条函数.

对于等距结点情况,乔恩伯里(Schoenbery)(1946)还给出了 B 样条的差分表达式. 对于以 1 为步长的等距结点情况,他给出

$$M_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2\sin u/2}{\mu}\right)^n \mathrm{e}^{iux}\mathrm{d}u = \frac{1}{(n-1)!}\delta^n x_+^n,$$

其中 δ^n 表示 n 阶中心差分.

$M_n(x)$ 的显表达式为

$$(n-1)!M_n(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x\leqslant -\frac{n}{2};\\ \left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}, & 若\ -\frac{n}{2}\leqslant x<-\frac{n}{2}+1;\\ \left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\binom{n}{1}, & \\ \left(x+\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}, & 若\ -\frac{n}{2}+1\leqslant x\leqslant -\frac{n}{2}+2;\\ \cdots & \\ \left(x+\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\binom{n}{1}\left(x+\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}+\cdots+ & \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\left(x-\frac{n}{2}+1\right)^{n-1}, & \\ & 若\ \frac{n}{2}-1\leqslant x<\frac{n}{2};\\ \delta^n x^{n-1}=0 & 若\ \frac{n}{2}\leqslant x. \end{cases}$$

特别地

$$M_1(x) = \begin{cases} 0, & 当\ x<-\frac{1}{2}\ 时;\\ 1, & 当\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\ 时;\\ 0, & 当\ \frac{1}{2}<x\ 时. \end{cases}$$

此处还须加上 $M_1(\pm\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ 的要求.

$$M_2(x) = \begin{cases} 0, & 当\ x\leqslant -1\ 时;\\ x+1, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 0\ 时;\\ -x+1, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\ 时;\\ 0, & 当\ 1\leqslant x\ 时. \end{cases}$$

$$M_3(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant -\dfrac{3}{2}\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2, & \text{当 } -\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{2}\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2, & \text{当 } -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{2}\left(-x+\dfrac{3}{2}\right)^2, & \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}\text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } \dfrac{3}{2}\leqslant x\text{ 时.}\end{cases}$$

$$M_4(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant -2\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{6}(x+2)^2, & \text{当 } -2\leqslant x\leqslant -1\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{6}(x+2)^3-\dfrac{4}{6}(x+1)^3, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 0\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{6}(-x+2)^3-\dfrac{4}{6}(-x+1)^3, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\text{ 时;}\\ \dfrac{1}{6}(-x+2)^3, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 2\text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } 2\leqslant x\text{ 时.}\end{cases}$$

它们的图形如下：

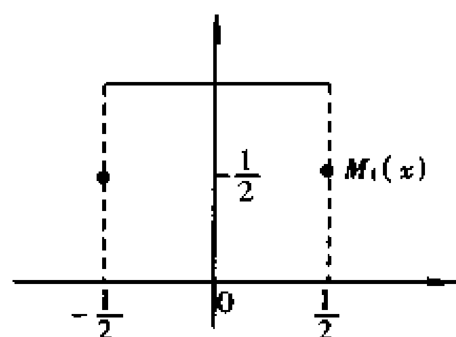


图 6-1

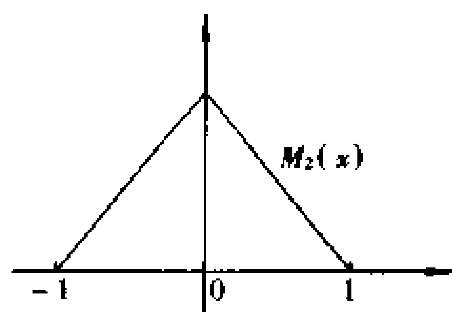


图 6-2

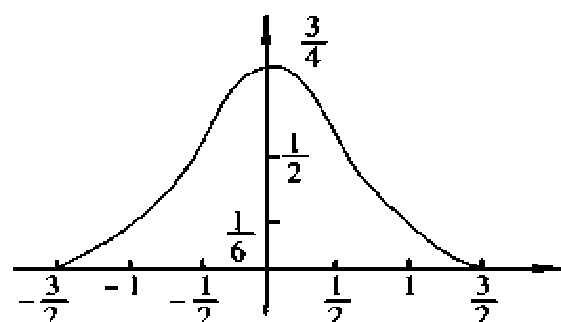


图 6-3

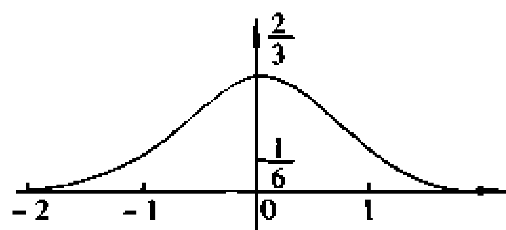


图 6-4

下面来讨论 $n-1$ 次样条函数类 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的基函数问题.由定理1,$\mathscr{S}_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 有下述一组基函数:

$$1,x,\cdots,x^{n-1},(x-x_1)_+^{n-1},\cdots,(x-x_N)_+^{n-1}, \tag{6-32}$$

它们是由 $N+n$ 个函数组成的.

由于实际计算问题的需要,下面来指出 B 样条的一个十分重要性质,即它们构成了 $\mathscr{S}_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的更为方便的基底.

引理 1 设 $x_1<x_2<\cdots<x_r$,其中 $1\leqslant r\leqslant n$,则 $M_n(x;x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 于区间 $(-\infty,x_1)$ 中为一最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式;$(-1)^{r-1}M_n(x_1,\cdots,x_r;x)$ 于区间 (A_r,∞) 中为一个最高次项系数不为零的 $n-r$ 次多项式,并且

$$\begin{aligned} M_n(x;x_1,x_2,\cdots,x_r)&=0 \quad (x\geqslant x_r);\\ (-1)^{r-1}M_n(x_1,x_2,\cdots,x_r;x)&=0 \quad (x\leqslant x_1). \end{aligned} \tag{6-33}$$

定理 11 设 $n\leqslant N$,且 $x_1<x_2<\cdots<x_N$.下述 $N+n$ 个样条函数构成 $\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的一组基函数:

$$B_i(x)=M_n(x;x_1,x_2,\cdots,x_i) \quad (i=1,2,\cdots,n);$$
$$B_{n+i}(x)=M_n(x;x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+n}) \quad (i=1,2,\cdots,N-n);$$
$$B_{N+i}(x)=(-1)^{n-i}M_n(x_{N-n+i},x_{N-n+i+1},\cdots,x_N;x).$$

推论 5 设 $n\leqslant N$,且 $x_1<x_2<\cdots<x_N$,则 B 样条函数

$$B_j(x)=M_n(x_j x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n}) \quad (j=1,2,\cdots,N-n)$$

线性无关.于是满足 $S(x)=0$,只要 $x\overline{\in}(x_1,x_N)$ 的任一 $S(x)\in\mathscr{S}_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,均可唯一地表现为

$$S(x)=\sum_{j=1}^{N-n}c_jB_j(x). \tag{6-34}$$

对于自然样条函数类 $R_{2k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$,也可以引进新的基函数组.设

$$M(x;y)=2k(y-x)_+^{2k-1}.$$

定理 12 设 $N\geqslant 2k$,且 $x_1<x_2<\cdots<x_N$,则下述 N 个自然样条函数构成自然样条函数类 $R_{2k-1}(x_1,\cdots,x_N)$ 的一组基函数:

$$B_i(x)=M(x;x_1,x_2,\cdots,x_{k+i}) \quad (i=1,2,\cdots,k),$$
$$B_{k+i}(x)=M(x;x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+2k}) \quad (i=1,2,\cdots,N-2k),$$
$$B_{N-k+i}(x)=(-1)^iM(x_{N-2k+i},\cdots,x_N;x) \quad (i=1,2,\cdots,k).$$

定理 13 若 $k\leqslant N<2k$,$x_1<x_2<\cdots<x_N$ 且多项式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_{2k-N}(x)$ 是 $2k-N-1$ 次多项式类的一组基底.则下述 N 个自然样条函数构成 $R_{2k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的一组基函数:

$$B_i(x)=M(x;x_1,\cdots,x_{k+i}) \quad (i=1,2,\cdots,N-k),$$
$$B_{N-k+i}(x)=p_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,2k-N),$$
$$B_{k+i}(x)=(-1)^{N-i}M(x_i,\cdots,x_N;x) \quad (i=1,2,\cdots,N-k).$$

定理9指出了样条函数插值问题(6-22)解存在并且唯一的充分必要条件:插值结点 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_N$ 与样条结点 $x_1<x_2<\cdots<x_N$ 之间,必须满足位置分配

关系(6-25) 式即 $\xi_i < x_i < \xi_{i+n+1}(i = 1,2,\cdots,N)$

然而当(6-34) 式满足时,为了求得满足插值条件(6-22) 的样条函数 $S(x)$,必须求解下述线代数方程组

$$S(\xi_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i\xi_j^i + \sum_{i=1}^{N} c_i(\xi_j - x_i)_+^n = y_j \quad (i = 1,2,\cdots,N + n + 1). \tag{6-35}$$

容易看出该线性方程组的系数矩阵不是稀疏矩阵.方程组(6-35) 有时甚至是病态的.

为了避免出现以上不理想情况,经常采用 B 样条作为 $\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的基底,转而来求解一个新的线性方程组

$$\sum_j C_jB_j(x_i) = y_i \quad (i = 1,2,\cdots,N + n + 1). \tag{6-36}$$

由于 $B_j(x)$ 的支集的有限性,此时系数矩阵就不会出现以上情况了.

6.3　埃尔米特插值公式

下面将介绍一种具有重(复) 结点的多项式插值方法,即埃尔米特插值方法.

设

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_s \tag{6-37}$$

$y_k^{(h)}(h = 0,1,\cdots,\alpha_{k-1};k = 1,2,\cdots,s)$ 为事先指定的实数值,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为正整数:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n + 1,\alpha_k \geqslant 1 \quad (k = 1,2,\cdots,s). \tag{6-38}$$

今欲构造一个 n 次多项式 $P(x) \in H_n$,使之满足插值条件

$$P^{(h)}(x_k) = y_k^{(h)} \quad (h = 0,1,\cdots,\alpha_{k-1};k = 1,2,\cdots,s). \tag{6-39}$$

为了解决插值问题(6-39),最直接的办法是采用待定系数法或者求解由(6-39) 式所确定的线性方程组.

此处拟采用拉格朗日插值中构造基本多项式的类似办法来解决埃尔米特插值问题(6-39).构造一批 n 次多项式 $L_{ik}(x)(i = 1,2,\cdots,s;k = 0,1,\cdots,\alpha_{i-1})$,使之满足

$$L_{ik}^{(h)}(x_m) = 0(m \neq i;h = 0,\cdots,\alpha_{m-1}) \tag{6-40}$$

和

$$L_{ik}^{(h)}(x_i) = \begin{cases}0, & 当\ h \neq k\ 时\\ 1, & 当\ h = k\ 时\end{cases} \quad (h = 0,1,\cdots,\alpha_{i-1}). \tag{6-41}$$

只要上述问题一解决,则 n 次多项式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{h=0}^{\alpha_{i-1}} y_i^{(h)}L_{ih}(x) \tag{6-42}$$

就必满足插值条件(6-39).

以下集中来构造 $L_{ik}(x)$.由(6-40) 式和(6-41) 式可知

$$L_{ik}(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}\cdots(x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x - x_i)^k(x - x_{k+1})^{\alpha_{i+1}}\cdots(x - x_s)^{\alpha_s}l_{ik}(x),$$

其中 $l_{ik}(x) \in H_{\alpha_i-k-1}$ 是某 $\alpha_i - k - 1$ 次多项式.

若令

$$\omega(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}\cdots(x - x_s)^{\alpha_s},$$

则上式可缩写为

$$L_{ik}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i - k}} l_{ik}(x). \tag{6-43}$$

为确定 $l_{ik}(x)$ 还须利用条件(6-41),而得

$$L_{ik}(x) = \frac{(x - x_i)^k}{k!}[1 + \sigma(x - x_i)^{\alpha_i - k} + \cdots]. \tag{6-44}$$

比较之有

$$l_{ik}(x) = \frac{1}{k!}\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} + \sigma'(x - x_i)^{\alpha_i - k} + \cdots$$

因为 $l_{ik}(x) \in H_{\alpha_i-k-1}$,所以它必定是函数$\frac{1}{k!}\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}$于 $x = x_i$ 处泰勒展开的前 $\alpha_i - k$ 项和.若把它 $\alpha_i - k$ 项和记为

$$l_{ik}(x) = \frac{1}{k!}\left\{\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)},$$

则由(6-43)式,应有

$$L_{ik}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}}\frac{(x - x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)},$$

从而

$$P(x) = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} y_i^{(k)}\frac{(x - x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)}\right]. \tag{6-45}$$

若于(6-39)式中取 $y_k^{(h)} = f^{(h)}(x_k)(h = 0,\cdots,\alpha_{k-1}; k = 1,2,\cdots,S)$,则相应埃尔米特插值多项式为

$$P(x) = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} f^{(k)}(x_i)\frac{(x - x_i)^k}{k!}\left\{\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(\alpha_i - k - 1)}\right]. \tag{6-46}$$

例 1 设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 1$,则插值问题(6-39)就是通常多项式样值问题.此时,按定义有

$$\left\{\frac{(x - x_i)}{\omega(x)}\right\}_{(x_i)}^{(0)} = \frac{1}{\omega'(x_i)}, \quad \omega(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_S).$$

相应于(6-46)式的埃尔米特插值多项式,恰为一般的拉格朗日插值多项式

$$P(x) = \sum_{i=1}^{S} f(x_i)\frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

例 2 设仅有一个 α 重的结点 $x = a$,则 $\omega(x) = (x - a)^{\alpha}$,而相应埃尔米特插

值多项式恰为 $f(x)$ 于 $x = a$ 点附近泰勒展开式的部分和

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

6.4　三次样条插值的计算方法

三次样条函数插值问题,除了可以采用 B 样条作基底而直接求解外,还可以直接用下述方法来求解.

设给定一区间 $[a,b]$,且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. 任意给定一组 $y_0, y_1, \cdots, y_N$,要求构造一个

$$S(x) \in \mathscr{S}_3(x_0, x_1, \cdots, x_N),$$

使得

$$S(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,N). \tag{6-47}$$

今以 M_j 表示 $S''(x_j)(j = 0,1,\cdots,N)$. 由于 $S(x)$ 为分段 3 次多项式,所以 $S''(x)$ 在区间 $[x_{j-1}, x_j]$ 上为一线性函数. 因而它可由过 (x_{j-1}, M_{j-1}) 与 (x_j, M_j) 两点的线性插值函数

$$S''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} (x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j) \tag{6-48}$$

所决定,其中 $h_j = x_j - x_{j-1}$.

为了最后求出 $S(x)$ 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的表达式,只须对(6-48)式积分两次,并定出积分常数就够了.

当 $x \in [x_{j-1}, x_j]$ 时,

$$S(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h_j},$$

$$S'(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j. \tag{6-49}$$

由(6-49)式可知,为求 $S(x)$,关键是设法确定各个 $M_j(j = 0,1,\cdots,N)$. 而为了求得各个 $M_j(j = 0,1,\cdots,N)$,必须引用样条结点处的光滑连续条件

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \tag{6-50}$$

按(6-49)式,有

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j},$$

$$S'(x_j + 0) = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}},$$

由(6-50)式可得连续性方程

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}$$

$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\quad(j=1,2,\cdots,N-1).\tag{6-51}$$

它给出了 $N+1$ 个未知数 $M_j(j=0,1,\cdots,N)$ 的 $N-1$ 个方程式,按它尚不足以唯一确定 $M_j(j=0,1,\cdots,N)$. 尚须补充两个"边界条件",这有下述几种情形.

(1) 假定 $S'(a)=y'_0,S'(b)=y'_N$. 于是按前面公式,可得方程

$$\begin{aligned}2M_0+M_1&=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y'_0\right),\\M_{N-1}+2M_N&=\frac{6}{h_N}\left(y'_N-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right).\end{aligned}\tag{6-52}$$

(2) 假定 $M_0=0,M_N=0$,这相当于自然样条函数的条件.

无论(1)或(2),均可概括为

$$\begin{cases}2M_0+\lambda_0M_1=d_0;\\\mu_NM_{N-1}+2M_N=d_N.\end{cases}\tag{6-53}$$

引入记号

$$\lambda_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}},\mu_j=1-\lambda_j\quad(j=1,2,\cdots,N-1),\tag{6-54}$$

则(6-51)式可以改写为

$$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=6\cdot\frac{[(y_{j+1}-y_j)/h_{j+1}]-[(y_j-y_{j-1})/h_j]}{h_j+h_{j+1}}$$

$$(j=1,\cdots,N-1),\tag{6-55}$$

所以由(6-53)和(6-55)式确定的线性方程组为

$$\begin{bmatrix}2&\lambda_0&&&&&0\\\mu_1&2&\lambda_1&&&&\\&\mu_2&2&\lambda_2&&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&&&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&&&\mu_{N-2}&2&\lambda_{N-2}&\\&&&&\mu_{N-1}&2&\lambda_{N-1}\\&&&&&\mu_N&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\\vdots\\M_{N-2}\\M_{N-1}\\M_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\d_1\\d_2\\\vdots\\d_{N-2}\\d_{N-1}\\d_N\end{bmatrix},\tag{6-56}$$

其中 $d_j(j=1,2,\cdots,N-1)$ 表示(6-56)式的右端项.

一个 n 次样条函数 $S(x)\in\mathscr{S}_n(x_0,x_1,\cdots,x_N)$ 如果满足条件

$$S^{(j)}(a+0)=S^{(j)}(b-0)\quad(j=0,1,\cdots,n-1),\tag{6-57}$$

则称之为以 $b-a$ 为周期的 n 次周期样条函数.

显然,对以 $b-a$ 为周期的3次周期样条函数来说,应该要求(6-55)式对 $j=N$ 的情况也成立. 如果再注意到这时的 $M_0=M_N$ 性质,而把(6-55)式中的 M_0 换成 M_N,则相应于3次周期样条函数的方程组为

$$
\begin{bmatrix}
2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_1 \\
\mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \mu_3 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & \mu_4 & & \lambda_{N-3} & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\
\lambda_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}, \tag{6-58}
$$

其中

$$
M_0 = M_N, \lambda_N = \frac{h_1}{h_N + h_1}, \mu_N = 1 - \lambda_N.
$$

线性代数方程组(6-56)常可采用追赶法来求解.而方程组(6-58)则可把 M_N 先作为参量,求解其中前 $N-1$ 个方程中的 $N-1$ 个未知数 $M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}$(其解依赖于 M_N),然后代入最后一个方程以求出 M_N,同时 $M_1, M_2, \cdots, M_{N-1}$ 也随之确定了.

为使读者使用方便,下面简要介绍有关具体计算程序.

(6-56)式是一个以三对角矩阵为系数矩阵的线性代数方程组.其一般形式为

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & & 0 \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
0 & & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{6-59}
$$

其计算程序为先形成 $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$:

$$
\begin{cases}
p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0); \\
q_k = -c_k / p_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n; \\
u_k = (d_k - a_k u_{k-1}) / p_k \quad (u_0 = 0).
\end{cases}
$$

然后按下述关系式逐一推算各 x_j 的值:

$$
\begin{cases}
x_k = q_k x_{k+1} + u_k (k = 1, 2, \cdots, n-1); \\
x_n = u_n.
\end{cases} \tag{6-60}
$$

方程组(6-58)的一般形式为

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & a_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
c_n & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \tag{6-61}
$$

其计算程序为先按(6-59)计算出 $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ 和 $\{u_k\}$.

再按下述公式算出$\{t_k\}$和$\{v_k\}$:

$$\begin{cases} s_k = -a_k s_{k-1}/p_k & (s_0 = 1); \\ t_k = q_k t_{k+1} + s_k & (t_n = 1); \\ v_k = q_k v_{k+1} + u_k & (v_n = 0). \end{cases} \tag{6-62}$$

接着从方程

$$c_n(t_1 x_n + v_1) + a_n(t_{n-1}x_n + v_{n-1}) + b_n x_n = d_n \tag{6-63}$$

中解出 x_n,最后由递推关系式

$$x_k = t_k x_n + v_k \quad (k = 1, \cdots, n-1) \tag{6-64}$$

逐个求得 $x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1$.

7 非线性逼近

7.1 非线性一致逼近

讨论如下有理分式

$$R_{mn}(x) = \frac{p_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{7-1}$$

其中 $p_m(x) \in H_m$, $Q_n(x) \in H_m$ 分别为x的m, n次多项式.设 $R_{m,n}(x)$ 是既约有理分式,即 $p_m(x)$ 与 $Q_n(x)$ 互质.

设 $f(x)$ 是有界闭区间$[a,b]$上的连续函数.定义偏差函数 $f(x) - R_{m,n}(x)$ 的绝对值的上确界为 $R_{mn}(x)$ 与 $f(x)$ 的最大偏差,简称为偏差:

$$\Delta(R_{m,n}) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - R_{mn}(x)|. \tag{7-2}$$

又定义

$$\rho_{mn}(f) = \inf_{R_{m,n}} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - R_{mn}(x)| \tag{7-3}$$

为(7-1)式形有理分式类$\{R_{m,n}(x)\}$对给定函数 $f(x)$ 的最佳逼近或最小偏差.

关于偏差的下界估计有下面定理.

定理 1(费尼 - 波辛(Vallé-Poussin)) 设多项式

$$A(x) = a_0 x^{m-\mu} + \cdots + a_{m-\mu}, \quad B(x) = b_0 x^{n-\nu} + \cdots + b_{n-\nu}$$

互质,其中 $\theta \leqslant \mu \leqslant m, 0 \leqslant v \leqslant n, a_0 \neq 0$,且设 $R(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ 于$[a,b]$区间上为有穷,差函数 $f(x) - R(x)$ 在$[a,b]$中的点列

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

上以正负交错的符号取异于0的值

$$\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, (-1)^{N-1}\lambda_N$$

(不妨假定各个 $\lambda_j > 0$).而且 $N = m + n - d + 2, d = \min(u, v)$,则对每一形如(7-1)式的函数 $R(x)$,恒有

$$\Delta(Q) \geqslant \min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}. \tag{7-4}$$

当 $R(x) \equiv 0$ 且 $N = m + 2$(即 $d = n$)时,此不等式仍然成立.

定理 2 在所有形如(7-1)式的有理分式中,至少存在一个有理分式 $R(x)$,使得

$$\Delta(Q) = \min.$$

根据定理2,存在(7-1)式形的有理分式 $R(x)$,使得

$$\Delta(R) = \rho_{mn}(f), \tag{7-5}$$

其中 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数.称满足(7-5)式的有理分式为 $f(x)$ 于(7-1)式所示有理分式类中的最佳一致逼近有理分式.下面契贝谢夫(Чебышев)定理对最佳一致逼近有理分式的特征作精确描述.

定理 3 形如(7-1)式的有理分式函数中在 $[a, b]$ 上与 $f(x)$ 偏差最小的有理分式 $P(x)$ 由下述特征所唯一确定.

若将 $P(x)$ 写成

$$P(x) = \frac{b_0 x^{m-\mu} + b_1 x^{m-\mu-1} + \cdots + b_{m-\mu}}{a_0 x^{n-v} + a_1 x^{n-v-1} + \cdots + a_{n-v}} = \frac{B(x)}{A(x)},$$

其中 $A(x)$, $B(x)$ 互质, $a_0 \neq 0, 0 \leqslant \mu \leqslant m, 0 \leqslant v \leqslant n$.则在 $[a, b]$ 上使 $f(x) - P(x)$ 以正负交错的符号达到 $\Delta(P)$ 的点列之点数 $N \geqslant m + n - d + 2$,其中 $d = \min(\mu, v)$.若 $P(x) \equiv 0$,则 $N \geqslant m + 2$.

诺伊曼(D. J. Newman)曾经讨论了 $|x|$ 有理逼近的误差估计问题.下面介绍有关结果.

若 $r_n(x)$ 是两个 n 次互质多项式的商

$$r_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \quad (-\infty < x < \infty),$$

则称 $r_n(x)$ 为 n 阶有理函数.定义

$$\rho_n(f) = \inf_{r_n} \sup_{x \in A} |f(x) - r_n(x)|,$$

其中 A 为实数集合, $r_n(x)$ 取遍一切 n 阶有理函数.根据关于函数类的"宽度"的研究可知,对于性质较好的函数来说,有理逼近的优越性不大.然而,对于有较小奇异性的函数,有理逼近却非常有效.下面来考察函数 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1, 1] = A$ 上用 n 阶有理函数逼近的误差估计问题.诺伊曼证明了下述定理.

定理 4 当 $n \geqslant 5$ 时,恒有

$$\rho_n(|x|) \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}. \tag{7-6}$$

诺伊曼还证明了

$$\rho_n(|x|) \geqslant \frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \quad (n \geqslant 5). \tag{7-7}$$

综合(7-6)式与(7-7)式,可知

$$\frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \leqslant \rho_n(|x|) \leqslant 3e^{-\sqrt{n}} \quad (n \geqslant 5). \tag{7-8}$$

它比 $f(x) = |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最佳 n 次多项式逼近的误差阶 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 要优越得

多.

诺伊曼的不等式(7-8)可以用来估计某些函数的有理逼近的误差阶.

7.2 有理函数插值

给定 $m+n+1$ 个互异的点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{m+n}$ 和相应的函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_{m+n})$,希望构造一个有理分式函数

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}=\frac{a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0} \tag{7-9}$$

使之满足插值条件

$$R_{m,n}(x_j)=f(x_j)\quad (j=0,1,\cdots,m+n). \tag{7-10}$$

这种问题就是所谓**有理函数插值问题**.

显然,当分母次数 $n=0$ 时,$R_{m,n}(x)$ 是一个 m 次的多项式,从而插值问题(7-10)的解存在并且唯一.但是,当 $n>0$,即(7-9)式所示的 $R_{mn}(x)$ 真正是一个有理分式函数时,插值问题(7-10)是否对任何右端 $\{f(x_j)\}$ 皆有唯一解存在呢?

例1 设 $m=0$,$f(x_j)=0$,$f(x_k)\neq 0$,则

$$R_{0,n}(x)=\frac{a_0}{b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0}.$$

于是由 $R_{0,n}(x_j)=0$ 推知 $a_0=0$.但当 $a_0=0$ 时,显然 $R_{0,n}(x_k)\neq 0$ 不成立,故此时相应插值问题无解.

例2 设 $m=n=1$,且 $f(x_1)=f(x_2)\neq f(x_3)$.则由相应插值条件,必有 $\frac{a_1x_1+a_0}{b_1x_1+b_0}=\frac{a_1x_2+a_0}{b_1x_2+b_0}$.于是

$$(a_0b_1-a_1b_0)(x_2-x_1)=0.$$

而 $x_1\neq x_2$,从而 $a_0b_1=a_1b_0$.

若 $b_1=0$,则 $R_{1,1}(x)$ 退化为一次多项式,既然 $R_{1,1}(x)$ 于 $x=x_1,x_2$ 处的值一样(假定),说明 $y=R_{1,1}(x)$ 是一条平行于 x 轴的直线.当然也就不可能满足 $R_{1,1}(x_3)\neq f(x_2)$ 了.所以不妨设 $b_1\neq 0$.于是 $a_0=\frac{a_1b_0}{b_1}$,从而

$$R_{1,1}(x)=\frac{a_1x+a_0}{b_1x+b_0}=\frac{a_1x+a_1b_0/b_1}{b_1x+b_0}=\frac{a_1(b_1x+b_0)}{b_1(b_1x+b_0)}=\frac{a_1}{b_1}=\text{const}.$$

这样一来,又不可能满足插值条件中所要求的条件 $R_{1,1}(x_1)\neq R_{1,1}(x_3)$ 了.总之,本例所示有理插值问题的解不存在.

为便于讨论,要引进一些定义.如果存在一个非零常数 a,使得

$$P_2(x)=aP_1(x),\quad Q_2(x)=aQ_1(x),$$

则两个有理分式

$$R_1(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\quad R_2(x)=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \tag{7-11}$$

称为恒等,此时常记 $R_1(x) \equiv R_2(x)$.

如果

$$P_1(x)\cdot Q_2(x) \equiv P_2(x)\cdot Q_1(x),$$

则(7-11)式所示两有理分式 $R_1(x),R_2(x)$ 称为等价的.此时常记 $R_1(x)\sim R_2(x)$.

对于此处所定义的关系 ~,显然有下列三性质:

1° $R(x)\sim R(x)$;

2° $R(x)\sim Q(x),Q(x)\sim S(x)$,则 $R(x)\sim S(x)$;

3° $R(x)\sim Q(x)$,则 $Q(x)\sim R(x)$,

所以 ~ 是一种等价关系.

显然可知,两有理分式 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 等价,必须且只须 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 的最简(既约)有理分式 $\bar{R}_1(x)$ 和 $\bar{R}_2(x)$ 恒等.

今后只要两有理分式等价,则认为它们是同一个有理分式,而不加以区别.有理函数插值的唯一性也是在这种意义上说的.

定理5 插值问题(7-10)若有解,则必唯一.

定理5说明对于有理数插值来说,关键的问题是存在性和具体解法.

当(7-9)式所示的有理分式 $R_{m,n}(x)$ 满足插值条件(7-10)时,只要分母 $D_n(x_j)\neq 0(j=0,2,\cdots,m+1)$,就应有

$$N_m(x_j)-f(x_j)D_n(x_j)=0 \quad (j=0,1,\cdots,m+n). \tag{7-12}$$

它是一个关于系数 $a_m,\cdots,a_0,b_n,\cdots,b_0$ 的线性代数方程组.这当然比非线性方程组(7-10)要容易求解了.

那么,(7-10)式在什么条件下会与(7-12)式等价呢?下面定理6对这个问题作了明确的回答.

定理6 设线性方程组(7-12)有非平凡解.为使满足插值条件(7-10)的最简有理分式 $R_{m,n}(x)=\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 存在,必须且只须(7-12)式的任一非平凡解 $N_m^*(x)$,$D_n^*(x)$ 在约去一切公共因子后,所得的互质多项式 $A(x),B(x)$ 仍然是(7-12)式的解,即

$$A(x_j)-f(x_j)B(x_j)=0 \quad (j=0,1,\cdots,m+n).$$

定理6建立了(7-10)式与(7-12)式等价的充分必要条件.然而由于所给条件仍不便于检验,所以马康(N. Macon)与杜普利(D. E. Dupree)还给出了便于检验的条件.

定理7 设$(x_j,y_j)(j=0,2,\cdots,m+n)$中各 $x_j(j=0,2,\cdots,m+n)$是互异的.为使满足插值条件(7-10)的最简有理分式

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}$$

存在,必须且只须下述各矩阵

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0 y_0 & \cdots & x_0^{n-1} y_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{j-1} & x_{j-1}^2 & \cdots & x_{j-1}^{m-1} & y_{j-1} & x_{j-1} y_{j-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} y_{j-1} \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdots & x_{j+1}^{m-1} & y_{j+1} & x_{j+1} y_{j+1} & \cdots & x_{j+1}^{n-1} y_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n} y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1} y_{m+n} \end{bmatrix} \tag{7-13}$$

都是非奇异的,其中 $y_j = f(x_j)(j = 0,2,\cdots,m+n)$.

H.Salzer讨论了切触有理插值问题.设 $N(x)$,$D(x)$ 是 x 的二个多项式,$x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是互异实数,$f^{(j)}(x_i)$,$j = 0,1,\cdots,S_{j-1}$ 为一批给定的数.所谓切触有理插值,就是确定 $N(x)$ 和 $D(x)$ 的系数,使得

$$\frac{d^j}{dx^j}\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]\bigg|_{x=x_i} = f^{(j)}(x_i) \tag{7-14}$$

$$(j = 0,1,2,\cdots,s_{i-1};i = 1,2,\cdots,r).$$

若 $d = \sum_{i=1}^{r} s_i$,通常取 $N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数相等或接近相等.即当 d 为奇数时,$N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数皆取成$[\frac{d}{2}]$;当 d 为偶数时,$N(x)$ 和 $D(x)$ 的次数则分别取$[\frac{d}{2}]$和$[\frac{d}{2}]-1$.

设 $D(x_i) \neq 0$,一般有理函数插值问题

$$\frac{N(x_i)}{D(x_i)} = f(x_i) \quad (i = 1,2,\cdots,r)$$

自然等价于 $N(x_i) = [D(x)f(x)]_{x=x_i}(i = 1,2,\cdots,r)$.

一阶切触插值

$$\frac{N(x)}{D(x)}\bigg|_{x=x_i} = f(x_i), \quad \left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]'_{x=x_i} = f'(x_i) \tag{7-15}$$

可以表示为

$$N(x_i) = [D(x)f(x)]_{x=x_i}, \quad \frac{N'(x_i)}{D(x_i)} - \frac{N(x_i)D'(x_i)}{[D(x_i)]^2} = f'(x_i). \tag{7-16}$$

后一等式中又可以 $f(x_i)$ 代替 $\frac{N(x_i)}{D(x_i)}$,然后用 $D(x_i)$ 遍乘而化为 $N'(x_i) = f(x_i)D'(x_i) + f'(x_i)D(x_i)$.因而(7-15)式最后化成

$$\begin{aligned} N(x_i) &= [D(x)f(x)]_{x=x_i}, \\ N'(x_i) &= [D(x)f(x)]'_{x=x_i}. \end{aligned} \tag{7-17}$$

完全类似地,二阶切触有理插值可转化为

$$\begin{cases} N(x_i)=[D(x)f(x)]_{x=x_i},N'(x_i)=[D(x)f(x)]'_{x=x_i}, \\ N''(x_i)=[D(x)f(x)]''_{x=x_i}. \end{cases} \tag{7-18}$$

一般情况下,是否也可把有理切触插值

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i)\quad(m=0,1,\cdots,s_{i-1}) \tag{7-19}$$

化成等价形式(当 $D(x_i)\neq 0$ 时)呢?这里

$$N^{(m)}(x_i)=\frac{d^m}{dx^m}(D(x)f(x))_{x=x_i}\quad(m=0,1,\cdots,s_{i-1}). \tag{7-20}$$

回答是肯定的.这可以用数学归纳法来证明.事实上,由前面的分析,已知当 $r=s_i-1=0,1$ 时,(7-19) 式和(7-20) 式是等价的.今设当 $r=s-1$ 时,(7-19) 式和(7-20) 式是等价的.当 $r=s$ 时,它们也是等价的.其实只须证明

$$\frac{ds}{dx^s}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)_{x=x_i}=f^{(s)}(x_i), \tag{7-21}$$

$$N^{(s)}(x_i)=\frac{d^s}{dx^s}(D(x)f(x))_{x=x_i} \tag{7-21'}$$

等价就够了.

设上式成立.则由莱布尼兹公式,有

$$N^{(s)}(x_i)=\frac{d^s}{dx^s}(D(x)f(x))=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}f^{(k)}(x_i)D^{(s-k)}(x_i), \tag{7-22}$$

$$\begin{aligned} N^{(s)}(x_i)&=\left[\frac{N(x)}{D(x)}D(x)\right]^{(s)}_{x=x_i} \\ &=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^{(k)}_{x=x_i}D^{(s-k)}(x_i). \end{aligned} \tag{7-23}$$

由归纳法假设,(7-23) 式右端中用 $\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]^{(k)}_{x=x_i}(k=0,1,\cdots,s-1)$,与上两式右端比较,即知

$$f^{(s)}(x_i)=\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]^{(s)}_{x=x_i},$$

也即(7-21) 式成立.

反之,假定(7-21) 式成立.则由(7-23) 式,有

$$\begin{aligned} N^{(s)}(x_i)&=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^{(k)}_{i}D^{(s-k)}(x_i) \\ &=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}f^{(k)}(x_i)D^{(s-k)}(x_i) \\ &=[f(x)D(x)]^{(s)}_{x=x_i}, \end{aligned}$$

即(7-21)' 式成立.

定理 8 设 $D(x_i)\neq 0$,则有理切触插值问题

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i)\quad(m=0,1,\cdots,s_{i-1})$$

与下述线性问题

$$N^{(m)}(x_i)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m[D(x)f(x)]_{x=x_i}\quad(m=0,1,\cdots,s_{i-1})$$

是等价的.

若把定理 8 中的微商换成有限差(等距情况)或差商,则可以建立类似的定理.另外,当 $N(x)$ 与 $D(x)$ 不是普通多项式,而是广义多项式时,定理 8 也是照样成立的.

由定理 8 可知,只要各个 $D(x_i)\neq 0$,则有理切触插值问题(7-14)便等价于线性方程组

$$N^{(m)}(x_i)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m[D(x)f(x)]_{x=x_i}\tag{7-24}$$

$$(m=0,1,\cdots,s_{i-1};i=1,\cdots,r).$$

下面用定理 8 来具体讨论有理切触插值的构造问题. Salzer 具体讨论了下述连分式作为有理分式

$$\begin{aligned}\frac{N(x)}{D(x)}=a_{1,0}+&\frac{x-x_1}{a_{1,1}}+\frac{x-x_1}{a_{1,2}}+\cdots+\frac{x-x_1}{a_{1,s_1-1}}+\\&\frac{x-x_1}{a_{2,0}}+\frac{x-x_2}{a_{2,1}}+\cdots+\frac{x-x_2}{a_{2,s_2-1}}+\\&\frac{x-x_2}{a_{3,0}}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{a_{r,0}}+\frac{x-x_n}{a_{r,1}}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_{r,s_r-1}}.\end{aligned}\tag{7-25}$$

为讨论方便,先介绍一些有关分式的预备知识:

1° 连分式 $b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{+b_n+}\cdots$ 表示

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{\ddots}{\qquad+\cfrac{a_n}{b_n+\ddots}}}}\tag{7-26}$$

2° 分式 $\frac{a_n}{b_n}$ 称为连分式(7-26)的第 n 节;a_n 与 b_n 称为连分式(7-26)的第 n 节的两项;$a_1,a_2,\cdots$ 称为连分式(7-26)的部分分子;$b_1,b_2,\cdots$ 称为连分式(7-26)的部分分母;有限连分式

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots\frac{a_n}{+b_n}=\frac{P_n}{Q_n}$$

称为连分式(7-26)的第 n 个渐近分式.

3° 相邻三个渐近分式之间有递推关系式

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}; \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}. \end{cases} \tag{7-27}$$

事实上,按连分式的定义

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

$$= \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0}.$$

这说明当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时,(7-27) 式成立(已人为地取定 $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0$). 设递推公式(7-27) 对 n 已成立,即

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}}.$$

须证当 n 换为 $n+1$ 时,(7-27) 式也成立. 注意从 $\frac{P_n}{Q_n}$ 变到 $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ 应以 $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 代替 b_n,于是

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{b_n P_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}} = \frac{b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}},$$

所以对一切正整数 n 而言,递推公式(7-27) 恒成立(其中 $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0$).

下面回过头来继续讨论(7-25) 所述 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 的切触插值问题. 假设 $a_{1,0}, a_{1,1}, \cdots, a_{i-1, s_i-1} - 1$ 已经求出,于是由(7-25) 式可以求出它的渐近分式 $\frac{P_{t-1}(x)}{Q_{t-1}(x)}, \frac{P_{t-2}(x)}{Q_{t-2}(x)}$, 此处 $t - 1 = \sum_{j=1}^{i-1} s_j$. 根据递推关系(7-27),有

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{R_i(x) P_{t-1}(x) + (x - x_{i-1}) P_{t-2}(x)}{R_i(x) Q_{t-1}(x) + (x - x_{i-1}) Q_{t-2}(x)}, \tag{7-28}$$

其中

$$R_i(x) = a_{i,0} + \frac{x - x_i}{a_{i,1}} + \frac{x - x_i}{a_{i,2}} + \cdots + \frac{x - x_i}{a_{i,s_i-1}} + \frac{x - x_i}{a_{i+1,0}} + \frac{x - x_{i+1}}{a_{i+1,1}} + \cdots + \frac{x - x_n}{a_{n,s_n-1}}. \tag{7-29}$$

当按(7-28) 式所示的 $\frac{N(x)}{D(x)}$ 和切触条件(7-14)(其中 $x = x_i$) 来确定 $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,s_i-1}$ 时(共 s_i 个条件),$R_i(x)$ 表达式中的项

$$\frac{x-x_i}{a_{i+1,0}}+\frac{x-x_{i+1}}{a_{i+1,1}}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_{n,s_n-1}}$$

是可以忽略的.若记

$$\frac{S_i(x)}{T_i(x)}=a_{i,0}+\frac{x-x_i}{a_{i,1}}+\frac{x-x_i}{a_{i,2}}+\cdots+\frac{x-x_i}{a_{i,s_i-1}},$$

则由定理 8, $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 两多项式的系数应该满足

$$\begin{aligned}&\{S_i(x)P_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)P_{t-2}(x)\}^{(m)}\big|_{x=x_i}\\&=[f(x)\{S_i(x)Q_{t-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)Q_{t-2}(x)\}]^{(m)}\big|_{x=x_i}\\&\qquad(m=0,1,\cdots,s_{i-1}).\end{aligned}\tag{7-30}$$

由此求出$\frac{S_i(x)}{T_i(x)}$表达式中的各系数 $a_{i,0},a_{i,1},\cdots,a_{i,s_n-1}$. 于是(7-29) 式的渐近分式 $\frac{P_t(x)}{Q_t(x)},\frac{P_{t+1}(x)}{Q_{t+1}(x)},\cdots$ 可按递推公式

$$P_{t+k}(x)=a_{i,k}P_{t+k-1}(x)+\left.\begin{matrix}(x-x_{i-1})\\(x-x_i)\end{matrix}\right\}P_{t+k-2}(x)\qquad\begin{matrix}\text{当 }k=0\text{ 时;}\\\text{当 }k=1,\cdots,s_i-1\text{ 时,}\end{matrix}\tag{7-31}$$

$$Q_{t+k}(x)=a_{i,k}Q_{t+k-1}(x)+\left.\begin{matrix}(x-x_{i-1})\\(x-x_i)\end{matrix}\right\}Q_{t+k-2}(x)\qquad\begin{matrix}\text{当 }k=0\text{ 时;}\\\text{当 }k=1,\cdots,s_i-1\text{ 时}\end{matrix}$$

来逐个确定.用 $i+1$ 替代 i,用 $t+s_i$ 替代 t 可重复上述各步骤…当具有较小的 s_i 值时,比如 $s_i=2,s_{i+1}=3,\cdots$,则立即可以较方便地在多个点处应用公式(7-30).

欧拉 - 麦丁(Euler-Minding) 曾经推导出关于有限连分式$\frac{S_i(x)}{N_i(x)}$的具体有理分式表达:

$$\begin{aligned}S_i(x)=a_0a_1\cdots a_{s_i-1}+[1&+\sum_{0\le j\le s_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1}+\\&\sum_{0\le j<k\le s_i-3}\sum(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}+\\&\sum_{0\le j<k<l\le s_i-4}\sum\sum(x-x_i)^3/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}a_{l+2}a_{l+3}+\cdots]\end{aligned}\tag{7-32}$$

和

$$\begin{aligned}T_i(x)=a_1a_2\cdots a_{s_i-1}[1&+\sum_{1\le j\le s_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1}+\\&\sum_{1\le j<k\le s_i-3}\sum(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}+\cdots],\end{aligned}$$

其中 $a_j(j=0,1,\cdots,s_i-1)$ 表示 $a_{i,j}(j=0,1,\cdots,s_i-1)$.

具体写出,可列表 7-1.

表 7-1

S_i	$S_i(x)$	$T_i(x)$
1	a_0	1
2	$a_1a_0 + (x - x_i)$	a_1
3	$a_2a_1a_0 + (a_2 + a_0)(x - x_i)$	$a_2a_1 + (x - x_i)$
4	$a_3a_2a_1a_0 + (a_3a_2 + a_3a_0 + a_1a_0) \times$ $(x - x_i) + (x - x_i)^2$	$a_3a_2a_1 + (a_3 + a_1)(x - x_i)$
5	$a_4a_3a_2a_1a_0 + (a_4a_3a_2 + a_4a_3a_0 +$ $a_4a_1a_0 + a_2a_1a_0)(x - x_i) +$ $(a_4 + a_2 + a_0)(x - x_i)^2$	$a_4a_3a_2a_1 + (a_4a_3 + a_4a_1 + a_2a_1) \times$ $(x - x_i) + (x - x_i)^2$
6	$a_5a_4a_3a_2a_1a_0 + (a_5a_4a_3a_2$ $+ a_5a_4a_3a_0 + a_5a_4a_1a_0 +$ $a_3a_2a_1a_0)(x - x_i) + (a_5a_4 + a_5a_2 +$ $a_5a_0 + a_3a_2 + a_3a_0 + a_1a_0)(x - x_i)^2 +$ $(x - x_i)^3$	$a_5a_4a_3a_2a_1 + (a_5a_4a_3 +$ $a_5a_4a_1 + a_5a_2a_1 + a_3a_2a_1)(x - x_i)$ $+ (a_5 + a_3 + a_1)(x - x_i)^2$

7.3　帕德逼近方法

一个函数的泰勒级数展开的系数同该函数值的关系问题，既是一个有深刻意义的数学问题，又是一个重要的实际问题．它是数学分析研究的基础，又是遍及许多物理和生物学中数学模型的实际计算基础．如所知，如果一个泰勒级数展开绝对收敛，则它唯一确定一函数的值，且该函数任意次可微．反之，如果一个函数任意次可微，则它也唯一确定一个泰勒级数展开．此时实际上可以用多项式来逼近给定的函数．当然这种功能是有一定限度的．考虑

$$f(x) = \left(\frac{1 + 2x}{1 + x}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{13}{16}x^3 - \frac{141}{128}x^4 + \cdots \tag{7-33}$$

容易看到当 $x > 1/2$ 时，上述泰勒级数是不收敛的．当然也就不能用它来计算 $f(\infty) = \sqrt{2}$ 了！

如果作变量替换 $x = \dfrac{\omega}{1 - 2\omega}$ 或 $\omega = \dfrac{x}{1 + 2x}$，则

$$f(x(\omega)) = (1 - \omega)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{8}\omega^2 + \frac{5}{16}\omega^3 + \frac{35}{128}\omega^4 + \cdots \tag{7-34}$$

于 $\omega = \dfrac{1}{2}(x = \infty)$ 处是收敛的．取泰勒级数(7-34)的前 n 个截断多项式于 $\omega = \dfrac{1}{2}$ 的值，即可得 $\sqrt{2} = f(\infty)$ 的近似值

$$1,\ 1.125,\ 1.343\,75,\ 1.382\,81,\ 1.399\,90,\cdots \tag{7-35}$$

还原于原先的变量 x，则(7-34)式的前几个关于 ω 的截断多项式，正是 x 的下列有

理分式

$$1,\ \frac{1+(5/2)x}{1+2x},\ \frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{(1+2x)^2},\cdots \tag{7-36}$$

下面考虑获取由泰勒级数展开式(7-33)所定义函数 $f(x)$ 的其他有理分式逼近的一种重要方法——**帕德(Padé)逼近方法**.

考虑 $f(x)$ 的这样一种有理分式逼近$(a+bx)(c+dx)$,使其泰勒级数展开的前三项同(7-33)式的前三项相重合,于是求得

$$\frac{1+(7/4)x}{1+(5/4)x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{25}{32}x^3-\frac{125}{128}x^4+\cdots \tag{7-37}$$

按它算出$\sqrt{2}=f(\infty)\approx 1.4$,它比(7-35)式所给近似为好.考虑$f(x)$的下述有理分式:

$$(a+bx+cx^2)/(d+ex+hx^2),$$

使其泰勒级数展开的前五项同(7-33)式的前五项相重合,则得到

$$\frac{1+(13/4)x+(41/16)x^2}{1+(11/4)x+(29/10)x^2}. \tag{7-38}$$

由它算得$\sqrt{2}=f(\infty)\approx\frac{41}{29}=1.413\ 793\ 103$.往下,按同样思路分别考虑分子(母)为3次、4次和5次多项式之有理分式,使其泰勒级数展开与(7-33)式的前七项、九项和十一项相重合.于是相应求得$\sqrt{2}=f(\infty)$的下述近似值:

$$1.414\ 201\ 183,1.414\ 213\ 198\ 和\ 1.414\ 213\ 552. \tag{7-39}$$

$\sqrt{2}$同最后一近似的误差仅为10^{-8}.足见这种算法还是很优越的.由此即可引导出一般的帕德逼近方法.

设 $f(x)$ 是由下述形式幂级数所定义:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j. \tag{7-40}$$

$f(x)$ 的$[L/M]$帕德逼近为

$$[L/M]=\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \tag{7-41}$$

其中 $P_L(x)\in H_L,Q_M(x)\in H_M$ 分别为次数不超过 L,M 的多项式.(7-41)式中 $P_L(x)$ 和 $Q_M(x)$ 的系数,按下述方程来确定:

$$f(x)-\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}=O(x^{L+M+1}). \tag{7-42}$$

因为一个有理分式的分子、分母同乘一常数其值不变,所以特地要求分母 $Q_M(x)$ 满足标准化条件

$$Q_M(0)=1.0. \tag{7-43}$$

最后要求 $P_L(x)$ 与 $Q_M(x)$ 无公共因子存在.若记

$$\begin{cases}P_L(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_Lx^L;\\Q_M(x)=1+q_1x+\cdots+q_Mx^M,\end{cases} \tag{7-44}$$

则由标准化条件(7-43),可用 $Q_M(x)$ 遍乘(7-42)式,以线性化系数方程. 于是比较系数可得线性方程组

$$\begin{cases} a_0 & = p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 & = p_1, \\ a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 & = p_2, \\ & \cdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \cdots + a_0 q_L & = p_L, \\ a_{L+1} + a_L q_1 + \cdots + a_{L-M} q_M & = 0, \\ & \cdots \\ a_{L+M} + a_{L+M} q_1 + \cdots + a_L q_M & = 0, \end{cases} \tag{7-45}$$

其中已规定

$$a_n = 0(\text{当 } n < 0), q_j = 0(\text{当 } j > M).$$

为方便计,记

$$L + M = N, L - M = J. \tag{7-46}$$

弗洛比尼斯和帕德曾采用条件 $Q_M(x) \neq 0$ 来替代标准化条件(7-43). 这两类条件显然是不相同的. 事实上,作为例子考虑 $f(x) = 1 + x^2 + \cdots$ 对于 $L = M = 1$,容易验证

$$P_1(x) = Q_1(x) = x, \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = 1,$$

满足

$$Q_M(x) f(x) - P_L(x) = O(x^{N+1}),$$

而不满足(7-42)式. 按定义,该幂级数的[1/1]逼近是不存在的.

下面的唯一性定理,无论按那种规定都是成立的.

定理 9(弗洛比尼斯 - 帕德)　对于任意形式幂级数 $f(x)$,若其[L/M]帕德逼近存在,则必唯一.

常把一函数 $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ 的帕德逼近列成一张所谓"帕德"表.

[0/0]	[0/1]	[0/2]	[0/3]	…
[1/0]	[1/1]	[1/2]	[1/3]	…
[2/0]	[2/1]	[2/2]	[2/3]	…
[3/0]	[3/1]	[3/2]	[3/3]	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

大量具体算例表明,在 $N = L + M$ 为一确定常数时,所有各可能的[L/M]帕德逼近中,以 L 和 M 相等或接近相等者为最精确. 比如,当 $N = 2n$ 时,应该采用[n/n]帕德逼近;当 $N = 2n + 1$ 时,应该采用[(n+1)/n]或[n/(n+1)]帕德逼近. 总而言之,应该采用帕德逼近表的主对角或主对角线附近的帕德逼近.

为了得到比(7-46)式更为紧凑的表现形式,于(7-46)式右端分子和分母两行列式中,均以第 1 列各元素减去第 2 列相应元素的 x 倍;以第 2 列各元素减去第 3 列相应元素的 x 倍;… 则按行列式性质,其值是不变的,即得出

$$[L/M]=\frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M}\\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^{L}a_jx^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}. \tag{7-47}$$

按行列式性质,上式分母以最后一列,展开即可化为一个 M 阶行列式;同时对分子上的行列式施以变换:以 x^{j-M-1} 乘其第 j 列($j=1,2,\cdots,M$),然后将它们统统加到最后一列,则得到

$$[L/M]=\frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L-M+1}x^{-M}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_lx^{-M}\\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum_{j=0}^{L-M}a_jx^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} \end{vmatrix}}, \tag{7-48}$$

再将(7-48)式的分子上的行列式按最后一行作拉普拉斯展开,并且除 $\sum_{j=0}^{L-M}a_jx^j$ 的代数余子式外,其他各余子式均又按其最后一列作拉普拉斯展开,则由逆矩阵的标准定义可知

$$[L/M]=\sum_{j=0}^{L-M}a_jx^j+x^{L-M+1}\{w^{\mathrm{T}}(L/M)w^{-1}(L/M)w(L/M)\}, \tag{7-49}$$

其中 $w^{-1}(L/M)$ 是下述矩阵的逆矩阵

$$w(L/M)=\begin{bmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} \end{bmatrix}, \tag{7-50}$$

而

$$w(L/M)=(a_{L-M+1},a_{L-M+2},\cdots,a_L)^{\mathrm{T}}. \tag{7-51}$$

如果 $j<0$,则规定 $a_j=0$. 当 $L<M$ 时,(7-49)式中的和式 $\sum_{j=0}^{L-M}a_jx^j=0$. 纵使当 $M>L+1$ 时,出现 x 的负幂,等式(7-49)照样成立.

按照同样的方法也可得到另一种紧凑表达式

$$\frac{x[2/4]-\tanh\mu x}{\tanh\mu x}=\frac{1}{Q_4(x)}\frac{P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\tanh\mu x}{x}}{\dfrac{\tanh\mu x}{x}}.$$

以 $-\dfrac{\mu^9x^8}{99\ 225}$ 近似替代上式右端的分子，则相对误差函数近似为

$$\Delta=\frac{\left(-\dfrac{\mu^9}{99\ 225}x^8\right)}{Q_4(x)\dfrac{\tanh\mu x}{x}}.$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$Q_4(x)\geqslant 1,\quad \frac{\tanh\mu x}{x}\geqslant\tanh\mu.$$

从而于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\Delta\leqslant\frac{\mu^9}{99\ 225\cdot\tanh\mu}=0.917\ 7\cdots\times 10^{-7}<0.92\times 10^{-7}.$$

$\tanh\mu x$ 于 $[-1,1]$ 上最佳有理逼近为

$$R^*(x)=\frac{0.549\ 306\ 144\ 01x+0.157\ 401\ 199\ 5x^3}{1+0.129\ 233\ 609\ 54x^2+0.000\ 858\ 919\ 04x^4}.$$

其相对误差为 0.59×10^{-9}.

关于帕德逼近方法，还应指出，$f(x)$ 的帕德逼近也可以理解为从方程

$$Q_M(x)f(x)-P_L(x)=\text{一直到 } x^{L+M} \text{ 项系数为 } 0$$

中解出 $P_L(x)/Q_M(x)$ 所得的近似式.

1972 年夏塔(Shafer)提出考虑从

$$P_L(x)[f(x)]^2+Q_M(x)f(x)+R_N(x)=\text{一直到 } x^{L+M+N+1} \text{ 项系数为 } 0 \tag{7-55}$$

中解出 $f(x)$ 的方法，并以此而得到的 $f(x)$ 逼近式作为帕德逼近的推广．

由于 $f(x)$ 的幂级数展开已知，从而 $[f(x)]^2$ 的幂级数展开也已知．这样由上述关系式可建立关于 $P_L(x)$, $Q_M(x)$ 和 $R_N(x)$，而 $f(x)$ 的所谓 $[L/M/N]$ 二次逼近为

$$f(x)\doteq-\frac{Q_M(x)\pm\sqrt{Q_N^2(x)-4P_L(x)R_N(x)}}{2P_L(x)}.$$

有人甚至把(7-55)式换成微分方程形式

$$P_9(x)\frac{d^2f}{dx^2}+Q_8(x)\frac{df}{dx}+R_6(x)f(x)=0,$$

而考虑帕德逼近的新的推广，此处不拟详述了．

7.4 有理逼近的其他一些算法

1. 达布公式及其有关方法

研究积分

$$\frac{x[2/4]-\tanh\mu x}{\tanh\mu x}=\frac{1}{Q_4(x)}\frac{P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\tanh\mu x}{x}}{\dfrac{\tanh\mu x}{x}}.$$

以 $-\frac{\mu^9x^8}{99\,225}$ 近似替代上式右端的分子，则相对误差函数近似为

$$\Delta=\frac{\left(-\dfrac{\mu^9}{99\,225}x^8\right)}{Q_4(x)\dfrac{\tanh\mu x}{x}}.$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$Q_4(x)\geqslant 1,\quad \frac{\tanh\mu x}{x}\geqslant\tanh\mu.$$

从而于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\Delta\leqslant\frac{\mu^9}{99\,225\cdot\tanh\mu}=0.917\,7\cdots\times 10^{-7}<0.92\times 10^{-7}.$$

$\tanh\mu x$ 于 $[-1,1]$ 上最佳有理逼近为

$$R^*(x)=\frac{0.549\,306\,144\,01x+0.157\,401\,199\,5x^3}{1+0.129\,233\,609\,54x^2+0.000\,858\,919\,04x^4}.$$

其相对误差为 0.59×10^{-9}.

关于帕德逼近方法，还应指出，$f(x)$ 的帕德逼近也可以理解为从方程

$$Q_M(x)f(x)-P_L(x)=\text{一直到 }x^{L+M}\text{ 项系数为 }0$$

中解出 $P_L(x)/Q_M(x)$ 所得的近似式.

1972 年夏塔(Shafer)提出考虑从

$$P_L(x)[f(x)]^2+Q_M(x)f(x)+R_N(x)=\text{一直到 }x^{L+M+N+1}\text{ 项系数为 }0 \tag{7-55}$$

中解出 $f(x)$ 的方法，并以此而得到的 $f(x)$ 逼近式作为帕德逼近的推广.

由于 $f(x)$ 的幂级数展开已知，从而 $[f(x)]^2$ 的幂级数展开也已知. 这样由上述关系式可建立关于 $P_L(x)$, $Q_M(x)$ 和 $R_N(x)$，而 $f(x)$ 的所谓 $[L/M/N]$ 二次逼近为

$$f(x)\doteq-\frac{Q_M(x)\pm\sqrt{Q_N^2(x)-4P_L(x)R_N(x)}}{2P_L(x)}.$$

有人甚至把(7-55)式换成微分方程形式

$$P_9(x)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+Q_8(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+R_6(x)f(x)=0,$$

而考虑帕德逼近的新的推广，此处不拟详述了.

7.4　有理逼近的其他一些算法

1. 达布公式及其有关方法

研究积分

$$R_n = (-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))\mathrm{d}t, \tag{7-56}$$

反复作分部积分,可得出

$$R_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}(z-a)^{n-r}[\varphi^{(r)}(1)f^{(n-r)}(z) - \varphi^{(r)}(0)f^{(n-r)}(a)] - \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)f(a+t(z-a))\mathrm{d}t.$$

若 $\varphi(t)$ 是次数不超过 n 的多项式,则上式右端积分为零,于是有达布(Darboux)公式

$$\varphi^{(n)}(0)[f(z)-f(a)] = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{(r-1)}(z-a)^r[\varphi^{n-r}(1)f^{(r)}(z) - \varphi^{(n-1)}(0)f^{(r)}(a)] + R_n. \tag{7-57}$$

当 $\varphi(t) = (t-1)^n$ 时,$\varphi^{(r)}(1) = 0(r = 0,1,\cdots,n-1)$. 这时(7-57)式恰为泰勒公式(带余项).

当 $\varphi(t) = t^n(t-1)^n$ 时,于相应达布公式中用 $2n$ 代替 n,则可得下列简化公式:

$$f(z) = f(a) + \sum_{r=1}^{n}\frac{(2n-r)!}{(2n)!}\times \binom{n}{r}[f^{(r)}(a) - (-1)^r f^{(r)}(z)](z-a)^r + R_{2n}. \tag{7-58}$$

此处

$$R_{2n} = (z-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n f^{(2n+1)}(a+t(z-a))\mathrm{d}t.$$

(7-58)式称为 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 公式,简称为 HSO 公式．对于满足

$$f'(z) = R_1(z)f(z) + R_2(z) \tag{7-59}$$

(其中 $R_1(z)$ 和 $R_2(z)$ 为 z 的任意给定的有理函数)的任一函数 $f(z)$,显然(7-58)式两边都有含 $f(z)$ 的项．只须从中把 $f(z)$ 作为未知元解出,即可得到 $f(z)$ 的一种有理逼近式．例如

$$\mathrm{e}^z, \mathrm{e}^{-z^2/2}, 10^z, \log_b z, \mathrm{arctg} z, (z^2+1)^{-1/2}(c+\sinh^{-1}z), z^{-a}(a+b\log z), (1-z^2)^{-1/2}, [R(x)]^a$$

(其中 $R(x)$ 为任意有理函数,而 α 为任意指定的实数)等等函数,都可以采用 HSO 公式而获得相应的有理逼近式．

例 4　设 $f(z) = \mathrm{e}^z$,取 $a = 0$. 从相应公式(7-58)中解出 e^z,可得 e^z 的有理逼近式

$$\mathrm{e}^z = \frac{\sum_{r=0}^{n}(2n-r)!\binom{n}{r}z^r + R_{2n}}{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(2n-r)!\binom{n}{r}z^r}, \tag{7-60}$$

其中
$$R_{2n}=z^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n e^{tz}dt.$$
舍去(7-60)式中的 R_{2n},即得 e^z 的近似有理分式.

分别取 $n=0,1,2,\cdots$,则由(7-60)式得到逼近式
$$\frac{1}{1},\frac{2+z}{2-z},\frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2},\frac{120+60z+12z^2+z^3}{120-60z+12z^2-z^3},\cdots$$
它们恰好为 e^z 的[0/0],[1/1],[2/2],[3/3]…帕德逼近.这自然是一个很有趣的巧合.

当然并不是一切函数的 HSO 逼近都能得到帕德逼近式的.事实上,如果取 $f(z)=\exp(\mathrm{arctg}z)$,则其 HSO 逼近($a=0,n=1$)为
$$f(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{1-\frac{1}{2}z+z^2}.$$
但相应的帕德逼近却为
$$f(z)=\frac{1+0.84z+0.87z^2+\frac{17}{60}z^3}{1-0.16z+0.53z^2}.$$

2. 微分修正算法(切尼-洛比法)

对于给定的函数 $f(x)$,有理逼近问题,相当于选取 c,d 使得
$$\Delta(c,d)=\sup_x|f(x)-\sum c_ix^i\Big/\sum d_jx^j|=\min.$$
为了给出一个一般算法,考虑
$$\Delta(c)=\sup_i\frac{(A^i,c)+a_i}{(B^i,c)+b_i},$$
其中 (A^i,c) 表示 A^i 与 c 的内积,且 c 仅限于在下述区域内取值
$$D=\{c\in E_n\mid(B^i,c)+b_i>0,对一切\ i\}.\tag{7-61}$$
本节将仅限于 i 的取值范围是一个有限集合.

定理 12(切尼-洛比) $\Delta(c)$ 于区域 D 上的局部极小必然也是整体极小.

定理 13 为使 c^* 是 $\Delta(c)$ 在 D 中的极小值点,必须且只须线性不等式组
$$(A^i-\mu B^i,z)<0\quad(i\in I)\tag{7-62}$$
不相容,其中
$$\mu=\Delta(c^*),I=\{i\mid R^i(c^*)=\mu\}.\tag{7-63}$$
今设 $A_i,B_i(i=1,\cdots,m)$ 为任意集合 D 上的实值函数,假定对一切 $c\in D$ 和 $i(i=1,2,\cdots,m)$,均有
$$0<\alpha\leqslant B_i(c)\leqslant\beta.\tag{7-64}$$
重新定义
$$\Delta(c)=\max_i\frac{A_i(c)}{B_i(c)}.\tag{7-65}$$
微分修正算法的具体算法如下:

1° 选取初始近似 $c^0\in D$;

2° 假定 c^{k-1} 已经求得($k=1,2,\cdots$),现求辅助函数

$$\delta_k(c)=\max_i\frac{A_i(c)-\Delta(c^{k-1})B_i(c)}{B_i(c^{k-1})}\tag{7-66}$$

于 D 中的极小值点,并以此作为新的近似向量 c^k.

这样可形成一个向量序列 $\{c^k\}$.关于序列 $\{c^k\}$ 的极小化性质是切尼 - 洛比建立的.

定理 14(切尼 - 洛比)　$\Delta(c^k)$ 随 k 的增大而单调下降,且

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(c^k)=\inf_{c\in D}\Delta(c).\tag{7-67}$$

切尼 - 洛比还指出:对 $c=(c_1,\cdots,c_N)$,设

$$\Delta(c)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(c,x)/Q(c,x)|,$$

其中 $f(x)\in c[a,b]$,而

$$P(c,x)=\sum_{i=1}^{n}c_ix^{i-1},\quad Q(c,x)=\sum_{i=n+1}^{N}c_ix^{i-n-1}.$$

采用下述方法产生的序列 $\{c^k\}$,使得 $\Delta(c^k)\downarrow$ 且

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(c^k)=\Delta^*.$$

于单位方体 $|c_i^0|\leqslant 1$ 上选取 c^0,使于 $[a,b]$ 上 $Q(c^0,x)>0$;对给定 c^k,取

$$\delta_k(c)=\max_x\{|f(x)Q(c,x)-P(c,x)|-\Delta(c^k)Q(c,x)\}$$

于单位方体上的极小值点作为 $c^{k+1}\cdots$.

特别,对 $\Delta(c)$ 的每个极小值点 c^* 而言,$P(c^*,x)$ 与 $Q(c^*,x)$ 均互质,则 $\lim_{k\to\infty}c^k=c^*$.

7.5　Prony 指数型逼近方法

Prony 方法是一种获得指数型非线性逼近的重要算法.其目的是构造一个函数

$$f_a(t)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{s_jt},\tag{7-68}$$

使得

$$f_a(iT)=f_i\quad(i=0,1,\cdots,2n-1),\tag{7-69}$$

其中 T 为步长,$\{f_i\}$ 为给定型值,$\{A_j\}$ 和 $\{s_j\}$ 为待求的 $2n$ 个参数.

引入新的变量

$$z_j=e^{s_jT}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

并按下式定义变量 α_i:

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_iz^i=(z-z_1)\cdots(z-z_n)\quad(\alpha_n=1),\tag{7-70}$$

于是(7-68)式,(7-69)式等价于

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} A_j z_j^i \quad (i = 0,1,\cdots,2n-1). \tag{7-71}$$

由(7-70)式和(7-71)式可得方程组

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} f_{k+i}\alpha_i &= \sum_{i=0}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n} A_j z_j^{k+i}\Big]\alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} A_j z_j^{k}\Big[\sum_{i=0}^{n}\alpha_i z_j^{i}\Big] = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,n-1).\end{aligned}$$

因为 $\alpha_n = 1$,于是上述方程组可写为

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{k+i}\alpha_i = -f_{k+n} \quad (k = 0,1,\cdots,n-1). \tag{7-72}$$

从中解出 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$($\alpha_n = 1$ 为已知).然后依据(7-70)式,求解高次代数方程

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0 \tag{7-73}$$

得到 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$.最后按公式

$$s_j = \frac{1}{T}\log z_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{7-74}$$

即可定出(7-68)式中的指数 s_j 来.再由(7-71)式中前 n 个方程组成的方程组解出(7-68)式中的各个系数 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.

下面来讨论 Prony 方法与 z 变换的关系.

所谓一个函数 $f(t)$ 的 z 变换,乃是

$$F^S(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{2n-1}z^{-(2n-1)} + \cdots \tag{7-75}$$

其中 $f_i = f(iT)(i = 0,1,\cdots)$.按定义,显然 $e^{s_j t}$ 的 z 变换为

$$z\{e^{s_j t}\} = \frac{z}{z - e^{s_j T}} = \frac{z}{z - z_j}.$$

于是不难看出由(7-68)式所给出的 $f_a(t)$ 的 z 变换应该具有形式

$$F_a^S(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z}{z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0}. \tag{7-76}$$

希望 $F_a^S(z)$ 恰好为 $F^S(z)$ 的帕德逼近;即使

$$\begin{aligned}&a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z \\ &= (z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0)(f_0 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{2n-1}z^{(2n-1)} + \cdots).\end{aligned}$$

两边从 z^n 至 $z^{-(n-1)}$ 的系数相等.这样得到由 $2n$ 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} f_0 = a_n; \\ f_0\alpha_{n-1} + f_1 = a_{n-1}; \\ \cdots \\ f_0\alpha_1 + f_1\alpha_2 + \cdots + f_{n-2}\alpha_{n-1} + f_{n-1} = a_1; \end{cases} \tag{7-77}$$

$$\begin{cases} f_0\alpha_0 + f_1\alpha_1 + \cdots + f_{n-1}\alpha_{n-1} + f_n = 0; \\ f_1\alpha_0 + f_2\alpha_1 + \cdots + f_n\alpha_{n-1} + f_n = 0; \\ \cdots \\ f_{n-1}\alpha_0 + f_n\alpha_1 + \cdots + f_{2n-2}\alpha_{n-1} + f_{2n-1} = 0. \end{cases} \tag{7-78}$$

不难发现(7-78)式与(7-72)式是完全一样的,所以在帕德逼近(7-76)式中的$\{\alpha_i\}$和由此确定的$\{z_j\}$,$\{s_j\}$等恰为 Prony 方法中的那些同名参数 .

再注意到
$$z\left\{\sum_{j=1}^{n} A_j e^{s_j t}\right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j z}{z - z_j}.$$
因此在求出(7-78)式中的各个α_j以后,先按(7-77)式求出各a_j,然后形成(7-76)式中的有理函数$F_a^S(z)$. 最后依据恒等式$\frac{1}{z}F_a^S(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z - z_j}$即可定出各个系数$A_1, A_2, \cdots, A_n$来 .

以上分析表明,Prony 方法从实质上讲,是与某相应z变换的帕德逼近相通的 .

例 5　设$f(t)$是单位方形脉冲
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 当\ 0 \leqslant t < 1; \\ \frac{1}{2}, & 当\ t = 1; \\ 0, & 别处 . \end{cases}$$
取$n = 3, T = 1/3$,型值则为
$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = \frac{1}{2}, f_4 = 0, f_5 = 0.$$
于是
$$F_a^6(z) = \frac{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z}{z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}$$
$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2} z^{-3} + f_6 z^{-6} + \cdots$$
与(7-78)式相对应的线性方程组为
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0,$$
$$\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 = 0.$$
其解是$\alpha_0 = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$.

于是$F_a^s(z)$的分段为$z^3 - z^2 + z - 1/2$,它的零点是
$$z_1 = 0.647\ 80, \quad z_{2,3} = 0.176\ 10 \pm i0.860\ 72.$$
$f_a(t)$的指数则为
$$s_1 = -1.302\ 54, \quad s_{2,3} = -0.388\ 47 \pm i4.106\ 97.$$
又由(7-77)式得出
$$a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = 1.$$
这样一来,应有
$$\frac{1}{z}F_a^s(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}.$$
将其展成部分分式,求出

$$A_1 = 1.473\ 67, A_{2,3} = -0.236\ 83 \mp \mathrm{i}0.074\ 80.$$

因此

$$f_a(t) = 1.473\ 67 \cdot \mathrm{e}^{-1.302\ 54t} + 2\mathrm{Re}[(-0.236\ 83 - 0.074\ 80\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-0.388\ 47+4.106\ 97\mathrm{i})t}]$$
$$= 1.473\ 67\mathrm{e}^{-1.302\ 54t} - 0.496\ 74\mathrm{e}^{-0.388\ 47t} \cdot \cos(4.106\ 97t + 0.305\ 92).$$

其逼近情况如图 7-1 所示.

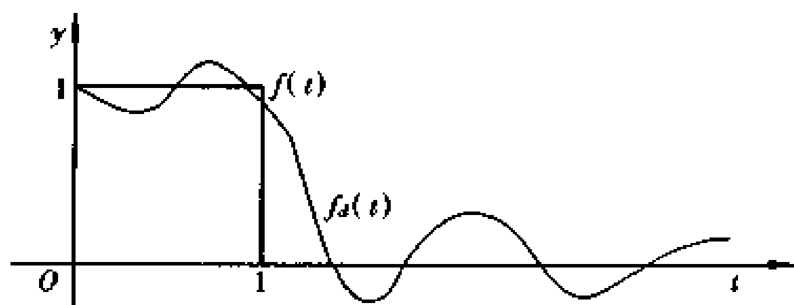


图 7-1

8 数 值 积 分

1. 数值积分的一般概念

从微积分学中知道能够利用牛顿 - 莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]_{x=a}^{x=b}$$

去计算的定积分是很少的. 事实上,在实际问题中,常常陷于无法利用初等函数去表出原函数$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的困境. 例如,对于概率积分与椭圆积分

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t \quad (0 \leqslant t < \infty)$$

和

$$E(t) = \int_0^t \sqrt{1 + k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \quad (0 \leqslant t \leqslant 2d\pi)$$

来说,便遇到了上述的困难. 因此由于实际问题的要求,不能不考虑定积分的近似计算问题.

以下所讨论的求积公式绝大多数具有如下形式:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \tag{8-1}$$

其中 x_k 为求积公式的结点,A_k 为求积系数. 通常,称右端的和为求积和;又称

$$E[f] = \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

为求积误差．有时，也将求积公式写成

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]. \tag{8-2}$$

在(8-1)式中，$[a,b]$是实直线上的有限或无限的区间；函数$\rho(x)$是已知的固定的函数且常常是$\rho(x) \equiv 1$，以后将称它为权函数．此外，还假定积分

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b \rho(x)x^m\mathrm{d}x \quad (m = 0,1,\cdots)$$

总是存在的，并且函数$f(x)$在点$x_1,x_2,\cdots,x_n$处是有定义的．

一般说来，求积分公式(8-1)中的结点x_k和系数A_k可以按所希望的方式随意选取(除非是被积函数仅在一离散点集上是已知的，那时只好限制从离散点集中去选取x_k了)．自然总是希望通过x_k和A_k的选取使得在某种意义下求积误差尽可能小．

概括来说，数值积分问题可分解为下述的三个主要问题：

1° 精确性程度的衡量标准问题；

2° 求积公式的具体构造问题；

3° 余项估计问题(即误差估计问题)．

为了合理地解决第一个问题，将引进代数精度的概念．为了解决第二个问题，必须考虑结点$x_1,x_2,\cdots,x_n$和求积系数$A_1,A_2,\cdots,A_n$的决定(或选择)问题．至于第三个问题，则主要是借助于内插多项式的余项估计公式来解决．

代数精度的概念是这样的．就形如(8-1)公式的求积公式来说，假如对$f(x) = 1,x,x^2,\cdots,x^m$(或次数$\leqslant m$的多项式)，公式恒精确地成立(即$E(f)=0$)，而当$f(x)=x^{m+1}$时公式就不精确成立，这样就称公式(8-1)式的代数精度为m．容易看出，m越大，则就一般的连续函数$f(x)$而言，公式(8-1)的右端数值与左端积分值的接近程度也就越高．事实上，当m越大时，用次数不高于m的多项式(例如$p(x)$)去近似$f(x)$亦就越好，即$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)| = \delta_m$便越小，因而公式(8-1)的误差亦就越小．理由是，

$$\begin{aligned}\Delta_m &= \left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)\right| \\ &= \left|\int_a^b \rho(x)[f(x)-p(x)]\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} A_k[f(x_k)-p(x_k)]\right| \\ &\leqslant \int_a^b \rho(x)\delta_m\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} |A_k|\delta_m.\end{aligned} \tag{8-3}$$

由此可见，引进代数精度的概念作为衡量求积公式的精确性是十分自然的．

下面的定理说明了具有代数精度的求积公式的存在性．

定理1　对于任意给定的n个不同的结点$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有常数$A_1,A_2,\cdots,A_n$使得当$f(x)$是次数$\leqslant n-1$的多项式时求积公式(8-1)式精确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{8-4}$$

注意，上述定理并没有要求 x_k 一定要属于区间 $[a,b]$. 另外，定理只是断言了，当 A_k 由(8-3)式决定时，公式(8-1)对于一切次数 $\leqslant n-1$ 的多项式是精确的，这个公式对较高次的多项式可能是精确的，也可能不是精确的．换言之，定理1说明了公式(8-1)的代数精度 $d \geqslant n-1$.

以后称求积系数由(8-3)式决定的求积公式为插值型求积公式．由于对次数不超过 $n-1$ 次的任一多项式 $f(x)$ 说来，$E[f;x]=0$，所以 n 个结点的插值型求积公式的代数精度 $d \geqslant n-1$. 反之，容易证明，代数精度 $d \geqslant n-1$ 的 n 个结点的求积公式一定是插值型求积公式．特别，当 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 属于 $[a,b]$ 时，我们称公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{8-5}$$

为内插型求积公式，其中求积系数由下式确定：

$$A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{8-6}$$

2. 牛顿-科茨公式

设 $[a,b]$ 是一有限区间，$\rho(x)\equiv 1$. 令 $h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_0=a$，$x_1=a+h$，$\cdots$，$x_n=a+nh=b$，则依定理1有常数 A_k 使得求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{8-7}$$

对于一切次数 $\leqslant n$ 的多项式是精确的．事实上，当 A_k 由(8-6)式决定时(注意，此时 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$；$k=0,1,\cdots,n$)，上述求积公式的代数精度 $d \geqslant n$. 以后称 N 个结点的内插型求积公式为 N 点的牛顿-科茨(Newton-Cotes)公式．通常，称一个结点的牛顿-科茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + E[f] \tag{8-8}$$

为矩形公式；称二个结点的牛顿-科茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + E[f] \tag{8-9}$$

为梯形公式，称三个结点的牛顿-科茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{3}f(a) + \frac{4h}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h}{3}f(b) + E[f] \tag{8-10}$$

为辛普森(Simpson)公式．此处 $h=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

现在考虑在结点个数 n 无限增大的情况下牛顿-科茨公式的收敛性问题．下面定理的结论说明答案是否定的．

定理 2　设 $[a,b]$ 是有限区间，并设已给出求积公式序列

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) + E[f] \quad (n=2,3,\cdots).$$

它们具有性质：

1° $x_{k,n}(k=1,2,\cdots,n)$ 是不相同的且在 $[a,b]$ 中；

2° $A_{k,n}$ 使得 n 点公式对所有阶数 $\leqslant n-1$ 的多项式是精确的．

如果当 $n\to\infty$ 时，数列

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}|A_{k,n}|\quad(n=2,3,\cdots)$$

无限增大，则有函数 $f(x)\in C[a,b]$ 使得数列

$$\sum_{k=1}^{n}A_{k,n}f(x_{k,n})\quad(n=2,3,\cdots)$$

不收敛于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

定理 2'　令 $A_{k,n}(k=0,1,\cdots,n)$ 表示 $n+1$ 点牛顿 - 科茨公式中的系数，则当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}|A_{k,n}|\right\}$ 无限增大．

定理 2 与定理 2' 说明牛顿 - 科茨公式并不总是收敛于积分的真值．

由 3.1 插值余项公式可知，梯形公式的求积误差为

$$E[f]=\int_a^b f(a,b,x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x.\tag{8-11}$$

设 $f(x)$ 有连续的二阶微商，由于当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，有

$$(x-a)(x-b)\leqslant 0,$$

所以对(8-11)式应用中值定理可知必有 $[a,b]$ 中的点 ξ_1 和 ξ 使得

$$E[f]=f(a,b,\xi_1)\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).\tag{8-12}$$

同理，辛普森公式(8-10)的求积误差为

$$E[f]=\int_a^b f(a,b,c,x)(x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x.\tag{8-13}$$

设 $f(x)$ 有四阶连续的微商，由于

$$(x-a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}[(x-a)(x-b)],$$

故由分部积分公式和积分中值公式，可得

$$\begin{aligned}E[f]&=\frac{1}{4}\int_a^b f(a,b,c,x)\mathrm{d}[(x-a)(x-b)]^2\\&=\frac{1}{4}\int_a^b f(a,b,c,x,x)[(x-a)(x-b)]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}f(a,b,c,\xi_1,\xi_1)\int_a^b(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x\\&=-\frac{(b-a)^5}{2\,880}f^{(4)}(\xi)(a<\xi<b).\end{aligned}\tag{8-14}$$

从辛普森公式的求积误差公式(8-14)可以看出，辛普森公式的代数精确度是 3．

从公式(8-12)和(8-14)看出，对给定的被积函数 $f(x)$ 而言，当积分区间缩短时，求积误差以更快的速度减小，因此在实际计算中为了保证计算的精度，往往首

先用分点

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

将区间$[a,b]$分成 n 个相等的子区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

而后对每个子区间再应用梯形公式(8-9) 或辛普森公式(8-10). 例如,对每个子区间应用梯形公式(8-9),得到

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2n}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{1}{12}(\frac{b-a}{n})^3 f''(\xi_i).$$

在上式中舍掉余项并对 i 从 0 到 $n-1$ 求和,可得一个新的求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{b-a}{2n}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})). \tag{8-15}$$

上述求积公式的误差是

$$E_n[f] = -\frac{1}{12}(\frac{b-a}{n})^3 \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \tag{8-16}$$

若 $f''(x)$ 连续,由于 ξ_i 均为$[a,b]$的内点,所以由中值定理,有

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \quad (a < \xi < b).$$

将其代入(8-16) 式,得到

$$E_n[f] = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi). \tag{8-17}$$

公式(8-15) 称为复化梯形公式,求积误差由(8-17) 式确定.

同样可以建立复化辛普森公式. 用分点

$$x_j = a + j(b-a)/2n \quad (j = 0,1,\cdots,2n)$$

将$[a,b]$分为 $2n$ 等分. 然后,在每个子区间

$$[x_0,x_2],[x_2,x_4],\cdots,[x_{2n-2},x_{2n}]$$

上应用辛普森公式并求和,得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{6n}[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}) + \\ &\quad 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})] + E_{2n}[f],\end{aligned} \tag{8-18}$$

其中

$$\begin{aligned}E_{2n}[f] &= -\frac{1}{2\,880}(\frac{b-a}{n})^5 \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) \\ &= -\frac{1}{2\,880}\frac{(b-a)^5}{n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a < \xi < b).\end{aligned} \tag{8-19}$$

递推关系是数值方法的重要技巧,它具有结构紧凑和便于在计算机上实现的

特点．下面，仅以梯形公式为例介绍一下所谓的逐次分半算法．

首先在整个区间$[a,b]$上应用梯形公式算出积分近似值T_1；然后将$[a,b]$二等分，对$n=2$应用复化梯形公式算出T_2；再将每个小区间二等分（即将$[a,b]$四等分），对$n=4$应用复化梯形公式算出T_4；如此下去，直至相邻两个值之差小于允许误差为止．应注意，在计算后面的T_{2n}时可以利用前面算出的T_n的值：

$$
\begin{aligned}
T_{2n} &= \frac{b-a}{2(2n)}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+\right.\\
&\quad \left.2\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(T_n+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}(T_n+H_{2n}),
\end{aligned}
\tag{8-20}
$$

其中

$$
H_{2n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)
\tag{8-21}
$$

为复化中矩形公式．应用(8-20)式和(8-21)式计算T_{2n}时只要计算被积函数$f(x)$在n个点处的值就可以了，可见递推算法减少了计算量．

现在来看一看为什么可以通过相邻两个近似积分值之差来控制计算过程．令

$$
I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,
$$

则依(8-16)式可知

$$
E_n[f]=I-T_n=-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i),
$$

$$
E_{2n}[f]=I-T_{2n}=-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\sum_{i=0}^{2n-1}f''(\eta_i).
$$

将两式相除并注意当n充分大时，有

$$
\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\xi_i)\approx\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x,
$$

$$
\frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}f''(\eta_i)\approx\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x,
$$

则得到

$$
\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4,
$$

$$
I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n).
\tag{8-22}
$$

(8-22)式说明，若两个相邻的积分近似值T_n与T_{2n}之差为允许误差，则T_{2n}与积分精确值之差大约是允许误差的1/3，因此计算可以至此为止．误差之此种估计法称为后天估计（事后估计）．

对辛普森公式也有类似的算法．比较公式(8-20)，(8-18)和(8-15)，可以得到

复化辛普森公式与梯形公式有如下关系：

$$S_{2n}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_{n}. \tag{8-23}$$

8.3 龙贝格方法

现在比较一下复化梯形公式与复化辛普森公式．复化梯形公式仅对一次多项式精确成立，收敛速度是$(\frac{1}{n})^2$；而复化辛普森公式对所有次数不超过3的多项式精确成立，收敛速度是$(\frac{1}{n})^4$．所以一般说来辛普森公式要比梯形公式好．然而如果用逐次分半算法计算了$T_1,T_2,T_4,\cdots$，则依(8-23)式顺便就可以算出复化辛普森公式的值$S_2,S_4,\cdots$．同样，用S_{2n}和S_n作适当的线性组合又可以得到更好的求积公式．这种用两个相邻的近似公式(其中一个公式是由另一个公式的分半得到)的线性组合而得到更好的近似公式的方法，就是近代电子计算机上常用的龙贝格(Romberg)求积方法，也叫逐次分半加速法．形如(8-23)的公式也叫逐次分半加速公式．

公式(8-23)是由比较求积公式的系数得到的，下面想从另一个角度，即从近似求积余项的分析引出这种加速公式的一般形式．

令$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．由复化梯形公式的余项

$$E_n^{\mathrm{T}}[f]=I-T_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi),$$

$$E_{2n}^{\mathrm{T}}[f]=I-T_{2n}=-\frac{(b-a)^3}{12(2n)^2}f''(\eta)$$

可以看出
$$4E_{2n}^{\mathrm{T}}[f]-E_n^{\mathrm{T}}[f]\cong 0$$
对所有次数不超过2的多项式精确成立．因此

$$4(I-T_{2n})-(I-T_n)\cong 0,$$

亦即
$$I\cong\frac{4}{4-1}T_{2n}-\frac{1}{4-1}T_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$
对所有次数不超过2的多项式精确成立．事实上，它就是8.2中所讲述的辛普森求积公式，它对所有的3次多项式也是精确成立的．

同样由复化辛普森公式的求积误差表达式

$$E_{2n}^{S}[f]=I-S_{2n}=-\frac{(b-a)^5}{2\,880n^4}f^{(4)}(\xi),$$

$$E_{4n}^{S}[f]=I-S_{4n}=-\frac{(b-a)^5}{2\,880(2n)^4}f^{(4)}(\eta)$$

可以看出

$$4^2E_{4n}^{S}[f]-E_{2n}^{S}[f]\cong 0$$

对所有次数不超过4的多项式精确成立．因此

$$4^2(I - S_{4n}) - (I - S_{2n}) \cong 0,$$

亦即

$$I \cong \frac{4^2}{4^2 - 1} S_{4n} - \frac{1}{4^2 - 1} S_{2n} \xlongequal{\text{记为}} C_{4n} \tag{8-24}$$

对所有次数不超过 4 的多项式精确成立．这就是复化科茨公式．复化科茨公式的余项为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - C_{4n} = -\frac{2}{945} \cdot \frac{(b-a)^7}{(4n)^6} f^{(6)}(\xi).$$

因此,实际上复化科茨公式(8-24) 对 5 次多项式也是精确成立的．

当 $n = 1$ 时,记 $y_i = f(a + i\frac{b-a}{4})$,则有

$$C_4 = \frac{4^2}{4^2-1} S_4 - \frac{1}{4^2-1} S_2 = (b-a)\left(\frac{7}{90} y_0 + \frac{32}{90} y_1 + \frac{2}{15} y_2 + \frac{32}{90} y_3 + \frac{7}{90} y_4\right).$$

上式即是 $n = 4$ 时的牛顿 - 科茨公式,也称为科茨公式．

类似地,可以将复化科茨公式加速,从而得到更好的求积公式．

依此类推,可以得到一系列逐次分半加速公式,表列如下(表 8-1).

表 8-1

区间等分数	逐次分半加速公式	代数精度
n	梯形公式(T 公式): T_n	1
$2n$	辛普森公式(S 公式): $S_{2n} = \frac{4}{4-1} T_{2n} - \frac{1}{4-1} T_n$	3
$4n$	科茨公式(C 公式): $C_{4n} = \frac{4^2}{4^2-1} S_{4n} - \frac{1}{4^2-1} S_{2n}$	5
$8n$	龙贝格公式(R 公式): $R_{8n} = \frac{4^3}{4^3-1} C_{8n} - \frac{1}{4^3-1} C_{4n}$	7
$16n$	D 公式: $D_{16n} = \frac{4^4}{4^4-1} R_{16n} - \frac{1}{4^4-1} R_{8n}$	9
$32n$	E 公式: $E_{32n} = \frac{4^5}{4^5-1} D_{32n} - \frac{1}{4^5-1} D_{16n}$	11
⋮	⋮	⋮

在实际计算中,逐次分半加速法可按表8-2格逐行进行计算．当表中对角线上出现两个顺序接连的数之差为允许误差时,即可停止运算．

表 8-2 逐次分半加速表

分半次数	区间等分数	T 公式	S 公式	C 公式	R 公式	D 公式	E 公式
$i=0$	$2^0=1$	T_1					
1	$2^1=2$	T_2	S_2				
2	$2^2=4$	T_4	S_4	C_4			
3	$2^3=8$	T_8	S_8	C_8	R_8		
4	$2^4=16$	T_{16}	S_{16}	C_{16}	R_{16}	D_{16}	
5	$2^5=32$	T_{32}	S_{32}	C_{32}	R_{32}	D_{32}	E_{32}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例 1 计算定积分$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,并使误差不超过 0.000 1.

解 1° 在区间[1,2]上用梯形公式,得

$$T_1 = \frac{1}{2}(f(1)+f(2)) = \frac{3}{4} = 0.750\ 00.$$

2° 将[1,2]二等分,得

$$H_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \approx 0.666\ 67,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(T_1 + H_2) \approx 0.708\ 33,$$

$$S_2 = \frac{4T_2 - T_1}{4-1} \approx 0.694\ 44.$$

3° 将[1,2]四等分,得

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right) \approx 0.685\ 71,$$

$$T_4 = \frac{1}{2}(T_2 + H_4) \approx 0.697\ 02,$$

$$S_4 = \frac{4T_4 - T_2}{4-1} \approx 0.693\ 25,$$

$$C_4 = \frac{4^2 S_4 - S_2}{4-1} \approx 0.693\ 17.$$

(4) 将[1,2]八等分,得

$$H_8 = \frac{1}{8}\left(f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + f\left(\frac{13}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right)\right) \approx 0.691\ 22,$$

$$T_8 = \frac{1}{2}(T_4 + H_8) \approx 0.694\ 12,$$

$$S_8 = \frac{4T_8 - T_4}{4-1} \approx 0.693\ 15,$$

$$C_8 = \frac{4^2 S_8 - S_4}{4^2-1} \approx 0.693\ 15,$$

$$R_8 = \frac{4^3 C_8 - C_4}{4^3-1} \approx 0.693\ 15.$$

由于 $|C_4 - R_8| = 0.000\,02 < 0.000\,1$，故计算可以停止．积分的近似值为 0.693 15.

1. 高斯型方法

在 8.1 节中已经指出，n 个结点的内插型求积公式的代数精度至少为 $n-1$. 那么自然会问，如果同时允许适当地选择求积系数和结点 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$，则它的代数精度最多能提高多少呢？高斯圆满地解决了这个问题．

事实上，由于 A_k 和 x_k 作为参数来看共有 $2n$ 个，因此如果令一个任意的 $2n-1$ 次多项式

$$f(x) = x^{2n-1} + \alpha_1 x^{2n-2} + \alpha_2 x^{2n-3} + \cdots + \alpha_{2n-1}$$

（或者分别令 $f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^{2n-1}$）代入(8-5)式的两端而令其精确相等时，则由于诸系数 α_i 的任意性，便得到 $2n$ 个联立的方程．正因为 A_k 和 x_k 恰好有 $2n$ 个，因此恰好可以求出 A_k 与 x_k 的 $2n$ 个特殊的数值，使得 $2n$ 个联立方程完全被满足．这样也就说明要使(8-5)式两端精确相等的代数多项式，其次数可以最多提高到 $2n-1$. 换言之，形如(8-5)式的公式的代数精度最多可能提高到 $2n-1$，通常称具有最高代数精度的内插型求积公式为**高斯型公式**．

定理 3　欲使 n 个结点的内插求积公式(8-5)具有代数精度 $2n-1$，其充要条件是结点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所构成之因次多项式 $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 必须与一切次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $\rho(x)$ 为直交．

根据上述定理可知问题归结为：给定了 $\rho(x)$ 与 n，究竟应如何来作 n 次多项式

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

使得 $\omega(x)$ 与任意次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $Q(x)$ 关于 $\rho(x)$ 恒直交，其中 $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$. 由前面的知识知 n 次多项式 $\omega(x)$ 可表示成

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

定理 4　设(8-5)式为高斯型内插求积公式，则其求积系数 A_k 皆为正，且 A_k 有一个与(8-6)式等价的表达式

$$A_k = \frac{1}{[\omega'(x_k)]^2}\int_a^b \frac{\rho(x)[\omega(x)]^2}{(x-x_k)^2}\mathrm{d}x. \tag{8-25}$$

定理 5　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内 $2n$ 次连续可微，则高斯型公式(8-5)的余项表达式为

$$E[f] = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)[\omega(x)]^2\mathrm{d}x, \tag{8-26}$$

其中 $a \leqslant \xi \leqslant b$, $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

由定理 2 和定理 2′ 可知，即使 $f(x)$ 是一有限区间 $[a,b]$ 上连续函数，关于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 n 点牛顿-科茨公式序列也不一定就收敛于积分的真值．现在考虑高

斯型求积公式的相应问题．

定理 6　设$[a,b]$为一有限区间，并有高斯型求积公式序列

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{k=1}^{n} A_{k,n}f(x_{k,n}) \quad (n=2,3,\cdots).$$

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则此公式序列收敛于积分的真值．

2. 高斯公式和 Mehler 公式

高斯公式和 Mehler 公式都是一般的高斯型公式的特别情形．因为它们很有用，所以值得专门来介绍一下．

古典的高斯公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]. \tag{8-27}$$

因此这是一般的高斯型公式中含$\rho(x)\equiv 1,[a,b]=[-1,1]$所得的特别情形．

根据一般理论，可以知道公式中的结点x_k乃是n次因次多项式$\omega(x)$的零点；而这个$\omega(x)$必须与一切不超过$n-1$次的多项式$Q(x)$直交，亦即

$$\int_{-1}^{1}\omega(x)Q(x)\mathrm{d}x = 0.$$

虽然这样的$\omega(x)$总可以通过矩量

$$\mu_k = \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \quad (k=0,1,\cdots)$$

作成的行列式表示出来，但是这样做毕竟是麻烦的．事实上，人们早已发现著名的勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

恰好具有上述$\omega(x)$所要求的直交性，由于$P_n(x)$也是n次多项式，因此它与所需要的$\omega(x)$顶多差一个常数因子，容易看出

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \cdots,$$

因此所需要的$\omega(x)$（即最高次项的系数是 1 的多项式）可以表成

$$\omega(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x).$$

这样不仅解决了高斯公式的结点问题，而且也可以利用所得到的$\omega(x)$去解决求积系数的问题和求积公式的余项问题．显然

$$A_k = \int_{-1}^{1}\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(x-x_k)P'_n(x_k)}\mathrm{d}x. \tag{8-28}$$

但是用这个公式来计算A_k还是不甚方便，事实上可以得到更简单的系数公式．试考虑积分

$$S_k = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-x_k}P'_n(x)\mathrm{d}x \tag{8-29}$$

注意被积函数为$2n-2$次多项式，故由高斯公式知

$$S_k = A_k[P'_n(x_k)]^2. \tag{8-30}$$

另一方面，如令

$$\mu = \frac{P_n(x)}{x - x_k}, \mathrm{d}v = P'_n(x)\mathrm{d}x,$$

则将(8-29)式的右端进行分部积分，可知有

$$S_k = [\frac{P_n^2(x)}{x - x_k}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x)(\frac{P_n(x)}{x - x_k})'\mathrm{d}x. \tag{8-31}$$

注意上式右端第二项内的被积函数又是 $2n-2$ 次多项式，它应该精确地等于高斯公式的求积和．又因 $P_n(x_k) = 0(k = 1,2,\cdots,n)$，故(8-31)式右端的积分等于零．注意 $P_n^2(\pm 1) = 1$，容易求出第一项的值为

$$S_k = [\frac{P_n^2(x)}{x - x_k}]_{-1}^1 = \frac{1}{1 - x_k} + \frac{1}{1 + x_k} = \frac{1}{1 - x_k^2}.$$

因此依(8-30)式，便得到了 A_k 的系数公式

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}. \tag{8-32}$$

这样，已完全解决了高斯公式的构造问题．

在验证 $P_n(x)$ 的直交性时，曾用分部积分法处理了积分

$$I = \int_{-1}^1 P_n(x)Q(x)\mathrm{d}x,$$

现在就 $Q(x) \equiv P_n(x)$ 而言，则由同样的计算手续可得

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n\mathrm{d}x = \frac{2}{2n + 1}, \tag{8-33}$$

于是根据高斯型求积公式余项的普遍公式，便可算出公式(8-27)的余项为

$$E[f] = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^1 [\omega(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\xi), \tag{8-34}$$

其中 $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$，于此，用到了(8-33)式和

$$\omega(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x).$$

下面再简要地指出 Mehler 求积公式的结构形式．所谓 Mehler 公式就是如下的特别情形：

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad [a,b] = [-1,1].$$

针对这种情形来说，具备直交性条件的因次多项式 $\omega(x)$ 恰好就是著名的契贝谢夫多项式

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x). \tag{8-35}$$

它的明显表达式可由 $\cos n\theta$ 的展开式得出．$\widetilde{T}_n(x)$ 的 n 个零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 便是 Mehler 公式的结点．再根据求积系数的一般公式，将 $\omega(x) \equiv \widetilde{T}_n(x)$ 代入并作变

数代换 $x = \cos\theta$,则可得出所需要的系数为

$$A_k = \frac{1}{\widetilde{T}'_n(x_k)}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - x_k}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n}. \tag{8-36}$$

上式中的三角函数(实际是 $n-1$ 次三角多项式)的积分值恰好等于$\frac{\pi}{n}\widetilde{T}_n'(x_k)$的事实,读者可作为一个习题来论证.

综上所述,可知 Mehler 公式的形式是

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) + E[f], \tag{8-37}$$

其中诸 x_k 恰好是 $\widetilde{T}_n(x) = 0$ 的一切根.

公式(8-37)的最大优点是求积系数都相同.这在应用时可以减少 $n-1$ 次乘法运算.

公式(8-37)的一个余项估计式为

$$E[f] = \frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}}f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1). \tag{8-38}$$

这里当然应先假定 $f^{(2n)}(x)$ 在$[-1,1]$上存在并连续.

3. 三角精确度与周期函数的求积公式

在实际应用中,有时会遇到周期函数的定积分,因此有必要再讨论这种积分的近似求积法.

假定要计算的积分是 $I = \int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 是 x 的以 2π 为周期的连续函数,即 $f(x+2\pi) = f(x)$,下面希望建立带有 n 个结点的求积公式

$$\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k). \tag{8-39}$$

根据维尔斯特拉斯的第二逼近定理,用三角多项式

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

可以一致地逼近周期连续函数,因此,自然又要用三角多项式的次数 m 来规定求积公式(8-39)的精确度.

如果公式(8-39)对任意 m 次三角多项式说来都精确成立,而对 $m+1$ 次三角多项式却不恒成立,此时便称(8-39)式的三角精确度为 m.

下面证明无论怎样选取 A_k 和 x_k 都不能使公式(8-39)的三角精确度提高到 $\geqslant n$. 考虑 n 次三角多项式

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right), \tag{8-40}$$

其中 x_k 为(8-39)式右端求积的结点. 由三角函数的和积互化公式易验证 n 个三角多项式的乘积仍是三角多项式,而次数等于连乘的多项式的次数之和.因此(8-40)式显然是 n 次三角多项式.假如设想(8-39)式的三角精确度 $\geqslant n$,则自然就会有

$$\int_0^{2\pi}\left[\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{x-x_k}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n}A_jf(x_j) = 0.$$

但上式的左端明明是 >0，这个矛盾便证明了(8-39)式的三角精确度无论如何不能超过 $n-1$.

进一步还可证明(8-39)式确实可以达到最高可能的精确度($n-1$).这其实只须取等距结点和相等的系数 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ 即可办到.

在$[0,2\pi]$中任取步长为 $h=\frac{2\pi}{n}$ 的等距结点

$$x_k = x_1 + (k-1)h \qquad (k = 1,2,\cdots,n).$$

又假定一切系数为常数($A_k = A$)，在公式(8-39)中令 $f(x)\equiv 1$，则$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}A_k = nA$，因此可知 $A=\frac{2\pi}{n}$.从而，公式(8-39)此时即变成如下的特殊形式.

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x \cong \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k). \tag{8-41}$$

易验证求积公式(8-41)确实具有三角精确度 $n-1$，为此只须取 $f(x)\equiv 1$，$\cos mx$，$\sin mx$($m=1,2,\cdots,n-1$)来验证就可以了，自然同样地取

$$f(x)\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}(m = 0,1,2,\cdots,n-1;\mathrm{i} = \sqrt{-1})$$

来验算一下亦就够了.当然 $m=0$是无需验证的.以下可假定$0<m\leqslant n-1$.此时，有

$$\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}m}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

另一方面，求积和也等于0，原因是

$$\sum_{k=1}^{m}f(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(x_1+(k-1)h)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_1}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(k-1)h}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mnh}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mh}-1}\right) = 0\left(h=\frac{2\pi}{n}\right).$$

这就证明了关于精度所作的断言.

显然，如果被积函数的周期为 $T>0$，则只须作一变数代换即可将公式(8-41)变形为

$$\int_0^{T}f(x)\mathrm{d}x = \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) + E[f],$$

其中 $0\leqslant x_1\leqslant h$，$h=\frac{T}{n}$，$x_k = x_1+(k-1)h(k=1,2,\cdots,n)$.

参 考 文 献

1　Натансон И П. 函数构造论. 路见可译. 北京：科学出版社，1958.

2　Коровкин П П. 线性算子与逼近论. 郑维行译. 北京：高等教育出版社，1960.

3 Lorentz G G. Approximation of favction. New York: Holt Rinehart and Winston, 1966.
4 Davis P J. Interpolation and approximation. New York: Blaisdell, 1963.
5 徐利治,王仁宏,周蕴时.函数逼近的理论与方法.上海:上海科学技术出版社,1983.
6 陈文忠.算子逼近论.厦门:厦门大学出版社,1989.

第19篇

样条函数

编　者　高俊斌
审校者　王能超

目　录

引　言

样条函数的概念是美国数学家肖恩贝格(I. Schoenberg)在 1946 年引进的. 但样条函数作为分段多项式函数,特别是关于分段多项式早就为人们所研究和应用. 直到 20 世纪 60 年代,关于样条函数的研究与应用才开始得到大力的发展.

样条函数理论飞速发展的源泉主要在于它的实用性. 样条函数不仅具有良好的结构性质,而且还具有很好的逼近性质和数值算法实现的简易性. 它被广泛地应用于大部分的数值计算领域. 例如,数据拟合,函数逼近,数值积分,与常微分方程及偏微分方程相关的算子方程的数值求解,积分方程,最优控制等等.

样条函数理论的论题主要包括:样条函数基本分类及样条函数空间的结构;样条函数及空间的代数性质、分析性质及对各类函数空间的逼近性质;样条函数的计算方法及样条函数逼近的各类数值逼近算法.

1　样条函数空间

1.1　基本概念

1.1.1　剖分及剖分节点

定义 1　设$[a,b]$是一个有限闭区间,具有如下排列

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

的一组节点$\{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$称为区间$[a,b]$的一个剖分,记为$\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$,剖分$\Delta$将区间$[a,b]$划分为$n+1$个子区间

$$I_i = (x_i, x_{i+1}), i = 0,1,\cdots,n-1 \text{ 及 } I_n = [x_n, x_{n+1}].$$

而每个$x_i(i = 1,2,\cdots,n)$称为**剖分节点**,**简称节点**.

注 1　在上述定义中,允许区间$[a,b]$是无穷区间,例如$a = -\infty$或$a = +\infty$等. 可以完全类似地定义无穷区间上的剖分. 其剖分节点可以仅由有限个点组成,也可以是一个无穷序列.

1.1.2　差商及其性质

定义 2　设已知函数$f(x)$在$n+1$个互不相同点$\{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$处的函数值,称

$$[x_i, x_j]f = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j)$$

为$f(x)$的一阶差商.一阶差商的一阶差商

$$[x_i,x_j,x_k]f=\frac{[x_i,x_j]f-[x_j,x_k]f}{x_i-x_k}\quad(i\neq k)$$

称为$f(x)$的二阶差商.一般地,称$(n-1)$阶差商的一阶差商

$$[x_0,x_1,\cdots,x_n]f=\frac{[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]f-[x_1,x_2,\cdots,x_n]f}{x_0-x_n}$$

为函数$f(x)$的n阶差商.特别地,函数值$f(x_i)$称为0阶差商,记为$[x_i]f$.

差商的主要性质如下:

性质1 $[x_0,x_1,\cdots,x_n](f+g)=[x_0,x_1,\cdots,x_n]f+[x_0,x_1,\cdots,x_n]g.$

性质2 $[x_0,x_1,\cdots,x_n]fg=\sum_{i=0}^{n}[x_0,\cdots,x_i]f\cdot[x_i,\cdots,x_n]g$,其中$[x_i]f=f(x_i)$为0阶差商.

性质3 若$f(x)=x^m$,m为自然数,则

$$[x_0,x_1,\cdots,x_n]f=\begin{cases}0, & n>m;\\ 1, & n=m;\\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-n \text{ 次的齐次函数}, & n<m.\end{cases}$$

性质4 n阶差商可表为函数值$f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$的线性组合,即

$$[x_0,x_1,\cdots,x_n]f=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

也即差商与节点的排列次序无关.

性质5 若$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数,且节点$x_i\in[a,b](i=0,1,\cdots,n)$,则存在$\xi\in[a,b]$,使

$$[x_0,x_1,\cdots,x_n]f=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

差商可以推广到具有重节点的情形,这时不再规定节点组是严格递增序列,只假定它们为非减序列

$$x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n.$$

一般地,有如下的差商定义

$$[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}]f=\begin{cases}\dfrac{1}{x_s-x_r}\{[x_i,\cdots,x_{r-1},x_{r+1},\cdots,x_{i+m}]f-[x_i,\cdots,x_{s-1},x_{s+1},\cdots,x_{i+m}]f\}, & \text{当 } x_s\neq x_r \text{ 时};\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{[x_i,\cdots,x_{r+\varepsilon},\cdots,x_{i+m}]f-[x_i,\cdots,x_r,\cdots,x_{i+m}]f}{\varepsilon}, & \text{当 } x_s=x_r \text{ 时}.\end{cases}$$

也就是说,在重节点处求差商就是求导,因而函数在重节点处求差商后光滑阶会降低.

1.1.3 多项式空间

定义3 称下列集合

$$\left\{p(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{i-1} : c_0, c_1, \cdots, c_m, x \text{ 都是实数}\right\}$$

是次数不超过 m 的实多项式空间，记为 $\pi_m(\mathbf{R})$（或简记为 π_m）. π_m 中的每个元素 $p(x)$ 称为 $m-1$ 次多项式.

定理 1 $\pi_m(\mathbf{R})$ 是 $C^\infty(\mathbf{R})$ 的线性子空间，且 $\dim\pi_m(\mathbf{R}) = m$. 对于任何实常数 a，函数 $1, x-a, \cdots, (x-a)^{m-1}$ 构成 $\pi_m(\mathbf{R})$ 的一组基底.

龙格(Runge)现象 取函数 $f(x) = 1/(1+x^2)$，在区间 $[-5,5]$ 上用多项式去逼近函数 $f(x)$. 最自然的方法是构造一个插值多项式 $p(x)$. 取区间 $[-5,5]$ 上的 m 个等分点

$$x_i = -5 + 10\frac{(i-1)}{(m-1)}, \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

由拉格朗日(Lagrange)插值，存在一个多项式 $p(x) \in \pi_m(\mathbf{R})$，满足条件 $p(x_i) = f(x_i)(i = 1,2,\cdots,m)$. 当 $m = 15$ 时，多项式 $p(x)$ 与函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1 所示.

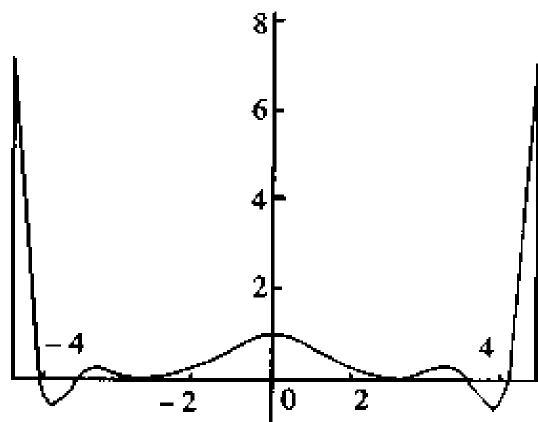


图 1-1

从图中看出：在区间的端点处，多项式不能很好地逼近函数，这种现象称为龙格现象. 龙格现象说明：多项式函数的整体逼近效果很差.

1.1.4 截断幂函数

定义 4 设 m 是一个非负整数，a 是一个常数. m 次截断幂函数是一个分段函数，定义为

$$(x-a)_+^0 = \begin{cases} 1, & x > a; \\ 0, & x \leqslant a. \end{cases}$$

当 $m \geqslant 1$ 时

$$(x-a)_+^m = \begin{cases} (x-a)^m, & x \geqslant a; \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

定理 2 当 $m \geqslant 1$ 时，截断幂函数 $(x-a)_+^m$ 是 $m-1$ 阶可微函数，即 $(x-a)_+^m \in C^{m-1}(\mathbf{R})$.

1.1.5　函数的支集

定义 5　给定一个函数 $f(x)$，它的支集 $\mathrm{supp}(f)$ 定义为

$$\mathrm{supp}(f) = \text{集合}\{x \mid f(x) \neq 0\}\text{ 的闭包}.$$

1.2　样条函数空间

由于存在龙格现象，用单个多项式函数逼近一个函数通常不可能达到理想的逼近精度. 为了实现用多项式函数类以较高的逼近精度近似某个函数，人们提出了分段多项式函数的思想，即样条函数的逼近方法. 样条函数的具体概念如下.

1.2.1　一般样条函数

定义 6　设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是给定区间 $[a,b]$ 上的剖分，其剖分子区间为 $I_i(i = 0,1,\cdots,k)$，记 $\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 是满足 $1 \leqslant k_i \leqslant m(i = 1,2,\cdots,n)$ 的整数向量. 称下列函数集合

$$S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta) = \{s \mid \text{存在多项式 } s_0, s_1, \cdots, s_n \in \pi_m(\mathbf{R})\},$$

使得当 $x \in I_i$ 时，

$$s(x) = s_i(x) \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

且

$$D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i) \quad (j = 0,1,\cdots,m-1-k_i)$$

为剖分 Δ 上重度为 $\boldsymbol{k}$ 的 m 阶（多项式）样条函数空间. $S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$ 中的任何函数称为重度为 $\boldsymbol{k}$ 的 m 阶样条函数. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样条函数的节点.

1° 重度向量 $\boldsymbol{k}$ 控制了样条函数在各个节点上的光滑度. 如果 $k_i = m$，则样条函数 s 在节点 x_i 处的光滑度为 -1，即多项式片 $s_{i-1}(x)$ 和 $s_i(x)$ 在 x_i 处互不相关联. 如果 $k_i < m-1$，那么样条函数 s 在节点 x_i 处具有直到 $m-1-k_i$ 阶的导数.

2° 如果区间 $[a,b]$ 是无限区间，样条函数的定义可以作自然的推广. 于是截断幂函数 $(x-a)_+^{m-1}$ 就是重度为 1 的 m 阶样条函数，仅有一个剖分节点 a.

3° 如果 $[a,b]$ 是有限区间，则对任何 $s(x) \in S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$，$s(x)$ 可以延拓到整个实轴上，使得当 $x < a$ 时，$s(x) = s_0(x)$；当 $x > b$ 时，$s(x) = s_n(x)$. 所以 $s(x)$ 可以看成是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上剖分为 Δ 的样条函数.

1.2.2　等光滑度 m 阶样条函数

上面定义的一般样条函数在剖分的不同节点处的光滑度不尽相同. 在实际应用中，更为广泛的函数是所谓的**等光滑度样条函数**，其定义如下.

定义 7　设 Δ 是 $[a,b]$ 的一个剖分，如果重度向量 $\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的各个分量具有相同的值，即 $k_i = m-1-k$，其中 k 是满足 $-1 \leqslant k \leqslant m-2$ 的整数，则称 $S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$ 是光滑度为 k 的 m 阶样条函数空间，简记为 $S_m^k(\Delta)$. 特别地，当 $k = -1$ 时，$S_m^{-1}(\Delta)$ 表示剖分 Δ 上的分片多项式空间.

光滑度为 k 的 m 阶样条函数 $s(x)$ 在节点处是 k 阶光滑的，即 $s(x) \in C^k[a,b]$.

1.2.3 $m-1$ 次样条函数

定义 8 称光滑度为 $m-2$ 的 m 阶样条函数空间 $S_m^{m-2}(\Delta)$ 为 $m-1$ 次样条函数空间(或称为 m 阶样条函数空间)，简记为 $S_m(\Delta)$，空间 $S_m(\Delta)$ 中的函数称为 $m-1$ 次样条函数.

$m-1$ 次样条函数 $s(x)$ 在每个剖分子区间上是 $m-1$ 次多项式，在每个剖分节点上的光滑度为 $m-2$. $m-1$ 次样条函数的定义仍然可以拓展到无穷区间$(-\infty,+\infty)$上.

例 1 设区间为$[0,1]$，$\Delta=\{1/2\}$，则函数

$$s(x)=\begin{cases}x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2;\\ 1-x, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$$

是区间$[0,1]$上的一次样条函数.

1.2.4 自然样条函数

定义 9 设 $\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 是区间$[a,b]$的一个剖分，$s(x)$ 是$[a,b]$上基于 Δ 的一个(奇次)$2m-1$ 次样条函数. 如果在区间$[a,x_1)$和$[x_n,b]$上分别是两个 $m-1$ 次多项式，则称 $s(x)$ 是一个 $2m-1$ 次**自然样条函数**. 全体 $2m-1$ 次自然样条函数记为 $N_{2m}(\Delta)$.

显然 $2m-1$ 次自然样条函数空间 $N_{2m}(\Delta)$ 是 $2m-1$ 次样条空间 $S_{2m}(\Delta)$ 的子空间. 通常自然样条函数可以延拓到整个实轴$(-\infty,+\infty)$上.

自然样条函数具有许多优良性质.

同样可以定义具有重度的自然样条函数及空间.

定义 10 设 $\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 是$[a,b]$的一个剖分，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为其重度向量. 定义函数空间

$N_{2m}^{\boldsymbol{k}}(\Delta)=\{s\in S_{2m}^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$：其中 $s_0=s|_{[a,x_1)}$ 和 $s_n=s|_{[x_n,b]}$ 是 $m-1$ 次多项式$\}$.

称 $N_{2m}^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$ 为重度为 $\boldsymbol{k}$ 的 $2m$ 阶(或 $2m-1$ 次)自然样条函数空间，其中的任一函数称为重度为 $\boldsymbol{k}$ 的 $2m$ 阶自然样条函数.

1.3 样条函数的性质

1.3.1 样条空间结构

定理 3 设 $\Delta=\{x_i\}_{i=1}^n$ 是区间$[a,b]$的一个剖分，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为其重度向量，记 $k=\sum_{i=1}^n k_i$. 则重度为 $\boldsymbol{k}$ 的 m 阶样条函数空间 $S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$ 的维数为 $m+k$，且下列函数系构成 $S_m^{\boldsymbol{k}}(\Delta)$ 的一组基底

$$\{\rho_{i,j}(x) = (x - x_i)_+^{m-j}\} \quad (i = 0,1,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,k_i),$$

其中 $x_0 = a$ 和 $k_0 = m$.

定理 3 说明 $S_m^k(\Delta)$ 中的任何函数 $s(x)$ 可以表示成如下的形式:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j (x - a)^{j-1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} (x - x_i)_+^{m-j}, \quad x \in [a,b],$$

其中 $\{b_j\}(j = 1,2,\cdots,n)$, $\{c_{ij}\}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,k_i)$ 是实常数. 由定理 3 不难得出以下推论.

推论 1　设 $S_m^k(\Delta)$ 是区间 $[a,b]$ 上关于剖分 $\Delta = \{x_i\}_{i=1}^n$ 的光滑度为 k 的 m 阶样条函数空间, 则 $S_m^k(\Delta)$ 的维数是 $(m - 1 - k)n + m$. 对任何 $s(x) \in S_m^k(\Delta)$, 存在常数 $\{b_j\}_{j=1}^m$ 和 $\{c_{ij}\}_{j=k+1, i=1}^{m-1}{}^{n}$ 使得

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j (x - a)^{j-1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{m-1} c_{ij} (x - x_i)_+^j, \ x \in [a,b].$$

推论 2　设 $S_m(\Delta)$ 是区间 $[a,b]$ 上关于剖分 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 的 $m - 1$ 次样条函数空间, 则 $S_m(\Delta)$ 的维数是 $m + n$. 对任何 $s(x) \in S_m(\Delta)$, 存在常数 $\{b_j\}(j = 1,2,\cdots,m)$ 和 $\{c_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$, 使得

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j (x - a)^{j-1} + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+^{m-1}, \quad x \in [a,b].$$

同样地, 上述定理及推论对无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的样条函数空间也是成立的. 特别地, 对 $m - 1$ 次样条函数空间有如下的结论.

推论 3　设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 的一个剖分. 则无穷区间上的 m 次样条函数空间 $S_m(\Delta)$ (用相同的记号) 的维数仍是 $m + n$, 并且 $S_m(\Delta)$ 中的任何样条函数 $s(x)$ 都可以表示成如下形式:

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+^{m-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中 $p_m(x) \in \pi_m(R)$, $\{c_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 为常数序列.

下面讨论自然样条函数空间的结构, 有如下的结论:

定理 4　设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 的一个剖分. 函数 $s(x) \in N_{2m}(\Delta)$ 的充分必要条件为: 存在一个多项式 $p_m(x) \in \pi_m(R)$ 和满足如下约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^j = 0 \quad (j = 0,1,\cdots,m-1)$$

的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+^{2m-1}, \quad x \in [a,b].$$

1.3.2　样条函数的关系

定理 5　设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 或无穷区间 $(-\infty, +\infty)$

的一个剖分，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为其重度向量，则

1° $\pi_m(R)\subset S_m(\Delta)$，$\pi_m(R)\subset S_m^k(\Delta)$；

2° 对任何 $-1\leqslant k\leqslant m-2$，有 $S_m(\Delta)\subset S_m^k(\Delta)$；

3° 令 $k_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{k_i\}$，则当 $k\geqslant m-k_0$ 时，有 $S_m^k(\Delta)\subset S_m^k(\Delta)$；

4° 设 $m\geqslant 1$，则 $N_{2m}(\Delta)\subset S_{2m}(\Delta)$.

定理 6　设 $s(x)\in S_m^k(\Delta)$ 并且是可微函数，则 $s'(x)\in S_{m-1}^{k'}(\Delta)$，其中

$$\boldsymbol{k}'=(k'_1,k'_2,\cdots,k'_n),\quad k'_i=\min\{m-1,k_i\}.$$

定理 7　设 $s(x)\in S_m^k(\Delta)$，则

$$\int_a^x s(t)\mathrm{d}t\in S_{m+1}^k(\Delta).$$

2　B 样条函数

由第 1 章的定理 3 知，样条函数空间中的任何一个样条函数都可以表示成一些截断幂函数的线性组合. 对于任何截断幂函数 $(x-a)_+^{m-1}$，由于 $\mathrm{supp}((x-a)_+^{m-1})=[a,+\infty)$，所以截断幂函数基底不具备局部特性. 这对于一些领域（如 CAGD）的实际应用问题是极不方便的.

B 样条函数则是一类具有有限支集的样条函数，它可以作为样条函数空间的基底，并且具有许多优良的性质.

2.1　B 样条函数的定义

B 样条函数有多种等价的定义方式，以下将使用差商来定义.

2.1.1　不等距节点 B 样条函数

定义 1　$m+1$ 个节点 $x_i\leqslant x_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{i+m}$ 上的 m 阶（不等距）规范 B 样条函数定义为

$$B_{i,m}(x)=(x_{i+m}-x_i)[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}](t-x)_+^{m-1},\qquad(2\text{-}1)$$

其中差商是关于变量 t 计算的. 简称为 B 样条函数.

1° 在定义 1 中，并不要求节点 $x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}$ 互不相同. 如果出现重复节点，求差商按求导数理解. 由于 $(t-x)_+^{m-1}$ 只有 $m-2$ 阶连续导数，故关系式 $x_i\leqslant x_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{i+m}$ 中至少有一个严格不等式成立. 一般要求 $x_i<x_{i+m}$ 即可.

2° 函数 $B_{i,m}(x)$ 定义在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，是剖分 Δ 上的分片 $m-1$ 次多项式函数，其中 $\overline{\Delta}=\{y_j\}$ 由 $x_i\leqslant x_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{i+m}$ 中互不相同的节点序列组成. 对任何 $y_j\in\overline{\Delta}$，如果 y_j 在 $x_i\leqslant x_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{i+m}$ 中是 μ_j 重点，则 $B_{i,m}(x)$ 在 y_j 处的光滑阶为 $m-1-\mu_j$.

例 1　取节点组 $\{x_0=0,x_1=1/2,x_2=1/2,x_3=1,x_4=2\}$，则相应的 4 阶规

范 B 样条函数为

$$B_{0,4}(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 4x^3, & 0\leqslant x<1/2;\\ \frac{68}{9}(x-\frac{1}{2})^3-10(x-\frac{1}{2})^2+3x-1, & 1/2\leqslant x<1;\\ -\frac{4}{9}(x-1)^3+\frac{4}{3}(x-1)^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}, & 1\leqslant x<2;\\ 0, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

此时剖分 $\overline{\Delta}=\{0,1/2,1,2\}$，节点 $y_1=1/2$ 的重度为2，故在 1/2处，函数 $B_{0,4}(x)$ 的光滑阶为 1，其他节点处的光滑阶为 2.

2.1.2　等距节点 B 样条函数

在数值分析中，应用得较广泛的 B 样条函数是所谓的等距节点上的 B 样条函数，其定义如下.

定义 2　在定义 1 中，如果节点组满足 $x_{i+j}=x_i+jh(0\leqslant j\leqslant m)$，其中 h 是固定值，称为节点步长，则(2-1)式定义的 m 阶 B 样条函数 $B_{i,m}(x)$ 称为**等距节点 B 样条函数**，并记为 $M_{i,m}(x)$.

1° 在等距节点 B 样条定义中，如果 $x_i=0$，步长 $h=1$，则相应的等距节点 B 样条函数 $M_{i,m}(x)$ 称为基本 B 样条函数(或整数节点 B 样条函数)，m 阶基本 B 样条函数记为 $N_m(x)$.

例 2　当 $m=2,3,4$ 时，基本 B 样条函数分别为

$$N_2(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$$

$$N_3(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\leqslant x<1,\\ (-2x^2+6x-3)/2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ (3-x)^2/2, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & x>3;\end{cases}$$

$$N_4(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3/6, & 0\leqslant x<1,\\ (-3x^3+12x^2-12x+4)/6, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ (3x^3-24x^2+60x-44)/6, & 2\leqslant x<3,\\ (4-x)^3/6, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

2° 等距节点 B 样条函数和基本 B 样条函数在节点处的光滑度为 $m-2$，故都具有 $m-2$ 阶连续导数.

3° 等距节点 B 样条函数 $M_{i,m}(x)$ 与基本 B 样条函数 $N_m(x)$ 具有如下的关系

$$M_{i,m}(x) = N_m\left(\frac{x - x_i}{h}\right).$$

从而关于等距节点 B 样条函数的问题可以归结于基本 B 样条函数.

2.2 B 样条的性质

2.2.1 基本性质

定理 1 设 $x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{i+m}$ 是节点序列,满足条件 $x_i < x_{i+m}$,则

$$\operatorname{supp} B_{i,m}(x) = [x_i, x_{i+m}]$$

在 $[x_i, x_{i+m}]$ 上, $B_{i,m}(x) > 0$.

本定理说明 B 样条函数 $B_{i,m}(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+m}]$ 外取值恒为零.这是与截断幂函数的重大区别.

推论 1 等距节点 B 样条函数 $M_{i,m}(x)$ 的支集为 $[x_i, x_{i+m}]$,在 $[x_i, x_{i+m}]$ 上, $M_{i,m}(x) \geqslant 0$.且 $M_{i,m}(x)$ 关于区间 $[x_i, x_{i+m}]$ 的中点 $x_i + \frac{m}{2}h$ 是对称的.

定理 2 设 $x_i < x_{i+1} = \cdots = x_{i+m}$,则

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_i)^{m-1}}{(x_{i+m} - x_i)^{m-1}}, & x_i \leqslant x < x_{i+m}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

类似地,如果 $x_i = \cdots = x_{i+m-1} < x_{i+m}$,则

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x_{i+m} - x)^{m-1}}{(x_{i+m} - x_i)^{m-1}}, & x_i \leqslant x < x_{i+m}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

2.2.2 B 样条基底性质

为了说明 B 样条函数对一般样条函数空间的基底性质,引入如下的概念.

定义 3 设剖分 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 满足 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,给定重度向量 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$,其中 $1 \leqslant k_i \leqslant m(i = 1,2,\cdots,n)$,记 $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.构造序列 $\{y_i\}(i = 1,2,\cdots,2m+k)$ 如下:

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{2m+k},$$

使得

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_m \leqslant a, b \leqslant y_{m+k+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{2m+k} \tag{2-2}$$

与

$$y_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{m+k} = \underbrace{x_1, \cdots, x_1}_{k_1}, \cdots, \underbrace{x_n, \cdots, x_n}_{k_n},$$

其中 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 和 $y_{m+k+1}, \cdots, y_{2m+k}$ 是满足条件(2-2)的任意常数.则称 $\tilde{\Delta} =$

$\{y_i\}(i=1,2,\cdots,2m+k)$ 是 Δ 关于样条函数空间 $S_m^k(\Delta)$ 的细剖分.

注意:细剖分 $\tilde{\Delta}$ 的构造是简单的,除了两端 $2m$ 个节点 $y_1,\cdots,y_m$ 和 $y_{m+k+1},\cdots,y_{2m+k}$ 是满足(2-2)式的任意常数外,其他的节点 $\{y_j\}$ 就是将原剖分 Δ 的分点 x_i 按其重度分量 k_i 进行重复的序列.

定理3　设 $\tilde{\Delta}=\{y_i\}(i=1,2,\cdots,m+k)$ 是 Δ 关于样条函数空间 $S_m^k(\Delta)$ 的细剖分,则对 $i=1,2,\cdots,m+k$,由节点序列

$$y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_{2m+k}$$

定义 $m+k$ 个规范 B 样条函数如下:

$$B_{i,m}(x)=(y_{i+m}-y_i)[y_i,\cdots,y_{i+m}](t-x)_+^{m-1},a\leqslant x\leqslant b,\qquad(2\text{-}3)$$

则其构成 $S_m^k(\Delta)$ 的一组基底.在 $[a,b]$ 上,有

$$\sum_{i=1}^{m+k}B_{i,m}(x)=1.\qquad(2\text{-}4)$$

1° 如果 $b=y_{m+k+1}=\cdots=y_{2m+k}$,在定理中,函数 $B_{m+k,m}(x)$ 在 $x=b$ 处的函数值理解为 $B_{m+k,m}(x)$ 在 $x=b$ 的左极限.根据定理2,由(2-3)式定义的函数 $B_{m+k,m}(x)$ 在 $x=b$ 处取零值,这样的修改是必要的.

2° 恒等式(2-4)称为 B 样条函数序列 $\{B_{i,m}(x)\}(i=1,2,\cdots,m+k)$ 的单位分解性质.

3° 定理3说明,对任何样条函数 $s(x)\in S_m^k(\Delta)$,存在常数序列 $\{c_i\}(i=1,2,\cdots,m+k)$,使得

$$s(x)=\sum_{i=1}^{m+k}c_iB_{i,m}(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

例3　取 $[a,b]=[0,5]$,$\Delta=\{1,2,3,4\}$,求一次样条函数空间 $S_2(\Delta)$ 的基底.

由推论2知,空间 $S_2(\Delta)$ 的一组基底可由截断幂函数给出:

$$1,x,(x-1)_+,(x-2)_+,(x-3)_+,(x-4)_+,$$

而它的 B 样条函数基底为

$$B_{-1,2}(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad B_{0,2}(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & 1\leqslant x<2;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$B_{1,2}(x)=\begin{cases}x-1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad B_{2,2}(x)=\begin{cases}x-2, & 2<x<3,\\ 4-x, & 3\leqslant x<4,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$B_{3,2}(x)=\begin{cases}x-3, & 3<x<4,\\ 5-x, & 4\leqslant x<5,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad B_{4,2}(x)=\begin{cases}x-4, & 4<x\leqslant 5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定理4(变差缩减性质)　设 $c_1,c_2,\cdots,c_{m+k}$ 是一组不全为零的实常数,则样条函数 $s(x)=\sum_{i=1}^{m+k}c_iB_{i,m}(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变号次数不超过系数序列 $\{c_i\}(i=1,2,$

$\cdots, m+k)$ 的变号次数.

2.2.3 B样条函数序列的性质

定理5(递推关系) 设 $m \geqslant 2$, 则 m 阶规范B样条函数满足如下的递推关系.

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{x_{i+m} - x}{x_{i+m} - x_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x),$$

其中

$$B_{j,1}(x) = \begin{cases} 1, & x_j \leqslant x < x_{j+1}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

定理6(求导递推公式) 设 $m \geqslant 2$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_{i,m}(x) = (m-1)\left\{ \frac{B_{i,m-1}(x)}{x_{i+m-1} - x_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{x_{i+m} - x_{i+1}} \right\}.$$

由于多项式空间 $\pi_m(\mathbf{R})$ 是样条函数空间 $S_m^k(\Delta)$ 的子空间, 所以每一个多项式可以由 B 样条函数表示.

定理7(多项式恒等式) 设 $T = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,N+m)$ 是一个非减序列, 且满足

$$x_i < x_{i+m}, \quad i = 1,2,\cdots,N,$$

则

$$(x-y)^{m-1} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{l=1}^{m-1} (x_{i+l} - y) B_{i,m}(x), \quad x_m < x < x_{N+1}.$$

如果记

$$\psi_{j,m}(y) = \prod_{l=1}^{m-1} (x_{i+l} - y), \quad j = 1,2,\cdots,N,$$

则不难由上述定理得以下推论.

推论2 对 $n = 0,1,\cdots,m-1$, 有

$$x^n = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{(-1)^{m-1-n} \psi_{j,m}^{(m-1-n)}(0)}{(m-1)\cdots(n+1)} \right) B_{j,m}(x).$$

2.2.4 基本B样条函数性质

以上有关 B 样条函数的性质对于基本 B 样条函数同样是成立的, 不仅如此, 基本 B 样条函数还具有如下性质.

定理8 1° 设 $\chi_{[0,1)}$ 是 $[0,1)$ 上的特征函数, 则

$$N_m(x) = \underbrace{\chi[0,1) * \chi[0,1) * \cdots * \chi[0,1)}_{m},$$

从而

$$N_m(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)\mathrm{d}t;$$

2° $N_m(x) = N_i(x) * N_{m-i}(x)$;

3° 如果记 $N_m(x)$ 的傅里叶(Fourier)变换为 $\widehat{N}_m(\theta)$，则

$$\widehat{N}_m(\theta)=\left(\frac{1-\exp(-\mathrm{i}\theta)}{\mathrm{i}\theta}\right)^m.$$

2.3 B 样条计算方法

设 $\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $[a,b]$ 的一个剖分，$k=\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$ 是相应的重度向量，记 $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$. 由定理3知，样条函数空间 $S_m^k(\Delta)$ 的维数是 $m+k$. 如果 $\widetilde{\Delta}=\{y_i\}(i=1,2,\cdots,m+k)$ 是 Δ 关于 $S_m^k(\Delta)$ 的细剖分，那么对任何 $s(x)\in S_m^k(\Delta)$，存在 $\{c_i\}(i=1,2,\cdots,m+k)$ 使得

$$s(x)=\sum_{i=1}^{m+k}c_iB_{i,m}(x).\tag{2-5}$$

上式称为样条函数 $s(x)$ 的 B 样条展开，序列 $\{c_i\}(i=1,2,\cdots,m+k)$ 称为样条函数 $s(x)$ 的控制点.

通过表达式(2-5)，可以得到计算样条函数的高效算法.

定理9 设样条函数 $s(x)$ 由(2-5)式给定，则对任何 $1\leqslant j\leqslant m$，有

$$s(x)=\sum_{i=1}^{m+k+j-1}c_i^{[j]}(x)B_{i,m-j+1}(x),$$

其中 $c_i^{[1]}(x)=c_i,i=1,2,\cdots,n$，且 $c_i^{[j]}(x)$ 可以递推计算如下：设 $c_{n+j}^{[j]}(x)=c_0^{[j]}(x)=0$，

$$c_i^{[j+1]}(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } y_{i+m-j}-y_i=0,\\ \dfrac{(x-y_i)c_i^{[j]}(x)+(y_{i+m-j}-x)c_{i-1}^{[j]}(x)}{y_{i+m-j}-y_i}, & \text{否则},\end{cases}\tag{2-6}$$

其中 $i=1,2,\cdots,m+k+j,j=1,2,\cdots,m-1$. 特别地，当 $y_l\leqslant x^*<y_{l+1}$，有

$$s(x^*)=c_l^{[m]}(x^*).$$

(2-6)式表明 $c_i^{[j+1]}(x)$ 是 $c_i^{[j]}(x)$ 和 $c_{i-1}^{[j]}$ 的凸线性组合，因此计算是稳定的. 同时，由(2-6)式不难看到，要计算 $y_l\leqslant x^*<y_{l+1}$ 点处的函数值 $s(x^*)$，只需要用到部分系数 $c_{l+1-m},\cdots,c_l$.

在 B 样条展开式(2-5)下，可以导出样条函数的求导公式.

定理10 设 $s(x)=\sum_{i=1}^{m+k}c_iB_{i,m}(x)$，对任何 $1\leqslant d\leqslant m$ 及 $y_m\leqslant x<y_{m+k}$，$s(x)$ 在 x 处的各阶右导数如下：

$$D_+^{d-1}s(x)=\sum_{i=d}^{m+k}c_i^{(d)}B_{i,m-d+1}(x),$$

其中 $c_i^{(1)}=c_i,i=1,2,\cdots,m+k$. 且对 $i=j,\cdots,m+k$ 和 $i=2,3,\cdots,d$，有

$$c_i^{(j)} = \begin{cases} (m-j+1)\dfrac{c_i^{(j-1)} - c_{i-1}^{(j-1)}}{y_{i+m-j+1} - y_i}, & (y_{i+m-j+1} - y_i) > 0; \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

关于样条函数的积分具有更简洁的计算公式.

定理 11　设 $s(x) = \sum_{i=1}^{m+k} c_i B_{i,m}(x)$,则对任何 $x < y_{m+k+1}$,有

$$I_{y_1} s(x) = \int_{y_1}^{x} s(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m+k} c_i^{(-1)} B_{i,m+1}(x),$$

其中

$$c_i^{(-1)} = \sum_{j=1}^{i} c_j (y_{m+j} - y_j)/m, \quad i = 1,2,\cdots,m+k.$$

3　样条函数插值方法

样条函数最常见的应用就是插值.插值方法是从有限的信息逼近未知函数的最基本的方法.插值方法有多种类型.多项式插值是最古老的方法之一.而在实际应用中,更具灵活性、有效性和简洁性的插值方法当属样条函数插值.样条函数插值讨论的主要问题是:1° 插值问题的提法;2° 插值问题的适定性;3° 插值解的唯一性;4° 插值解的计算.

3.1　分段多项式插值

3.1.1　分段线性插值

1.插值问题提法

设$[a,b]$是一个区间,$\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$是$[a,b]$的一个剖分.记 $x_0 = a, x_{n+1} = b$.给定 $f(x_i), i = 0,1,\cdots,n+1$,求一次(或二阶)样条函数 $L(x) \in S_2(\Delta)$,使得

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n+1. \tag{3-1}$$

如果 $L(x) \in S_2(\Delta)$ 满足(3-1)式,则称 $L(x)$ 为线性样条插值函数.

2.插值解

定理 1　对于任给的函数值 $f(x_i)(i = 0,1,\cdots,n+1)$,线性样条插值问题是唯一可解的,即存在唯一的**样条函数** $s(x) \in S_2(\Delta)$,使(3-1)式成立,且

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i) B_i(x),$$

其中

$$B_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - a}, & a \leqslant x < x_1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \qquad B_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{b - x_n}, & x_n \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$B_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\leqslant x<x_i,\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i\leqslant x<x_{i+1}, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

也即插值解 $s(x)$ 是连接点序列 $\{(x_i,f(x_i))\}(i=0,1,\cdots,n+1)$ 的折线函数.

3.1.2　分段埃尔米特(Hermite)插值

1. 插值问题提法

设 $\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个剖分,记 $x_0=a$ 和 $x_{n+1}=b$. 在每个节点上给出函数值 $f(x_i)$ 和一阶导数值 $f'(x_i)(i=0,1,\cdots,n+1)$. 求光滑度为 1 的 4 阶样条函数 $H(x)\in S_4^1(\Delta)$ 使得

$$H(x_i)=f(x_i),H'(x_i)=f'(x_i),i=0,1,\cdots,n+1. \tag{3-2}$$

满足条件(3-2)的样条函数 $H(x)\in S_4^1(\Delta)$ 称为分段三次埃尔米特插值函数. 显见

$$H(x)\in C^1[a,b].$$

2. 插值解

定理 2　对于给定的函数值 $f(x_i)$ 及一阶导数值 $f'(x_i)$, 满足条件(3-2)的分段三次埃尔米特插值函数 $H(x)$ 是存在唯一的. 且 $H(x)$ 可以表示为

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n+1}[f(x_i)B_i(x)+f'(x_i)C_i(x)],$$

其中

$$B_i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2\left(3-2\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right), & x_{i-1}\leqslant x<x_i;\\ \left(1-\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right), & x_i\leqslant x<x_{i+1};\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$C_i(x)=\begin{cases}-(x_i-x_{i-1})\left(\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2\left(1-\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right), & x_{i-1}\leqslant x<x_i;\\ (x_{i+1}-x_i)\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left(1-\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2, & x_i\leqslant x<x_{i+1};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这里 $x_{-1}<x_0$ 及 $x_{n+2}>x_{n+1}$ 为任意附加的两个结点.

3.2　三次样条插值

3.2.1　插值问题提法

设 $\Delta=\{x_i\}_{i=1}^n$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个剖分. 记 $x_0=a$ 和 $x_{n+1}=b$. 在每个节

点处给出函数值 $f(x_i)(i=0,1,\cdots,n+1)$,求三次样条函数 $s(x)\in S_4(\Delta)$,使得

$$s(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n+1. \tag{3-3}$$

如果存在 $s(x)\in S_4(\Delta)$ 使得条件(3-3)成立,那么称 $s(x)$ 是关于函数 $f(x)$ 的插值三次样条函数.

3.2.2　插值解的存在唯一性

三次样条函数空间 $S_4(\Delta)$ 的维数为 $n+4$.条件(3-3)仅给出了 $n+2$ 个约束条件,为了唯一地确定三次插值样条函数 $s(x)$,需要添加两个约束条件.在实际应用中,有两类典型的约束方式.

(1) Ⅰ 型边界条件:给定端点的斜率

$$s'(x_0)=f'(x_0),\quad s'(x_{n+1})=f'(x_{n+1}). \tag{3-4}$$

(2) Ⅱ 型边界条件:给定端点的二阶导数

$$s''(x_0)=f''(x_0),\quad s''(x_{n+1})=f''(x_{n+1}). \tag{3-5}$$

定理 3　满足 Ⅰ 型或 Ⅱ 型边界条件的插值是唯一存在的,即存在唯一的 $s(x)\in S_4(\Delta)$ 使(3-3)式及(3-4)式或(3-3)式及(3-5)式成立.

3.2.3　插值三次样条函数的计算

1.基于函数值和一阶导数值的表示式

插值三次样条函数 $s(x)$ 是分段三次多项式,且在区间 $[a,b]$ 上存在二阶连续导数.记在节点 x_i 处的一阶导数值为 $m_i(i=0,1,\cdots,n+1)$,则在 $[x_{i-1},x_i]$ 上插值三次样条函数 $s(x)$ 可以表示为

$$s(x)=f(x_{i-1})F_0(t)+f(x_i)F_1(t)+(x_i-x_{i-1})[m_{i-1}G_0(t)+m_iG_1(t)],$$

其中 $t=\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$, $F_0(t),F_1(t),G_0(t),G_1(t)$ 是 $[0,1]$ 区间上的三次埃尔米特插值基函数,即

$$\begin{cases}F_0(t)=2t^3-3t^2+1,\\ F_1(t)=-2t^3+3t^2,\\ G_0(t)=t^3-2t^2+t,\\ G_1(t)=t^3-t^2,\end{cases}\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

其一阶导数值 m_i 由下列方程组确定:

$$\begin{bmatrix}2 & \mu_0 & & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n & 2 & \mu_n \\ & & & & & \lambda_{n+1} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_0\\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_{n-1}\\ m_n\\ m_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{n-1}\\ c_n\\ c_{n+1}\end{bmatrix}, \tag{3-6}$$

其中

$$\lambda_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}},$$

$$c_i = 3\left[\lambda_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \mu_i \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right],$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

对 I 型边界条件

$$\mu_0 = 0, \quad c_0 = 2f'(a),$$

$$\lambda_{n+1} = 0, \quad c_{n+1} = 2f'(b).$$

对 II 型边界条件

$$\mu_0 = 1, \quad c_0 = 3\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} - \frac{x_1 - a}{2} f''(a),$$

$$\lambda_{n+1} = 1, \quad c_{n+1} = 3\frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} + \frac{b - x_n}{2} f''(b).$$

方程组(3-6)称为三转角方程.其系数矩阵是对角占优的,因而是非奇异的,可以唯一确定 $m_i(i = 0, 1, \cdots, n + 1)$.

2. 基于函数值和二阶导数值的表示式

插值三次样条函数 $s(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在二阶连续导数,记 $M_i = f''(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n + 1)$. 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上,有

$$s''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

则三次样条函数 $s(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上可以表示为

$$s(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \left(f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \left(f(x_i) - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

其二阶导数值 M_i 由下列方程组确定:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \mu_n & 2 & \lambda_n \\ & & & & & \mu_{n+1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \\ M_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3\text{-}7)$$

其中

$$\lambda_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \qquad \mu_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}},$$

$$d_i = \frac{6}{x_{i+1} - x_{i-1}}\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right),$$

$$i = 1,2,\cdots,n.$$

对 I 型边界条件

$$\lambda_0 = 1, \quad d_0 = 6\frac{f(x_1) - f(a)}{(x_1 - a)^2} - 6\frac{f'(a)}{x_1 - a},$$

$$\mu_{n+1} = 0, \quad d_{n+1} = -6\frac{f(b) - f(x_n)}{(b - x_n)^2} + 6\frac{f'(b)}{b - x_n}.$$

对 II 型边界条件

$$\lambda_0 = 0, \quad d_0 = 2f''(a),$$

$$\mu_{n+1} = 1, \quad d_{n+1} = 2f''(b).$$

方程组(3-7)称为三弯距方程,其系数矩阵是对角占优的,因而是非奇异的,可以唯一确定 $M_i(i = 0,1,\cdots,n+1)$.

3.3 一般样条插值基本问题

以下假设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是$[a,b]$上的一个剖分,$\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 是重度向量,记 $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$,$S_m^k(\Delta)$ 为重度为 k 的 m 阶样条函数空间.

3.3.1 拉格朗日样条函数插值

给定区间$[a,b]$上的点序列

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{m+k}.$$

对给定的函数值$\{f(t_i)\}(i = 1,2,\cdots,m+k)$,求重度为 k 的 m 阶样条函数 $s(x) \in S_m^k(\Delta)$,使

$$s(t_i) = f(t_i), \quad i = 1,2,\cdots,m+k.$$

如果上述样条函数 $s(x)$ 存在,则称它是关于函数 $f(x)$ 的 m 阶拉格朗日样条插值函数.

插值样条函数 $s(x)$ 的存在唯一性与插值节点序列$\{t_i\}(i = 1,2,\cdots,m+k)$的分布有关,有以下结论.

定理 4 设$\{y_i\}(i = 1,2,\cdots,m+k)$是 Δ 关于 $S_m^k(\Delta)$ 的细剖分,当且仅当 $y_i < t_i < y_{i+m}$ 时,m 阶拉格朗日样条插值函数是存在唯一的.

3.3.2 埃尔米特样条函数插值

给定$[a,b]$上的非减序列

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{m+k} \quad 且满足\ t_i < t_{i+m}.$$

设$\{t_i\}_{i=1}^{m+k}$中互不相同的节点为$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_v$，且$\tau_i$的重复次数为$\mu_i(i=1,2,\cdots,v)$.

给定τ_i处的函数值及导数值$\{f^{(j)}(\tau_i):j=0,1,\cdots,\mu_i-1,i=1,2,\cdots,v\}$，求样条函数$s(x)\in S_m^k(\Delta)$使

$$s^{(j)}(\tau_i)=f^{(j)}(\tau_i),\quad j=0,1,\cdots,\mu_i-1;i=1,2,\cdots,v. \tag{3-8}$$

如果满足条件(3-8)的插值函数$s(x)$存在，则称$s(x)$是关于函数$f(x)$的m阶埃尔米特样条插值函数.

定理5　设$\{y_i\}(i=1,2,\cdots,2m+k)$是$\Delta$关于$S_m^k(\Delta)$的细剖分，则$m$阶埃尔米特样条插值函数存在唯一的充分必要条件是

$$y_i<t_i<y_{i+m}.$$

特别地，如果$y_i=y_{i+1}=\cdots=y_{i+m-1}$，那么$y_i<t_i$理解为等式.

3.3.3　自然样条函数插值

自然样条函数是一类很重要的样条函数.关于它的插值问题，具有更明确的结论.

定理6　设$-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<+\infty$是$(-\infty,+\infty)$的一个剖分.任意给定函数值$\{y_i\}(i=1,2,\cdots,n)$，对$1\leqslant m\leqslant n$，存在唯一的$2m$阶自然样条函数$s(x)\in N_{2m}(\Delta)$，使得拉格朗日插值条件满足：

$$s(x_i)=y_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3-9}$$

满足条件(3-9)的自然样条函数$s(x)$称为$f(x)$的自然样条插值函数.定理6从理论上指明了自然样条函数插值的存在唯一性，不仅有重要的理论意义，而且在实际中有一定的指导意义.

自然样条插值函数具有所谓的最光滑性质.

定理7　设$s(x)\in N_{2m}(\Delta)$是满足插值条件(3-9)的自然样条函数，则对任何具有性质

$$f(x_i)=y_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

的函数$f(x)\in C^n[a,b]$，必有

$$\int_a^b[s^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f^{(n)}(x)]^2\mathrm{d}x,$$

且等号仅当$f(x)\equiv s(x)$时才成立.

由定理6还可以得到如下的完全样条插值的结论.

定理8　对任给的函数$f(x)\in C^{m-1}[a,b]$和$[a,b]$上的一个剖分$\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$，存在唯一的$2m-1$次样条函数$s(x)\in S_{2m}(\Delta)$满足如下的插值条件：

$$\begin{aligned}&s^{(j)}(a)=f^{(j)}(a),\quad j=0,1,\cdots,m-1;\\&s^{(j)}(b)=f^{(j)}(b),\quad j=0,1,\cdots,m-1;\\&s(x_i)=f(x_i),\qquad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

4　样条函数的其他类别

4.1　周期样条函数

4.1.1　周期样条函数的概念

定义 1　设 $\Delta = \{x_i\}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是$[a,b]$上的一个剖分，$\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,\cdots,k_n)$为其重度向量，定义 m 阶周期样条函数空间为

$$\widetilde{S}_m^k(\Delta) = \{s \in S_m^k(\Delta): s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b), j = 0,1,\cdots,m-1\}.$$

空间 $\widetilde{S}_m^k(\Delta)$ 中的函数称为 m 阶**周期样条函数**.

每个 m 阶周期样条函数 $s(x)$ 可以表示为

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^{j-1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij}(x - x_i)_+^{m-1-j}, \tag{4-1}$$

其中系数$\{b_j\}(j = 1,2,\cdots,m)$,$\{c_{ij}\}$ 满足条件

$$s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b),\quad j = 0,1,\cdots,m-1. \tag{4-2}$$

反之亦然，即满足(4-1)式和(4-2)式的函数 $s(x)$ 是一个 m 阶周期样条函数.

4.1.2　周期 B 样条函数

为了给出重度为 k 的周期样条函数空间 $\widetilde{S}_m^k(\Delta)$ 的局部基底，可引入周期 B 样条概念.

记 $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $\widetilde{\Delta} = \{y_i\}(i = 1,2,\cdots,2m+k)$ 是 Δ 关于 $S_m^k(\Delta)$ 的细剖分，序列两端的 $2m$ 个节点取值为

$$y_i = y_{i+k} - (b-a),\quad y_{k+m+i} = y_{m+i} + (b-a),\quad i = 1,2,\cdots,m.$$

定义 2　称如下定义的样条函数为周期 B 样条函数：

$$\widetilde{B}_{i,m}(x) = B_{i,m}(x),\quad i = m+1,\cdots,k$$

及

$$\widetilde{B}_{i,m}(x) = \begin{cases} B_{i,m}(x), & a \leqslant x < y_{i+m}, \\ B_{i+k,m}(x), & y_{i+m} \leqslant x < b, \end{cases}\quad j = 1,2,\cdots,m,$$

其中 $B_{i,m}(x)$ 是关于序列$\{y_i\}(i = 1,2,\cdots,2m+k)$ 的 B 样条函数.

定理 1　周期 B 样条函数序列$\{\widetilde{B}_{i,m}(x)\}(i = 1,2,\cdots,k)$ 构成 m 阶周期样条函数空间 $\widetilde{S}_m^k(\Delta)$ 的基底，也即对任何周期样条函数 $s(x) \in \widetilde{S}_m^k(\Delta)$，存在常数序

列$\{c_j\}(j=1,2,\cdots,k)$,使

$$s(x)=\sum_{j=1}^{k}c_j\widetilde{B}_{j,m}(x).$$

特别地,取$c_{j+k}=c_j(j=1,2,\cdots,m)$,则$s(x)$可以表为

$$s(x)=\sum_{j=1}^{m+k}c_jB_{j,m}(x).$$

例1　取区间$[a,b]=[0,3]$,设$m=2,\Delta=\{1/2,3/2,5/2\}$,重度向量为$\boldsymbol{k}=(1,1,1)$.则二阶周期样条函数空间$\widetilde{S}_m^k(\Delta)$的维数是$k=3$.每个周期样条函数是分片线性连续函数,定义2给出的周期B样条函数基底由下列三个函数构成:

$$\widetilde{B}_{1,2}=\begin{cases}\frac{1}{2}-x, & 0\leqslant x<1/2,\\ 0, & 1/2\leqslant x<3/2,\\ x-\frac{3}{2}, & 3/2\leqslant x<5/2,\\ \frac{7}{2}-x, & 5/2\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}\qquad \widetilde{B}_{2,2}=\begin{cases}\frac{1}{2}+x, & 0\leqslant x<1/2,\\ \frac{3}{2}-x, & 1/2\leqslant x<3/2,\\ 0, & 3/2\leqslant x<5/2,\\ x-\frac{5}{2}, & 5/2\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\widetilde{B}_{3,2}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1/2,\\ x-\frac{1}{2}, & 1/2\leqslant x<3/2,\\ \frac{5}{2}-x, & 3/2\leqslant x<5/2,\\ 0, & 5/2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

4.1.3　周期样条函数的埃尔米特插值

设$\Delta=\{x_i\}(i=1,2,\cdots,n)$是区间$[a,b]$的一个剖分,其重度向量为$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,记$k=\sum_{i=1}^{n}k_i$.令$\widetilde{\Delta}=\{y_i\}(i=1,2,\cdots,2m+k)$是$\Delta$关于$S_m^k(\Delta)$的细剖分,且满足

$$y_i=y_{i+k}-(b-a),y_{k+m+i}=y_{m+i}+(b-a)\quad i=1,2,\cdots,m.$$

设

$$a<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k<b$$

为插值节点序列,且满足条件$t_i<t_{i+m}$.如果某个节点重复出现μ_i次,则表示在该节点处可以提供未知函数的直到μ_i-1阶的导数值.

埃尔米特插值问题提法如下:对$[a,b]$上一定光滑的函数f,求一个阶周期样条函数$s\in\widetilde{S}_m^k(\Delta)$,使其满足插值条件:

$$s^{(j)}(t_i)=f^{(j)}(t_i),\quad j=0,1,\cdots,\mu_i-1,\quad t_i\text{的重复次数为}\mu_i.$$

关于上述周期样条埃尔米特插值问题,有如下结论.

定理 2 设 $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$ 是奇数,则周期样条埃尔米特插值问题存在唯一解的充分必要条件是:存在某个非负整数 p,使得

$$y_{p+i} < t_i < y_{p+i+m}, \quad i=1,2,\cdots,k, \tag{4-3}$$

其中 $\{y_i\}(i=1,2,\cdots,2m+k)$ 是细剖分节点组. 特别地,如果 $y_{p+i}=\cdots=y_{p+i+m-1}$,则(4-3)式中式端不等式理解为等式.

4.2 单一样条函数

4.2.1 基本概念

定义 3 设 $S_m^k(\Delta)$ 是重度为 k 的 m 阶样条函数空间. 对任何 $s(x)\in S_m^k(\Delta)$,函数

$$\frac{x^m}{m!}+s(x)$$

称为是 m 阶单一样条函数. 全体 m 阶单一样条函数构成的空间称为 m 阶单一样条函数空间,记为 $MS_m^k(\Delta)$.

定理 3 设 $s\in MS_m^k(\Delta)$,则 s 的右导数函数 $D+s$ 也是单一样条函数,且

$$D+s\in MS_{m-1}^{k'}(\Delta),$$

其中重度向量 $k'=(k'_1,k'_2,\cdots,k'_n)$, $k'_i=\min\{k_i,m-1\}$, $i=1,2,\cdots,n$.

4.2.2 单一样条函数与积分公式

由于每一个 m 阶单一样条函数 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以表为如下形式:

$$M(x)=\frac{(b-x)^m}{m!}-\sum_{j=0}^{m-1}B_j\frac{(b-x)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}a_{ij}\frac{(x_i-x)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!}, \tag{4-4}$$

其中 B_j 和 a_{ij} 是某些常数.

设 J_1 和 J_2 是 $\{0,1,\cdots,m-1\}$ 的子集. 设 $M(x)$ 由(4-4)式给出,满足条件

$$M^{(j)}(a)=0,\quad j\in J_1;\quad M^{(j)}(b)=0,\quad j\in J_2. \tag{4-5}$$

令 $M(\Delta;J_1,J_2)$ 表示满足(4-4)式和(4-5)式的单一样条函数全体.

由 J_1,J_2 可以定义标号集合

$$\mathcal{J}_i=\{0\leqslant j\leqslant m-1: m-j-1\bar{\in} J_i\},\quad i=1,2.$$

定义积分公式

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{j\in\mathcal{J}_1}A_jf^{(j)}(a)+\sum_{j\in\mathcal{J}_2}B_jf(j)(b)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i-1}a_{ij}f^{(j)}(x_i). \tag{4-6}$$

定理4　对任何 $M(x)\in M(\Delta;J_1,J_2)$,取 $A_j=(-1)^{m-j-1}M^{(m-j-1)}(a)$,$B_j$ 和 a_{ij} 由(4-4)式决定,则求积公式(4-6)具有 $m-1$ 阶代数精度;反之,如果形如(4-6)式的求积公式具有 $m-1$ 阶代数精度,则由(4-4)式定义的单一样条函数 $M(x)\in M(\Delta;J_1,J_2)$.

4.3　参数样条

4.3.1　一般参数样条曲线

定义4　设 t 是定义于有限区间 $[a,b]$ 上的某个参数. Δ 是 $[a,b]$ 上的一个剖分. 设分量函数 $x_i(t)\in S_m^k(\Delta)(i=1,2,\cdots,n)$,则称空间 $\mathbf{R}^n$ 中的参数曲线 $P(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ 为参数样条曲线.

换句话说,参数样条曲线的各个坐标分量是一个样条函数. 很明显,这大大地推广了样条函数的概念. 本节仅以平面参数样条曲线为例,说明有关的结论.

4.3.2　三次参数样条曲线及拼接

1. 插值三次参数样条曲线

在 CAGD 中应用最为广泛的是所谓的三次参数样条曲线.

定义5　设给定平面上的 $n+1$ 个型值点 $P_i(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,n)$. t 是定义于有限区间 $[a,b]$ 上的某个参数. Δ 是 $[a,b]$ 上的一个剖分. 如果存在三次样条函数 $x(t),y(t)\in S_3(\Delta)$(即分片三次二阶光滑函数),满足 $x(t_i)=x_i,y(t_i)=y_i$,那么参数曲线 $P(t)=(x(t),y(t))$ 称为关于型值点 $P_i(x_i,y_i)$ 的插值三次样条参数曲线.

对三次参数样条曲线来说,x 和 y 之间的关系一般已不再是分片三次多项式的关系. 实际上,三次参数样条曲线是一种分片的代数有理曲线.

用第3.2节介绍的方法,可以使用三转角方程或者三弯矩方程求出插值三次参数样条曲线的两个分量 $x(t)$ 和 $y(t)$. 这时需要关于两个分量的边界条件 $x'(a),x'(b),y'(a),y'(b)$ 或 $x''(a),x''(b),y''(a),y''(b)$,其中求导是对参数 t 进行的.

2. 插值三次累加弦长参数样条曲线

记 P_{i-1},P_i 之间的弦长为

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

定义参数区间 $[0,\sum_{j=1}^{n}l_j]$,设参数 t 关于该区间的一个剖分为

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n,t_i=\sum_{j=1}^{i}l_j. \tag{4-7}$$

定义6　对上述特定的参数区间 $[0,\sum_{j=1}^{n}l_j]$ 及剖分(4-7),由定义5定义的插值

三次参数样条曲线称为插值三次累加弦长参数样条曲线.

3. 参数样条曲线光滑连接

实际应用中,常将几段参数样条曲线拼接起来,使得在连接处具有一定的光滑度.其中 C^2 连接是最常用的方法.

定义 7 参数曲线段的 C^2 连接是指相邻两段在连接处的位置、切向和曲率是连续的.关于 C^2 连接,有如下结论.

定理 5 为了连接两条参数曲线段 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$, $t \in [0,1]$,使之达到 C^2 连续,其充分必要条件是:存在任意常数 $\alpha(>0)$ 和 β,使得

$$\begin{cases} P_1(1) = P_2(0); \\ P'_1(1) = \alpha P'_2(0); \\ P''_1(1) = \alpha P_2(0) + \beta P'_2(0). \end{cases}$$

其中常数 α 和 β 称为拼接参数.

参数曲线段之间达到 C^2 连接有 2 个自由参数可以供选择,从而有较大的灵活性.

定理 6 插值三次累加弦长参数样条曲线是 C^2 连续的,且在各连接点处,其拼接参数为 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$.

4.3.3 *B* 样条参数曲线

记 $N_m(t)$ 是节点组 $t = 0,1,\cdots,m$ 上的基本 B 样条函数,在区间 $[0,1]$ 上,对 $l = 1,2,\cdots,m$,定义函数

$$B_{lm}(t) = N_m(t - l + m), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

例 2 当 $m = 2$ 时,不难计算得到

1° $B_{12}(t) = 1 - t$, $B_{22}(t) = t$;

2° 当 $n = 3$ 时,有

$$B_{13}(t) = \frac{1}{2}(1-t)^2, \quad B_{23}(t) = \frac{1}{2}(-2t^2 + 2t + 1), B_{33}(t) = \frac{1}{2}t^2;$$

3° 当 $n = 4$ 时,有

$$B_{14}(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \quad B_{24}(t) = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3},$$

$$B_{34}(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}, \qquad B_{44}(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

定义 8 在平面(或空间)上给定 $n + m$ 个点 $\{P_i\}(i = 1,2,\cdots,n+m)$. 称 $m - 1$ 次参数曲线

$$P_{i,m}(t) = \sum_{l=1}^{m} P_{i+l}B_{lm}(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$$

为 $m-1$ 次 B 样条参数曲线的第 i 段, $i = 0,1,\cdots,n$. 这 $n+1$ 段曲线的全体就称为 $m-1$ 次 B 样条参数曲线.

由定义不难看出,每一段 B 样条参数曲线由相继的 m 个顶点 $P_{i+1},\cdots,P_{i+m}$ 决定.实际中常常应用低次的 B 样条参数曲线.

定理 7　二次 B 样条参数曲线是整体 C^1 连续的，三次 B 样条参数曲线在整体上是 C^2 连续的.

定理 8　设点列 $\{P_i\}(i = 1,2,\cdots,n+4)$ 是凸的，那么整体 C^2 连续的三次 B 样条参数曲线也是凸的.

参 考 文 献

1 Schumaker L L. Spline functions: basic theory. New York: John Wiley & Sons, 1981.

2 Bojanov B D, Hakopian H A, Sahakian A A. Spline functions and multivariate interpolations. London: Kluwer Academic Publishers, 1993.

3 李岳生. 样条与插值. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

4 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.

5 徐利治, 王仁宏, 周蕴时. 函数逼近的理论与方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

·近代数学卷·

第20篇

分形几何

编　者　文志英

审校者　胡适耕　华　苏

目　　录

引　言

自然界中出现的诸如云层的边界、山脉的轮廓、雪花、海岸线等“不规则”的几何形体难以用经典几何中的直线、光滑曲线、光滑曲面来描述.同时,大量的不同类型的及不规则的几何对象常常出现在自然科学的不同领域中:如数学非线性问题中出现的吸引子,流体力学中的湍流,物理中临界现象与相变,化学中酶与蛋白质的构造,生物中细胞的生长,工程技术中的信号处理,噪声分析……长期以来,人们试图将他们纳入经典几何的框架中研究,但在研究中发现,由此导出的模型即使在近似的情形,无论在理论上还是在实践中,均难以处理所接触的实际情形.另一方面,人们已注意到不规则集合往往能提供许多自然现象的更好的描述.20 世纪 80 年代初,由曼德尔布洛特所创立的分形几何提供了研究这类不规则几何对象的思想、方法和技巧.特别在近年来,这一新兴学科在数学、物理、化学、生物、医学、地质、材料、工程技术……诸学科中获得巨大成功,同时,不同学科中提出的大量问题刺激了分形几何的深入发展.

分形几何的研究对象为不规则的几何形体,它们由“形”与“维数”来描述:“形”用于描述其几何形态,而“维数”则描述其复杂程度.

本篇将介绍下述内容:

1° 各种测度与维数的概念与意义,它们之间差异与相互关系;

2° 几类典型的分形集;

3° 测度的分形分析.

1　测度与维数

1.1　豪斯多夫测度,填充测度与闵可夫斯基容度

测量一个几何对象的“大小”依赖于测量方法以及测量所用的“尺度”,如果几何对象是光滑的,那么只需用整数作为尺度,并且测量结果与测量方式无关;而对于不光滑的几何对象,则上面两个因素起重要作用,特别地,测量的结果往往依赖于测量方法.

1.1.1　豪斯多夫测度

1.定义

设 $A \subset \mathbf{R}^d$ 为 d 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^d$ 的一个子集.$s \geqslant 0$ 为非负实数.设 $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$ 为可列或有限个 $\mathbf{R}^d$ 中的子集,若 $\bigcup_{i\geqslant 1} U_i \supset A$,且对任意 i,$|U_i| \leqslant \delta$,则称 $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$ 为 A 的一个 δ-覆盖.令

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf\sum_i |U_i|^s,$$

其中 inf 表示对 A 所有 δ- 覆盖取下确界.令

$$\mathscr{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}^s_\delta(A),$$

则 $\mathscr{H}^s(A)$ 称为 A 的 s- 维豪斯多夫(Hausdorff) 测度.

2.性质

1° 豪斯多夫测度为外测度;

2° 单调性:设 $A\subset B$,则对任意 $s\geqslant 0$, $\mathscr{H}^s(A)\leqslant\mathscr{H}^s(B)$;

3° 齐次性:设 $\lambda>0$,则对任意 $A\subset\mathbf{R}^d$, $\mathscr{H}^s(\lambda A)=\lambda^s\mathscr{H}^s(A)$;

4° 设 f 为利普希茨(Lipschitz) 映射,即存在 $c>0$,使得对任意 $x,y\in\mathbf{R}^d$,有 $|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|$,则

$$\mathscr{H}^s f(A)\leqslant c^s\mathscr{H}^s(A).$$

3.弗洛斯特曼引理

如果存在正常数 $c>0$,使得对任意 $U\subset\mathbf{R}^d$,有 $\mu(U)\leqslant c|U|^\alpha$,则称 $\mathbf{R}^d$ 上的正有界博雷尔(Borel) 测度 μ 满足 α- 阶赫尔德(Hölder) 条件.

下述弗洛斯特曼引理是估计豪斯多夫测度与豪斯多夫维数的基本定理:

(1) 设 $s\geqslant 0$,由 E 支撑的正有界博雷尔测度 μ 满足 s- 阶赫尔德条件,则

$$\mathscr{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c.$$

(2) 设 E 为 $\mathbf{R}^d$ 中紧集.设 $\mathscr{H}^\alpha(E)>0$,则存在由 E 支撑的 α 阶赫尔德正有界博雷尔测度.

1.1.2　填充测度

与定义豪斯多夫测度所用的覆盖方式相反,以填充的方式定义**填充测度**.

1.定义

设 $A\subset\mathbf{R}^d$, $s\geqslant 0$, $\delta>0$.令 $P^s_\delta(A)=\sup\left\{\sum_i|U_i|^s\right\}$, $\{U_i\}$ 为一列中心在 A 上的互不相交的,直径不大于 δ 的球

$$P^s(A)=\lim_{\delta\to 0}P^s_\delta(A).$$

在这种情形,与 $\mathscr{H}^s(A)$ 不同的是, $P^s(A)$ 不是一个外测度,但可以通过下述方式将它修正为一个外测度:

$$\mathscr{P}^s(A):=\inf\left\{\sum_i P^s(A_i):A\subset\bigcup_i A_i\right\}.$$

$\mathscr{P}^s(A)$ 称为 A 的 s- 维填充测度.

2.性质

1° 填充测度具有豪斯多夫测度所具有的性质 1.1.1 中之 2;

2° 对任意 $A\subset\mathbf{R}^d$ 及 $s\geqslant 0$, $\mathscr{H}^s(A)\leqslant\mathscr{P}^s(A)$.

1.1.3　闵可夫斯基容度

定义　设 E 为 $\mathbf{R}^d$ 的非空有界子集, $s\geqslant 0$.则 E 的上、下 s- 维闵可夫斯基

(Minkowski) 容度分别定义为

$$\mathscr{B}^{*s}(E) = \limsup_{\epsilon\to 0}\frac{\mathscr{L}^d(E(\epsilon))}{(2\epsilon)^{d-s}},$$

$$\mathscr{B}^s_*(E) = \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{\mathscr{L}^d(E(\epsilon))}{(2\epsilon)^{d-s}}.$$

其中 $\mathscr{L}^d$表示d维勒贝格测度,如果$\mathscr{B}^{*s}(E) = \mathscr{B}^s_*(E)$,则称 E 的s-维闵可夫斯基容度存在,记为$\mathscr{B}^s(E)$,并等于上述共同值.

容易验证单点集的1-维闵可夫斯基容度为零,而[0,1]区间上的有理数集 $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ 的1-维闵可夫斯基容度为1,因而闵可夫斯基容度不具次可加性,所以它不是一个外测度.

1.2 豪斯多夫维数,填充维数,上下闵可夫斯基维数

1.2.1 *豪斯多夫维数及填充维数的定义及性质*

1. 定义

设 $A\subset\mathbf{R}^d$,则存在唯一的非负实数 $\dim_H(A)$ 满足下述性质:若 $0\leqslant s<\dim_H(A)$,则$\mathscr{H}^s(A)=\infty$;若 $\dim_H(A)<s$,则$\mathscr{H}^s(A)=0$,值 $\dim_H(A)$ 称为 A 的豪斯多夫维数.

从豪斯多夫测度的定义可以看到,$\dim_H(A)$ 是测量 A 的一个合适的尺度,若所用尺度大于它,则过于粗,否则则过于细.因此,$\dim_H$ 刻划了集合的复杂程度,从几何的角度看,则表示了集合的填充空间的能力.

正是基于上述思想,豪斯多夫将传统的维数概念通过覆盖的方式推广到了一般的非负实数.

若$\mathscr{H}^{\dim_H(A)}(A)$为一正有限数,则$A$称为$s$-集,这类集合有很好的几何性质与分析性质.

在上述豪斯多夫维数的定义中,用填充测度代替豪斯多夫维数,则得到填充维数的定义,可用 $\dim_P$ 表示**填充维数**.

2. 性质

豪斯多夫维数与填充维数具有下述基本性质.

1° 单调性:若 $A\subset B$,则 $\dim_H(A)\geqslant\dim_H(B)$.

2° 可列平稳性:$\dim_H(\bigcup A_i) = \sup\dim_H(A_i)$.一个直接推论是可列集的豪斯多夫维数为零.

3° 利普希茨不变性:若f为双利普希茨变换,则 $\dim_H(f(A)) = \dim_H(A)$,从而上述等式对平移、旋转及相似变换均成立.

4° 若集A的d-维勒贝格(Lebesgue)测度大于零,则 $\dim_H(A) = d$,特别:$\mathbf{R}^d$中的任一开集的维数为 d.

特别应指出的是,豪斯多夫测度与填充测度,豪斯多夫维数与填充维数间具有很多有意思的对偶关系.

1.2.2　闵可夫斯基维数的定义及性质

1. 定义

设 A 为 $\mathbf{R}^d$ 的非空有界集，则 A 的上、下闵可夫斯基维数分别定义为

$$\overline{\dim}_B(A) = \sup\{s:\mathscr{P}^{*s}(A) = \infty\} = \inf\{s:\mathscr{P}^{*s}(A) = 0\},$$

$$\underline{\dim}_B(A) = \sup\{s:\mathscr{P}^{s}_{*}(A) = \infty\} = \inf\{s:\mathscr{P}^{s}_{*}(A) = 0\}.$$

若 $\overline{\dim}_B(A) = \underline{\dim}_B(A)$，则称 E 的闵可夫斯基维数存在，记为 $\dim_B(A)$，其值为上述公共值.

闵可夫斯基维数亦称布里冈维数、计盒维数、熵维数、容量维数、度量维数、对数密度、信息维数、科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)度量熵.

不少文献中使用的分形维数常指闵可夫斯基维数，读者应根据上下文加以区别.

闵可夫斯基维数尚有下述等价定义，在应用中可根据需要来选择它们.

用 $N_\delta^i(A)(i = 1,2,3,4)$ 分别记：与 A 相交的 δ-平行网中的立方体的数目、半径至多为 δ 的可覆盖 A 的集的最小数目、边长为 δ 的可覆盖 A 的 d 维立方体的最小数目、半径为 δ 互不相交的中心在 A 上的球的最大数目. 则

$$\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta^i(A)}{-\log\delta},\quad i = 1,2,3,4;$$

$$\underline{\dim}_B(A) = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta^i(A)}{-\log\delta},\quad i = 1,2,3,4.$$

上述第一个等价定义是闵可夫斯基维数的格子记数算法的基础.

下述闵可夫斯基维数的另一等价定义具有更明显的几何意义：令 $A(\epsilon)$ 表示与集 A 的距离不超过 ϵ 的点的集合，令 $|A(\epsilon)|_d$ 表示它的 d-维勒贝格测度，则

$$\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\left(d - \frac{\log|A(\epsilon)|_d}{\log\epsilon}\right).$$

$$\underline{\dim}_B(A) = \underline{\lim}_{\epsilon\to 0}\left(d - \frac{\mathrm{lod}|A(\epsilon)|_d}{\log\epsilon}\right).$$

2. 性质

闵可夫斯基维数除具有前述豪斯多夫维数的性质 1°、3°、4° 外(注意，它不具有性质(2°))，还具有下述性质.

1° 有限平稳性 $\dim_B(A_1\cup A_2) = \max\{\dim_B(A_1),\dim_B(A_2)\}$.

2° $\dim_B(A) = \dim_B(\overline{A})$，$\overline{A}$ 表示 A 的闭包.

上述性质指出，可列集的闵可夫斯基维数可以不为零，如 $\dim_B\mathbf{Q} = 1$，$\mathbf{Q}$ 为有理数集.

3° 设 $\underline{\dim}_BA < \overline{\dim}_BA$，则对任意 $\underline{\dim}_BA < \alpha < \overline{\dim}_BA$，存在 $\{\eta_k\}\downarrow 0$，使得

$$\frac{\log N_{\delta_k}(A)}{-\log\delta_k}\to\alpha,$$

其中 $N_{\delta_k}(A)$ 表示与 A 相交的 δ-平行网中的立方体的数目.

上述结果表明，如果上、下闵可夫斯基维数不相等，打格子算法无效.

3. 各种不同维数的比较

1° $\dim_H \leqslant \dim_P \leqslant \overline{\dim}_B$;

2° $\dim_H \leqslant \underline{\dim}_B$.

1.3 容量与容量维数

1.3.1 势与能量

设 μ 是 $\mathbf{R}^d$ 上正有界博雷尔测度, $\alpha \geqslant 0$. μ 在点 $x \in \mathbf{R}^d$ 的 α- 势定义为

$$U_\mu^\alpha(x) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^\alpha},$$

μ 的 α- 能量定义为

$$I_\alpha(\mu) = \int U_\mu^\alpha(x)\mathrm{d}\mu(x) = \iint \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

1.3.2 容量与容量维数

1. 容量

设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 的紧子集,记

$$I(K) = \inf_{\mu \in \mathscr{M}_1(K)} I_\alpha(\mu),$$

其中 $\mathscr{M}_1(K)$ 表示由 K 支撑的博雷尔概率测度构成的集合. 紧集 K 的 α- 容量定义为

$$C_\alpha(K) = (I(K))^{-1} = \sup\{(I_\alpha(\mu))^{-1}; \mu \in \mathscr{M}_1(K)\}.$$

任意 $E \subset \mathbf{R}^d$ 的 α- 容量定义为

$$C_\alpha(E) = \sup\{C_\alpha(K): K \subset E, K \text{ 紧}\}.$$

容量不具有次可加性,从而不是外测度.

2. 容量维数

集 $E \subset \mathbf{R}^d$ 的容量维数定义为

$$\dim_C E = \sup\{s: C_s(E) > 0\} = \inf\{s: C_s(E) = 0\}.$$

1.3.3 性质

下述性质分别揭示豪斯多夫测度与容度,豪斯多夫维数与容量维数间的关系:

(1) 设 $E \subset \mathbf{R}^d$ 为博雷尔集,

1° 若 $\mu \in \mathscr{M}_b^+(E)$, $I_\alpha(\mu) < \infty$, $\alpha > 0$,则 $\mathscr{H}^\alpha(E)$.$\mathscr{H}^\alpha(E) > 0$;

2° 若 $\mathscr{H}^\alpha(E) > 0$,则存在 $\mu \in \mathscr{M}_b^+(E)$,使对任意 $\beta < \alpha$, $I_\beta(\mu) < \infty$;

(2) 若 $E \subset \mathbf{R}^d$ 为博雷尔集,则 $\dim_H E = \dim_C E$.

1.4 覆盖引理

下述覆盖引理在豪斯多夫测度与豪斯多夫维数的估计中起重要作用.

1.4.1　5r-覆盖引理

令 B 是 $\mathbf{R}^d$ 中的球,以 $5B$ 表示与 B 同心,半径为 B 的半径的5倍的球.

设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 中有界区域内的闭球簇,则存在可列或有限个彼此不相交的子球簇 $\{B_i\}$,使得

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_i 5B_i.$$

1.4.2　维特利覆盖引理

1. 维特利类

设 $E\subset\mathbf{R}^d$,$\mathscr{V}=\mathscr{V}(E)$ 为 $\mathbf{R}^d$ 的一个子集类.如果对任意 $x\in E$ 以及任意 $\delta>0$,均存在 $U\in\mathscr{V}$,使得 $x\in U$,且 $0<|U|\leqslant\delta$,则 $\mathscr{V}$ 称为 E 的一个维特利(Vitali)类.

2. 维特利覆盖引理

1° 设 E 为 $\mathbf{R}^d$ 的 $\mathscr{H}^s$ 可测子集,$\mathscr{V}$ 为由有界闭子集构成的 E 的维特利覆盖簇,则可以从 V 中挑出可列或有限的不相交的集列 $\{U_i\}$,使得

$$\sum |U_i|^s=\infty,$$

或者

$$\mathscr{H}^s(E\setminus\bigcup_i U_i)=0.$$

2° 如果 $\mathscr{H}^s(E)<\infty$,则对任意 $\epsilon>0$,可以要求上述集列满足

$$\mathscr{H}^s(E)\leqslant\sum_i |U_i|^s+\varepsilon.$$

1.4.3　贝契科维奇覆盖引理

设 $E\subset\mathbf{R}^d$ 为有界集.令 $\mathscr{B}=\{B(x,r(x)):x\in E,r(x)>0\}$,则可以从球簇中挑出可列或有限子球簇 $\mathscr{B}^*=\{B(x_i,r(x_i))\}$,使得

1° $E\subset\bigcup_i\{B(x_i,r(x_i))\}$;

2° 存在仅依赖于 d 的正整数 λ_d,使得 $\mathscr{B}^*=\bigcup_{j=1}^{\lambda_d}\mathscr{B}_j^*$,其中 $\mathscr{B}_j^*$ 中的球彼此不相交.

3° 对任意 $x\in\mathbf{R}^d$,$\sum_{B\in\mathscr{B}^*}\chi_B(x)\leqslant\lambda_d$.即 $\mathscr{B}^*$ 中与任一球相交的球的个数不超过 λ_d,其中 $\chi_B(x)$ 为 B 的指示函数.

1.5　分形的乘积

下述两个定理指出了乘积的豪斯多夫测度与乘积的填充测度之间的"对偶"关系.

1.5.1　乘积的豪斯多夫测度

设 $E\subset\mathbf{R}^m$,$F\subset\mathbf{R}^n$,则存在仅依赖于 s,t 的正常数 c,使得

$$\mathscr{H}^{s+t}(E\times F)\geqslant c\mathscr{H}^s(E)\mathscr{H}^t(F).$$

1.5.2 乘积的填充测度

设 $E\subset\mathbf{R}^m, F\subset\mathbf{R}^n, s,t\geqslant 0$.则存在仅依赖于 s,t 的正常数 c,使得

$$\mathscr{P}^{s+t}(E\times F)\leqslant c\mathscr{P}^s(E)\mathscr{P}^t(F).$$

这里约定 $0\times\infty=\infty$.

1.5.3 乘积的豪斯多夫维数与闵可夫斯基维数的比较

设 $E\subset\mathbf{R}^m, F\subset\mathbf{R}^n$,则

1° $\dim_H E\times F\geqslant\dim_H E+\dim_H F$;

2° $\dim_H E\times F\leqslant\min\{\dim_H E+\overline{\dim}_B F,\overline{\dim}_B E+\dim_H F\}$;

3° $\max\{\underline{\dim}_B E+\overline{\dim}_B F,\overline{\dim}_B E+\underline{\dim}_B F\}\leqslant\overline{\dim}_B E\times F\leqslant\overline{\dim}_B E+\overline{\dim}_B F$.

1.5.4 乘积的豪斯多夫维数与填充维数的比较

设 $E\subset\mathbf{R}^m, F\subset\mathbf{R}^n$,则

1° $\dim_P E\times F\leqslant\dim_P E+\dim_P F$;

2° $\dim_H E\times F\leqslant\min\{\dim_H E+\dim_P F,\dim_P E+\dim_H F\}$.

1.5.5 正则集的乘积的维数

若集 A 满足 $\dim_H(A)=\dim_P(A)$,则集 A 称为正则集.

设 $E\subset\mathbf{R}^m, F\subset\mathbf{R}^n$,如果 E 与 F 中有一个是正则集,则

$$\dim_H E\times F=\dim_H E+\dim_H F.$$

1.6 分形的投影

设 L_θ 表示通过 $\mathbf{R}^2$ 的原点并与水平轴线的直线,用 p_θ 表示到 L_θ 上的正交投影,即若 $E\subset\mathbf{R}^2$,则 $p_\theta E$ 是 E 到 L_θ 的投影.

(1) 对任意 $\theta\in G_{d,p}$,有

$$\dim_H p_\theta(E)\leqslant\min\{\dim_H E,1\};$$

(2) 若 E 为博雷尔集.则对几乎所有的 $\theta\in[0,2\pi]$,有

$$\dim_H p_\theta(E)=\min\{\dim_H E,1\};$$

(3) 若 E 为博雷尔集且 $\dim_H E>1$,则对几乎所有的 $\theta\in[0,2\pi]$,

$$\mathscr{L}_\theta(p_\theta(E))>0,$$

这里 $\mathscr{L}_\theta$ 表示 L_θ 上的勒贝格测度.

2 几类典型的分形集

2.1 自相似集

2.1.1 自相似集的结构

1. 压缩映射与相似映射

映射 $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ 称为压缩映射，如果存在正常数 $0<c<1$，使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|A,$$

如果上述不等式中等式成立，则 f 称为相似映射，c 称为压缩系数.

2. 不变集与自相似集

设 $\{S_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的一簇压缩映射，则存在唯一非空紧集 E 满足

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}S_i(E),$$

集 E 称为压缩簇 S_i 的不变集或吸引子，若 S_i 为压缩系数 c_i 的相似压缩，则 E 称为由压缩系数为 c_i 的相似压缩簇 S_i 生成的自相似集，或简称自相似集.

3. 自相似集的结构

设 $S:=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$，S^k 为 S 的 k 次迭代，即对任意 $F\in\mathscr{C}(\mathbf{R}_d)$，

$$S^0(F):=F,$$
$$S^k(F):=S(S^{k-1}(F)),\quad k\geqslant 1.$$

如果 F 满足 $S_i(F)\subset F$，则

$$E=\bigcap_{k\geqslant 1}S^k(F).$$

4. 自相似集的强正则性

设 E 为自相似集，则 $\dim_H E=\dim_B E$.

2.1.2 例

例1 康托尔三分集

如图2-1所示，设 $E_0=[0,1]$ 为单位闭区间，E_1 为由 E_0 删去中间长为 $\frac{1}{3}$ 的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 所得到的集合，即 E_1 由闭区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 与 $[\frac{2}{3},1]$ 组成，这两个区间称为1阶基本区间. 而 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 称为1阶基本间隔. 分别去掉两个1阶基本区间的中间的 $\frac{1}{3}$ 得到 E_2，即 E_2 由4个闭区间(称为2阶基本区间) $[0,\frac{1}{9}]$，$[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$，$[\frac{8}{9},1]$ 组成，去掉的两个开区间称为2阶基本间隔. 继续上述做法，至第 k 步，

得到 E_k. 它由 2^k 个长为 3^{-k} 的闭区间(称为 k 阶基本区间)组成,被挖掉的 2^{k-1} 个长为 3^{-k} 的开区间称为第 k 阶间隔. 令 $\mathscr{C}=\bigcap_{k\geq 1}E_k$. 集 $\mathscr{C}$ 称为康托尔三分集,它是全不连通的自密闭集.

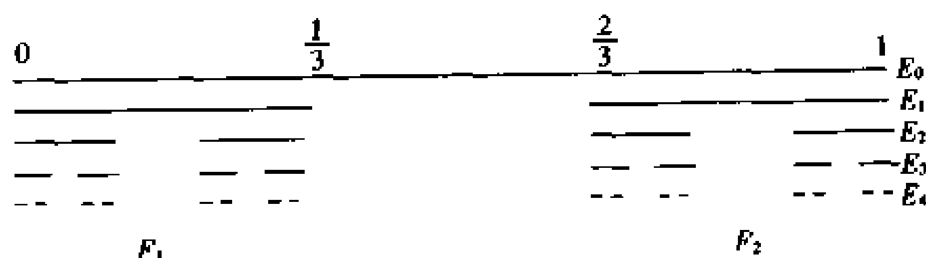


图 2-1

康托尔三分集是由相似映射 $S_1(x)=\frac{x}{3}$, $S_2(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$,生成的自相似集.

例 2　冯 · 科赫曲线

设 E_0 为单位区间,以 E_0 的中间三分之一线段为底,向上作等边三角形,然后

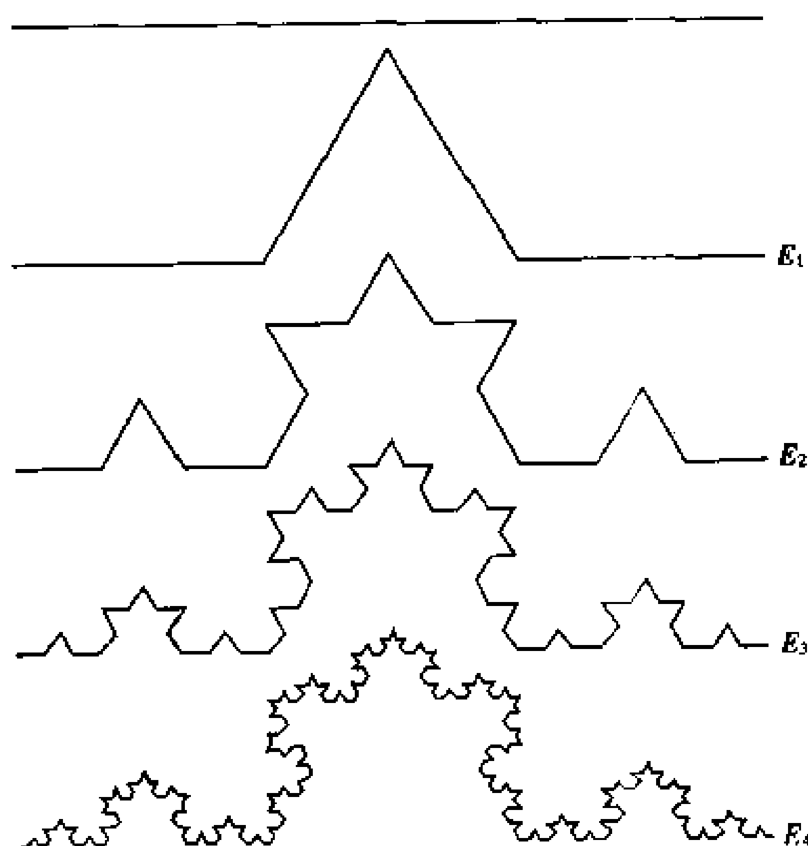


图 2-2

去掉该底(保留端点).由此得到的四条线段组成的图形记为 E_1,对 E_1 的每一边重复上述过程,所得到的折线多边形记为 E_2;应用同样的方式,从 E_{k-1} 得到 E_k.当 k 趋于无穷时,折线多边形序列 E_k 趋于一极限曲线 E,称为冯·科赫曲线(见图2-2),它是由将 E_0 分别变换为 E_1 的四条线段组的相似映射簇生成的自相似集.

例3 雪尔平斯基垫片

如图2-3所示,从一个初始的等边三角形出发,反复去掉(相反方向的)小三角形的内部,如此得到的极限图形称为雪尔平斯基垫片.它是由下列相似映射

$$\varphi_1(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),$$

$$\varphi_2(x,y)=\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{y}{2}\right),$$

$$\varphi_3(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$$

生成的自相似集.

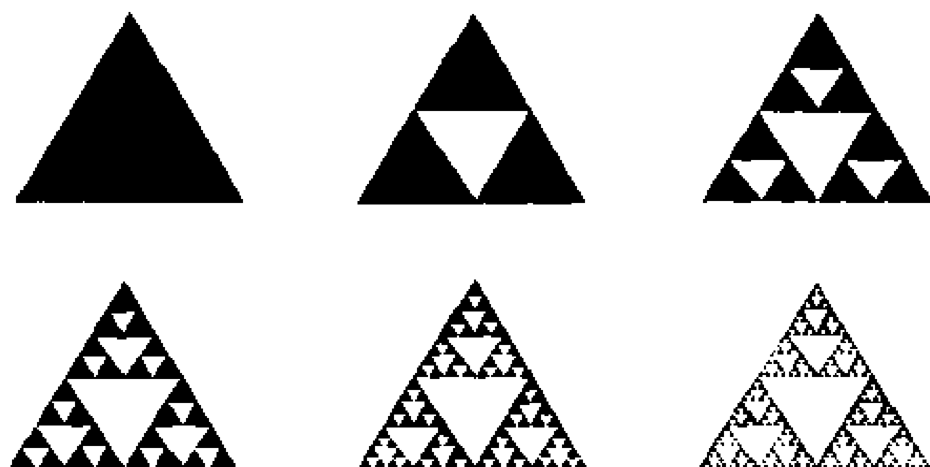


图 2-3

例4 雪尔平斯基地毯

如图2-4所示,从一个初始的正方形出发,反复去掉中间的小正方形的内部,如此得到的极限图形称为雪尔平斯基地毯.它是由将初始正方形分别映射为其它的8个小正方形的相似映射簇生成的自相似集.

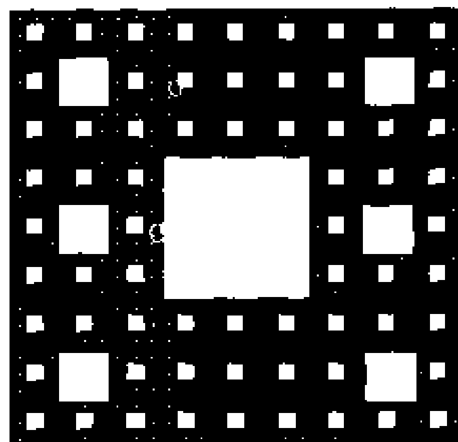


图 2-4

2.1.3 自相似集的维数与测度

1.相似维数

设 $\{S_i\}_{1\leq i\leq m}$ 为一族压缩系数为 c_i 的相似映射,E 为相应的自相似集.设正实数 s 满足

$$\sum_{i=1}^{k}c_i^s=1,$$

则 s 称为 E 的相似维数,记为 $\dim_S E$.

2. 开集条件

设存在开集 $V \subset \mathbf{R}^d$,使得对任意 i, $S_i(V) \subset V$,且 $S_i(V) \cap S_j(V) = \varnothing$, $i \neq j$,则称相似压缩簇 $\{S_i\}_{1 \leq i \leq m}$ 满足开集条件.

开集条件满足的一个充分必要条件是 $\mathscr{H}^{\dim_S^E} > 0$.

3. 自相似集的维数与测度

设相似压缩簇 $\{S_i\}_{1 \leq i \leq m}$ 满足开集条件,则

1° $\dim_H E = \dim_P E = \dim_B E = \dim_S E = s$;

2° $0 < \mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{P}^s(E) < \infty$.

2.2　自　仿　集

由于相似压缩在各个方向有相同的压缩率,因此这些压缩系数能很好地刻画分形的性态,如它的维数.而在仿射压缩的情形,各个方向的压缩率不一样,这一实质的差异给自仿集的维数与测度研究带来很大的困难.即使考虑 $\mathbf{R}^2$ 上的仿射压缩,情形也会变得复杂得多.

2.2.1　自仿集

设 $T: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的线性变换,$\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的一个向量,则 $S(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^d$ 称为 $\mathbf{R}^d$ 上的一个仿射映射,如果 S 还是压缩映射,则 S 称为 $\mathbf{R}^n$ 上的仿射压缩.

设 $S_i(1 \leq i \leq m)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的仿射压缩,则存在非空紧集 E,使得 $E = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)$,集 E 称为由仿射压缩簇 $S_i(1 \leq i \leq m)$ 的生成的**自仿集**.

2.2.2　麦克谬伦集

定义　设 $n \geq m \geq 2$ 为正整数,$R(n,m) = \{(i,j): 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$.令 $R_0 \subset R(n,m)$, $\# R_0 \geq 2$.设 $(i,j) \in R_0$,定义 $S_{ij}(x,y) = \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{m}\right) + \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{m}\right)$,则 S_{ij} 为仿射压缩,其在 x 轴与 y 轴方向的压缩比分别为 $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{m}$.设 E 为仿射压缩簇 $\{S_{i,j}\}_{(i,j) \in R_0}$ 的自仿集,即称 E 为仿射压缩簇 S_{ij} 的麦克谬伦集,它有下述几何解释:

将单位正方形 E_0 划分为 $n \times m$ 个边长分别为 $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{m}$ 的长方形.从这些长方形中选取一个子集类组成 E_1, E_1 中的每个长方形对应一个相似压缩.如图 2-5 所示,用 N_j 表示从第 j 列中挑出的长方形的数目,$1 \leq j \leq m$.对 E_1 中的每个长方形重复上述过程,最后得到的极限集 E 即为**麦克谬伦集**.

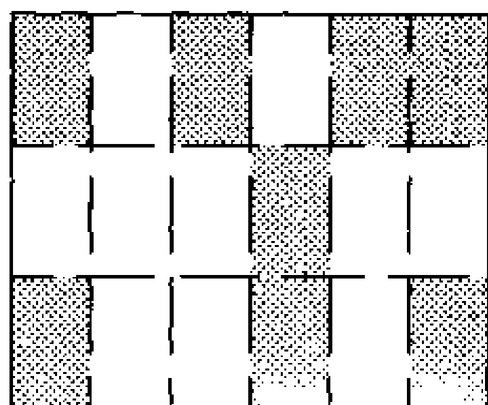


图 2-5

麦克谬伦集的维数 设 E 为麦克谬伦集,则

$$\dim_H E = \log_m \sum_{j=1}^{m} N_j^{\log p/\log q},$$

$$\dim_B E = \log_m m^* + \log_n \left(\sum_{j=1}^{m} N_j / m^*\right),$$

其中 m^* 是至少包含 E_1 的一个长方形的行的数目.

一般说来,麦克谬伦集不是正则集,而且不具有正有限的豪斯多夫测度.

2.3 马利雍集

2.3.1 定义

设 ξ 为一正实数,满足

$$0 < \xi < 1, M = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

为一 n 阶矩阵,其元素为非负整数.假定矩阵 M 为本原矩阵,即存在正整数 $N \in \mathbf{N}$,使得矩阵 M^N 中的所有的元素是严格正的.

设 $K_1, K_2, \cdots, K_n \subset \mathbf{R}^d$ 为满足下述条件的一列彼此不相交的内部非空的紧集:

对任意 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$K_i \supset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant a_{ij}} S_{lij}(K_j),$$

其中$\{S_{lij}(K_j)\}$为一彼此不相交的集簇,$S_{lij}: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 为压缩系数为 ξ 的相似映射,$1 \leqslant l \leqslant a_{ij}$.

在上述条件下,存在紧集列 $E_i \subset K_i, 1 \leqslant i \leqslant n$,使得对任一 i,有

$$E_i = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant a_{ij}} S_{lij}(E_j),$$

其中 $E_{lij} := S_{lij}(E_j)$ 彼此不相交.

集簇 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 称为**马利雍集**,它有下述几何意义:对任一 i,E_i 由 a_{ij} 个与 E_j 相似的相似比为 ξ 的集合组成$(1 \leqslant j \leqslant n)$,并且所有这些集合都不相交.

2.3.2 测度与维数

设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为马利雍集,则对任意 $i, 1 \leqslant i \leqslant n$,有

1° E_i 是强正则的;

2° $\dim_B E_i = \dim_H E_i = s$;

3° $0 < \mathscr{H}^s(E_i) < \infty$.

2.4　莫　朗　集

2.4.1　莫朗结构

设 $J \subset \mathbf{R}^d$ 为内点非空的有界闭集，$\{n_k\}_{k\geq 1}$ 为一列正整数序列，$\Phi = \{\Phi_k\}$ 为一列有限正实向量序列，其中

$$\Phi_k = (c_{k1}, c_{k2}, \cdots, c_{kn_k}), 0 < c_{kj} < 1, k \in \mathbf{N}, 1 \leq j \leq n_k.$$

对任意 $k \in \mathbf{N}$，记

$$D_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_k : 1 \leq i_j \leq n_j, 1 \leq j \leq k\}.$$

约定 $D_0 = \varnothing$，记 $D = \bigcup_{k\geq 0} D_k$.

设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in D_k$，$\tau = \tau_1 \cdots \tau_m \in D_m$，记

$$\sigma * \tau = \sigma_1 \cdots \sigma_k \tau_1 \cdots \tau_m.$$

若 $\sigma \in D_k$，$l \leq k$，则 $\sigma|_l = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_l$. 若 $l \leq k$，且 $\sigma|_l = \tau$，则称 $\tau < \sigma$.

$\mathbf{R}^d$ 的子集簇 $\mathscr{F} = \{J_\sigma : \sigma \in D\}$ 如果满足：

1° 对任意 $\sigma \in D$，J_σ 与 J 相似，亦即存在相似映射 $S_\sigma : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 使得 $S_\sigma(J) = J_\sigma$，约定 $J_\varnothing = J$；

2° 对任意 $k \geq 0$ 及任意 $\sigma \in D_k$，$J_{\sigma*1}, \cdots, J_{\sigma*n_{k+1}}$ 为 J_σ 的子集，并且对任意 $i \neq j$，$(J_{\sigma*i}) \cap (J_{\sigma*j}) = \varnothing$（亦即满足开集条件）；

3° 对任意 $k \geq 1$，$\sigma \in D_{k-1}$ 及 $1 \leq j \leq n_k$ 有

$$\frac{|J_{\sigma*j}|}{|J_\sigma|} = c_{kj},$$

则 $\mathscr{F}$ 称为具有莫朗结构.

现令 $E_k = \bigcup_{\sigma\in D_k} J_\sigma$ 及 $E = \bigcap_{k\geq 0} E_k$，则 E 为非空有界闭集.

记 $\mathscr{F}_k = \{J_\sigma : \sigma \in D_k\}$，$\mathscr{F}_k$ 的元称为 E 的 k 阶基本元. 则

$$\mathscr{F} = \bigcup_{k\geq 0} \mathscr{F}_k = \{J_\sigma : \sigma \in D\}.$$

$E = E(\mathscr{F}, J, \{n_k\}, \{\Phi_k\})$ 称为满足 $(J, \{n_k\}, \{\Phi_k\})$ 的莫朗集. 记 $\mathscr{M} = \mathscr{M}(J, \{n_k\}, \{\Phi_k\})$ 为满足 $(J, \{n_k\}, \{\Phi_k\})$ 的莫朗集的集合类.

2.4.2　莫朗集的维数

设 s_k 由下式定义：

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{s_k} = 1,$$

则

$$s_* = \liminf_{k\to\infty} s_k, \quad s^* = \limsup_{k\to\infty} s_k.$$

若 $\inf c_{kj} > 0$，则对任意 $E \in \mathscr{M}(J, \{n_k\}, \{\Phi_k\})$，有

$$\dim_H E = s_*, \quad \dim_P E = s^*.$$

2.4.3　1维齐次莫朗集与1维齐次莫朗集类

设 $d = 1$ 并设对任意 $k \in N, 1 \leqslant j \leqslant n_k, c_{k,j} \equiv c_k$,则相应的莫朗集与齐次莫朗集类称为1维齐次莫朗集与1维齐次莫朗集类.

(1)1维齐次康托尔集与偏1维齐次康托尔集.

设对任意 $k \geqslant 1$,任意 $\sigma \in D_k$,及 $1 \leqslant j \leqslant n_{k+1}$,它的 $k+1$ 阶基本元 $J_{\sigma * j}$ 在 J_σ 中(从左至右排列)满足:

1° $J_{\sigma * 1}$ 的左端点与 J_σ 的左端点重合,$J_{\sigma * n_{k+1}}$ 的右端点与 J_σ 的右端点重合;

2° $|J_{\sigma * 1}| = \cdots = |J_{\sigma * n_{k+1}}|$(从而,每个 $k+1$ 阶基本区间的长度为 $c_1 \cdots c_{k+1}$);

3° 相邻的 $k+1$ 阶基本区间的间隔相同.

由此得到的莫朗集称为齐次均匀康托尔集,记为 $\mathscr{D} := \mathscr{D}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$.

如果将上述条件中的2°,3°用下述条件代替.

$J_{\sigma * 1}$ 的左端点与 J_σ 的右端点重合,$J_{\sigma * (j+1)}$ 的左端点与 $J_{\sigma * j}$ 的右端点重合,$1 \leqslant j \leqslant n_{k+1} - 1$,则得到的莫朗集称为偏齐次康托尔集,记为

$$\mathscr{D}^* = \mathscr{D}^*(J, \{n_k\}, \{c_k\}).$$

(2)1维齐次康托尔集与偏1维齐次康托尔集的维数.

设 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}^*$ 分别为1维齐次康托尔集与偏1维齐次康托尔集,则

$$\dim_H \mathscr{D} = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k},$$

$$\dim_P \mathscr{D} = \overline{\dim}_B \mathscr{D} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_{k+1}}{-\log c_1 \cdots c_k + \log n_{k+1}},$$

$$\dim_H \mathscr{D}^* = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_{k+1} n_{k+1}},$$

$$\dim_P \mathscr{D}^* = \overline{\dim}_B \mathscr{D}^* = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}.$$

(3)1维齐次莫朗集类的性质.

1° 设 $\mathscr{M} := \mathscr{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 为1维齐次莫朗集类,则

$$\sup_{E \in \mathscr{M}} \dim_H = \dim_H \mathscr{D} \inf_{E \in \mathscr{M}} \dim HE = \dim_H \mathscr{D}^*;$$

$$\sup_{E \in \mathscr{M}} \dim_P E = \dim_P \mathscr{D}, \inf_{E \in \mathscr{M}} \dim_P E = \dim_P \mathscr{D}^*.$$

2° 对任意 $E_1, E_2 \in \mathscr{M}$,

$$\max\{\dim_H E_1, \dim_H E_2\} \leqslant \min\{\dim_P E_1, \dim_P E_2\}.$$

3° 1维齐次莫朗集类具有下述维数的连续性:

设 $\dim_H \mathscr{D}^* < \alpha < \dim_H \mathscr{D}$,则存在 $E \in \mathscr{M}$,使得

$$\dim_H E = \alpha.$$

设 $\dim_P \mathscr{D}^* < \beta < \dim_P \mathscr{D}$,则存在 $E \in \mathscr{M}$,使得

$$\dim_P E = \beta.$$

2.5 切 饼 集

切饼集是自相似集的一类非线性推广,所用的工具也更为深入.

2.5.1 切饼集

(1) 切饼映射.

设 $I=[0,1]$,$0<t_0<t_1<1$,$I_0=[0,t_0]$,$I_1=[t_1,0]$.映射 $S:I_0\cup I_1\to I$ 如果满足以下性质:

1° $S|_{I_0}$ 及 $S|_{I_1}$ 分别是 I_0 与 I_1 至 I 的单、满射;

2° 存在常数 $\gamma>0$,$c>0$,使得

$$|DS(x)-DS(y)|\leqslant c|x-y|^{\gamma},\quad x,y\in I_0\cup I_1,$$

即 DS 是 γ- 阶赫尔德映射,并且

$$\inf_{x\in I_0\cup I_1}|DS(x)|>1,$$

其中 $DS(x)$ 表示 S 在点 x 的微分,$x\in I_0\cup I_1$.则映射 S 称为切饼映射.

(2) 切饼集.

相对于映射 S 的切饼集定义为

$$C=\{x\in I_0\cup I_1:S^n(x)\in I_0\cup I_1\text{ 对所有的 }n\geqslant 0\text{ 成立}\}.$$

2.5.2 符号空间

(1) 符号空间.

令 $\Omega=\{0,1\}$;

$\Omega(n)=\{x=x_1x_2\cdots x_n;x_i\in\Omega\}$ 是长度为 n 的符号串的集合;

$\Omega^*=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\Omega(n)$ 是长度有限的符号串的集合;

Ω^ω 是长度为无限的符号串的集合.

设 $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots$,$y=y_1y_2\cdots y_n\cdots\in\Omega^\omega$,定义

$$d_\Omega(x,y)=2^{-\inf\{k;x_k\neq y_k\}}$$

则 d_Ω 是 Ω^ω 上的度量,在此度量下,Ω_ω 是一个紧度量空间.

(2) 码映射.

设 ϕ_0,ϕ_1 分别为 $S|_{[0,t_0]}$,$S|_{[t_1,t]}$ 的逆映射.设 $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots\in\Omega^\omega$,定义

$$\pi(x):=\bigcap_{n\geqslant 1}\phi_{x_1}\cdots\phi_{x_n}(I),$$

π 称为码映射,它是 Ω^ω 到切饼集 C 的 1 对 1 的满射.

(3) 符号空间上的移位算子与不变测度.

1° Ω^ω 上的移位算子 $\sigma:\Omega^\omega\to\Omega^\omega$ 如下定义:

若 $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots\in\Omega^\omega$,则 $\sigma(x)=x_2\cdots x_n\cdots$.它是 Ω^ω 上的连续映射;

2° 设 μ 是 Ω^ω 上的博雷尔概率测度,若对任意可测集 $A\subset\Omega^\omega$,均有 $\mu(\sigma^{-1}(A))=\mu(A)$,则 μ 称为对于 σ 不变的测度.

记所有对于 σ 不变的博雷尔概率测度的集合为 $\mathscr{M}(\sigma)$.

(4) 符号空间上的测度熵.

设 μ 为对于 σ 不变的概率测度，$\alpha = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 Ω^m 的一个有限可测分划，则 μ 的 α- 熵定义为

$$H_\mu(\alpha) = -\sum_{A\in\alpha}\mu(A)\log\mu(A).$$

σ 对于 μ 以及 α 的熵定义为

$$h_\mu(\sigma,\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\alpha \vee \sigma_{-1}\alpha \cdots \vee \sigma_{-(n-1)}\alpha),$$

其中 $\vee$ 表示两个分划的交：

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : a \in \alpha, B \in \beta\}.$$

σ 对于 μ 的熵定义为

$$h_\mu(\sigma) = \sup_\sigma h_\mu(\sigma,\alpha).$$

(5) 符号空间上的压力泛函.

设 $f:\Omega^m \to \mathbf{R}$ 为连续函数，则 f 的压力泛函定义为

$$P(f) = \sup_{\mu\in\mathscr{M}(\sigma)}\left(H_\mu(\sigma) + \int f\mathrm{d}\mu\right).$$

2.5.3　切饼集的维数

令 $f(x) := -\log|DS(\pi(x))|$，设 s 是满足 $P(\mathrm{d}f(x)) = 0$ 的实数，则

$$\dim_H\mathscr{S} = \dim_B\mathscr{S} = s.$$

3　测度的重分形分析

测度的重分形分析是指测度的维谱，勒让德变换和热力学极限之间的关系以及这些量的确定.

在此我们通过康托尔测度来介绍测度的重分形分析的有关概念、内容和方法.

3.1　康托尔测度

设 $0 < p < 1$. 设 $C = \bigcap_{k\geq 0} E_k$ 为**康托尔三分集**，其中 E_k 为 k 阶基本区间. 将单位质量分布到 E_1 上，使得左边的区间具有质量 p，右边的区间具有质量 $1-p$. 然后将 E_1 的每个区间的质量按上述方式分布到它生成的两个区间上. 继续上述构造，将 E_k 上的每个区间的质量按比例 $p:1-p$ 分布到他所生成的两个区间上，在极限情形，在康托尔三分集上分布了一个质量 μ_C，称为**康托尔测度**.

3.2 康托尔测度的重分形机理

3.2.1 康托尔测度的对数密度

设 $x \in C$，$B_r(x)$ 是以 x 为中心 r 为半径的区间，康托尔测度 μ_C 在点 x 的对数密度定义为

$$D_{\mu_C}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\log \mu_C(B_r(x))}{\log r}.$$

测度在一点的对数密度反映质量在这一点附近分布的情形.

3.2.2 康托尔测度的重分形分解与维谱

令 $C_\alpha := \{x \in C; D_{\mu_C}(x) = \alpha\}$，则

$$C = \bigcup_{\alpha \geq 0} C_\alpha$$

称为 C 按 μ_C 的对数密度的**重分形分解**，函数

$$f(\alpha) := \dim_H C_\alpha$$

称为 μ_C 的维谱.

3.2.3 勒让德变换

设 $f(\alpha)$ 为 μ_C 的维谱，则

$$\tau(q) := \sup_{0 \leq \alpha < \infty} (f(\alpha) - q\alpha)$$

称为 $f(\alpha)$ 的**勒让德变换**.

3.2.4 康托尔测度的矩函数与热力学极限

设 $\{I_i\}$ 是长度为 δ 的彼此不相交的区间簇，并且 $\mathbf{R} = \bigcup_i I_i$. 函数

$$S_\delta(q) := \sum_i \mu_C(I_i)^q$$

称为 μ_C 的矩函数，极限

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta}$$

称为 μ_C 的热力学极限.

3.2.5 康托尔测度的重分形机理

康托尔测度的维谱的勒让德变换等于它的热力学极限，即

$$\tau(q) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta},$$

在此意义下，称康托尔测度 μ_C 满足重分形机理.

3.3　康托尔测度的重分形分析

3.3.1　康托尔测度的热力学极限

$$\tau(q) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log\delta} = \frac{\log(p^q + (1-p)^q)}{\log 3}.$$

3.3.2　康托尔测度的维谱

(1) 函数 $\alpha(q)$.

1° 设对每个 q, $\tau(q)$ 是在 $\alpha(q) > 0$ 处达到定义式中的上确界，则

$$\mathrm{d}\tau(q)/\mathrm{d}q(q) = -\alpha(q);$$

2° 对于康托尔测度 μ_C，有

$$\alpha(q) = -\frac{p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p)}{(p^q + (1-p)^q)\log 3};$$

3° $\alpha(1)$ 称为 μ_C 的信息维数，其值为

$$\alpha(1) = -p\log p + (1-p)\log(1-p)/\log 3.$$

(2) 维谱. 维谱可以通过　$f(\alpha(q)) = \tau(q) - q\alpha(q)$ 来确定.

参考文献

1　Barnsley M F. Fractal everywhere. New York: Academic Press, 1988.

2　Bélair J, Dubuc S (eds). Fractal geometry and analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

3　Edgar G A, Measure. Topology and fractal geometry. New York: Springer-Verlag, 1990.

4　Falconer K J. Geometry of fractal sets. London: Cambridge University Press, 1985.

5　Falconer K J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. New York: John Wiley & Sons, 1990.

6　Falconer K J. Techniques in fractal geometry. New Jork: John Wiley & Sons, 1997.

7　Feder J. Fractals. New York: Plenum Press, 1988.

8　Federer H. Geometric measure theory. New York: Springer, 1969.

9　Mandelbrot B B. Les objects fractals: forme, hasard et dimension. Flammarion, 1975.

10　Mandelbrot B B. Fractal: form, chance, and dimension. Freeman, 1977.

11　Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. New York: Freeman, 1982.

12　Mattila P. Geometry of sets and measures in euclidean space. London: Cambridge University Press, 1995.

13　文志英. 分形几何的数学基础. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.

·近代数学卷·

第21篇

生物数学

编　者　陈兰荪
审校者　马知恩

目　录

引　言

生物数学是研究生命科学数量化规律的一门学科，是相继于生物物理学、生物化学之后产生的生物科学的新分支，是数学与生命科学之间的边缘性学科．它隶属于生命科学．按在研究方法上所涉及的数学方法来区分、生物数学可以分为生物统计学、生物动力系统以及生物控制论等三个分支学科．本书仅对生物动力系统部分作叙述，其他部分可见参考文献[1～3]．

生物动力系统就是应用数学、物理中动力学的方法来研究生命现象，其使用的数学工具，一般来说属于"连续数学"方法，诸如微分方程、几何、拓扑等，其研究的对象几乎覆盖整个生命科学：从微观生物学的"分子动力学"、"细胞动力学"到宏观生物学的"种群动力学"、"系统生态学"；从生命科学的理论研究"理论生物学"、"蛋白质的几何结构与信息传播分析"到应用性十分强的生命科学研究"酶动力学"、"药物动力学"、"传染病动力学"、"微生物培养动力学"、"群体遗传学"等，内容十分丰富，可参看文献[3～7]．

生物动力系统作为一个分支学科的形成，还是近 20 年的事，但在一个世纪以前，从马尔萨斯(Malthus T.R)人口模型开始，就已有了许多的研究工作，到 20 世纪 20 年代初，洛特卡和沃尔泰拉(Lotka A.J. and Volterra V.)关于分子生物学和海洋渔业研究的洛特卡-沃尔泰拉方程，则是生物动力系统这个学科初具规模的年代．但作为一个学科分支的形成，则是在 20 世纪 70 年代中后期开始到今天，这是这个分支学科全面迅速发展的高峰时期、黄金时代．生物动力系统这个分支学科已成为研究生命科学数量化规律的一个重要领域．

1　分子反应作用动力学

1.1　服从质量作用律的反应动力学模型

1.1.1　一级反应(单分子反应)的反应速度

一个分子的反应物变成为另一个分子的生成物，可用符号写为

$$A \to B.$$

通过实验可以知道，这种化学反应的反应速度与反应物 A 的浓度$[A]$有关，用数学模型来描述可以写为

$$\frac{d[A]}{dt} = F([A]).$$

在反应物浓度不太大的时候,假定 F 可以用它的线性化来近似代替,注意到因为在浓度为零时反应将停止,所以有 $F(0)=0$. 又由于反应必使 A 的浓度下降,所以得到

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=-k[A]\quad（记为 A\xrightarrow{k}B）,$$

其中 k 为正常数.

1.1.2　二级反应(两分子反应)的反应速度

两个分子的反应物反应后变成其他的生成物,易知这类反应的反应速度与两种反应物在当时的浓度都有关系,类似于一级反应,在反应物的浓度不太大时,可在 F 的幂级数展开式中取其最低次项不为零的部分来代替 F,则有

(1) $A+B\xrightarrow{k}C+D$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}=F([A],[B])\simeq-k[A][B].$$

因为两分子反应时缺少其中任一分子,则反应不能进行,所以有 $F(0,0)=F(0,[B])=F([A],0)=0$. 类似地有

(2) $2A\xrightarrow{k}A+B$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=-k[A]^2.$$

(3) $2A\xrightarrow{k}C+D$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=-2k[A]^2.$$

1.1.3　三分子反应与多分子反应的反应速度

三个分子的反应物反应后变成其他生成物时,其反应速度也和三种反应物在当时的浓度有关系. 类似地,在三种反应物的浓度不太大时,把反应速度 F 作类似于两分子反应处理,可以得到

(1) $A+B+C\longrightarrow E+D+F$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t}=F([A],[B],[C])\simeq-k[A][B][C].$$

同样,

(2) $2A+B\xrightarrow{k}A+2C$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}=-k[A]^2[B].$$

(3) $2A+B\xrightarrow{k}2C+D$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t}=-2k[A]^2[B],\qquad\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}=-k[A]^2[B].$$

关于**多分子反应速度**,类似地有

(4) $pA + qB \xrightarrow{k} (p+q)B$ 的反应速度为

$$\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = -pk[A]^p[B]^q.$$

其中 p 和 q 为正整数.

1.1.4 服从质量作用律的分子反应数学模型

反应速度描述为 1.1.1 ~ 1.1.3 的分子反应,称之为服从**质量作用律**的分子反应. 下面要用数学模型来描述整个反应过程.

例 1 两分子反应的洛特卡模型.

假设分子 X_1 和分子 X_2 在时刻 t 的浓度记为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$(以后均如此,以大写字母代表分子的名称,以小写字母代表相应分子的浓度. 不再另加说明),反应机制为

$$X_1 \xrightarrow{k_1} 2X_1,\ X_1 + X_2 \xrightarrow{k_2} 2X_2,\ X_2 \xrightarrow{k_3} 0.$$

其中第一个反应表示 X_1 有资源来源的增长反应,第二个反应是 X_2 的自催化反应,第三个反应是 X_2 的输出,这个反应系统的数学模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = k_1x_1 - k_2x_1x_2; \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = -k_3x_2 + k_2x_1x_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

易知系统(1-1) 有两个平衡点:(0,0) 和 (x_1^*, x_2^*),其中 $x_1^* = k_3/k_2, x_2^* = k_1/k_2$.

系统(1-1) 有通积分

$$x_1 - x_1^* - x_1^*\ln(x_1/x_1^*) + x_2 - x_2^* - x_2^*\ln(x_2/x_2^*) = C,$$

其中 C 为任意常数. 对于两分子反应系统,有如下定理.

定理 1 如果各反应阶段只是单分子反应和双分子反应,在包含两个可变中间产物的反应系统中,不可能存在极限环[6].

例 2 普里高津(Prigogine) 三分子模型.

反应机制为

$$A \to X,\quad B + X \to Y + D,\quad 2X + Y \to 3X,\quad X \to E.$$

这里假设所有反应速度常数都是 1(否则其数学模型也可通过适当的变换化为与此相同的形式). 其中 A, B 分别为反应物, D, E 为生成物, x, y 为中间产物, 相应的数学模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a - (b+1)x + x^2y; \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = bx - x^2y. \end{cases} \tag{1-2}$$

当 $a \neq 0$ 时,方程(1-2) 有唯一正平衡点 $p(a, b/a)$.

定理 2 设 $a > 0, b > 0$,则当 $b > 1 + a^2$ 时,系统(1-2) 存在唯一稳定极限环;当 $b \leqslant 1 + a^2$ 时系统不存在极限环,正平衡点 p 为全局渐近稳定.

例 3 替松 - 李赫(Tyson-Lighe) 三分子模型.

反应机制为

$$K_0 \to X, C_0 \to Y, 2X + Y \xrightarrow{k_2} 3X, X \xrightarrow{k_1} 0.$$

反应数学模型为

$$\begin{cases} dx/dt = k_0 - k_1 x + k_2 x^2 y; \\ dy/dt = c_0 - k_2 x^2 y. \end{cases}$$

作无量纲化代换:

$$x = \sqrt{k_1/k_2}\,\bar{x}, \quad y = \sqrt{k_1/k_2}\,\bar{y}, \quad t = 1/k_1\tau.$$

把变换后的方程中 $\bar{x}, \bar{y}$ 和 τ 仍记为 x, y 和 t,则这个数学模型化为

$$\begin{cases} dx/dt = x^2 y - x + b; \\ dy/dt = -x^2 y + a, \end{cases} \tag{1-3}$$

其中 $b = k_0\sqrt{k_2}/(k_1\sqrt{k_1}), a = c_0\sqrt{k_2}/(k_1\sqrt{k_1})(a > 0, b > 0)$. 易知系统(1-3)有唯一平衡点$(x^*, y^*)$. 其中

$$x^* = a + b, \quad y^* = a/(a+b)^2.$$

定理 3 当$\frac{a-b}{a+b} - (a+b)^2 > 0$时,系统(1-3)存在唯一稳定极限环.

例 4 低浓度三分子模型.

反应机制为

$$A \longrightarrow X, B + X \longrightarrow Y, X + 2Y \longrightarrow 3Y, Y \longrightarrow 0.$$

反应数学模型为

$$\begin{cases} dx/dt = a - bx - xy^2; \\ dy/dt = bx + xy - y. \end{cases} \tag{1-4}$$

易知系统有唯一平衡点 $P(a/(b+a^2), a)$.

定理 4 当$2a^2/(b+a^2) > b + a^2 + 1$时,系统(1-4)存在唯一稳定极限环.

例 5 多分子反应模型.

反应机制为

$$X_0 \xrightarrow{k_1} X_1, X_1 \xrightarrow{k_2} Q, pX_1 + qX_2 \xrightarrow{k_3} (p+q)X_2, X_2 \xrightarrow{k_4} p.$$

反应数学模型为

$$\begin{cases} dx_1/dt = k_1 x_0 - k_2 x_1 - pk_3 x_1^p x_2^q; \\ dx_2/dt = pk_3 x_2^q x_1^p. \end{cases}$$

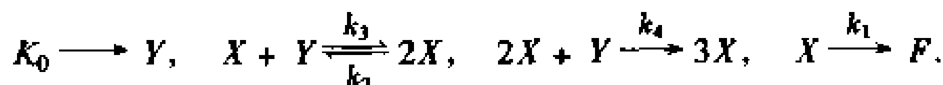
经过无量纲化后系统可以化为

$$\begin{cases} dx/dt = \delta - ax - x^p y^q; \\ dy/dt = x^p y^q - by. \end{cases} \tag{1-5}$$

这个模型的研究还十分不完整(参见文献[6]).

例 6 二次自催化反应系统.

反应机制为



$$K_0 \longrightarrow Y, \quad X + Y \underset{k_2}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} 2X, \quad 2X + Y \xrightarrow{k_4} 3X, \quad X \xrightarrow{k_1} F.$$

反应数学模型为

$$\begin{cases} dx/dt = -k_1x - k_2x^2 + k_3xy + k_4x^2y; \\ dy/dt = k_0 + k_2x^2 - k_3xy - k_4x^2y. \end{cases}$$

设 $k_1 > 0$,作变换 $\tau = k_1t$,则方程化为

$$\begin{cases} dx/d\tau = -x - b_2x^2 + b_3xy + b_4x^2y; \\ dy/d\tau = b_0 + b_2x^2 - b_3xy - b_4x^2y. \end{cases} \tag{1-6}$$

其中 $b_i = k_i/k_1(i = 0,2,3,4)$.记

$$A = b_3 + b_0b_4, \quad B = b_4 - b_2b_3.$$

系统(1-6)有唯一平衡点 $P(x^*, y^*)$,其中

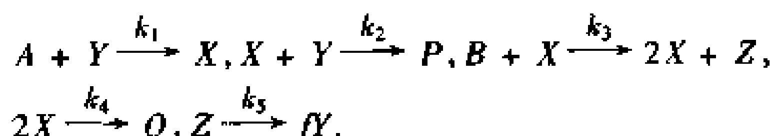
$$x^* = b_0, \quad y^* = (1 + b_0b_1)/A.$$

当 $B - A^2 > 0$ 时,P 为不稳定焦点;当 $B - A^2 \leqslant 0$ 时,P 为稳定焦点.

定理 5 当 $B - A^2 > 0$ 时,系统(1-6)在 P 外围存在唯一稳定极限环.

例 7 布鲁索夫-察布宁斯基(Bolousov-Zhabotinskii)反应.

反应机制为



这个数学模型通常称为俄勒冈(Oregon)模型:

$$\begin{cases} dx/dt = k_1ay - k_2xy + k_3bx - 2k_4x^2; \\ dy/dt = -k_1ay - k_2xy + k_5fz; \\ dz/dt = k_3bx - k_5z. \end{cases} \tag{1-7}$$

经过无量纲化后,系统可以化为

$$\begin{cases} dx/dt = s(y - xy + x - qx^2); \\ dy/dt = \frac{1}{s}(-y - xy + fz); \\ dz/dt = w(x - z). \end{cases}$$

系统有两个平衡点 $O(0,0,0)$ 和 $P(x^*, y^*, z^*)$,其中

$$x^* = z^*, \quad y^* = \frac{1}{2}[(1+f) - qx^*],$$

$$2qx^* = (1 - f - q) + [(1 - f - q)^2 + 4q(1 + f)]^{\frac{1}{2}}.$$

$O(0,0,0)$ 为不稳点奇点,其条件是:

$$(1)\ 0 < w < \frac{1}{2E}[E^2 + f(1 - x^*)] + \frac{1}{2E}[\{E^2 + f(1 - x^*)\}^2 - 4E^2\{2q(x^*)^2 + x^*(q - 1) + f\}]^{\frac{1}{2}}, \tag{1-8}$$

其中

$$E = sy^* + \left(\frac{1}{s} + 2qs\right)x^* + \frac{1}{s} - s;$$

$$(2)\ 2q(x^*)^2 + x^*(q - 1) + f < 0, \tag{1-9}$$

当 w 和 f 满足条件(1-8)和(1-9)时,$p(x^*, y^*, z^*)$ 的特征方程有两根具正实部,所以是不稳定的.

记集合

$$B = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{q},\quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2, 1 \leqslant z \leqslant \frac{1}{q}\}.$$

其中

$$y_1 = \frac{fq}{1+q}, y_2 = \frac{f}{2q}.$$

定理6　对于系统(1-7)，B是一个正向不变集，而且所有正初始值的解终将进入B.

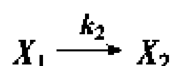
定理7　若$0.5 < f < 2.412$且条件(1-8)和(1-9)满足，则系统(1-7)在相空间中存在空间周期轨道.

1.2　饱和反应的数学模型

在上一节中，考虑服从质量作用律的反应速度下的反应动力学模型，从这种反应速度的导入可知，这种规律只适用于反应物的浓度不太大的时候. 对于反应物浓度比较大而接近于某种饱和状态时，利用上节的反应速度表达式来描述就会产生较大的误差，因而必需改用一系列的饱和反应速度.

1.2.1　米氏(Michaelis-Menten)饱和反应动力学模型

前面所述服从质量作用律的一分子反应



$$X_1 \xrightarrow{k_2} X_2$$

的反应速度为

$$v = -\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = k_1x_1.$$

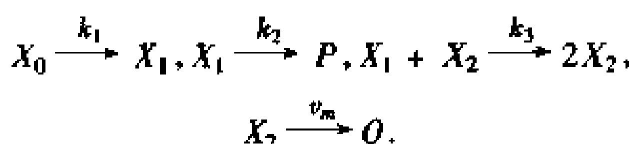
最简单的一分子饱和反应速度 —— **米氏反应速度**为

$$v_m = v_{max}x_1/(k_m + x_1),$$

其中v_{max}为反应速度v的最大值，k_m称为米氏常数，把此反应记为

$$X_1 \xrightarrow{v_m} X_2.$$

例8　两分子饱和反应. 反应机制为



$$X_0 \xrightarrow{k_1} X_1, X_1 \xrightarrow{k_2} P, X_1 + X_2 \xrightarrow{k_3} 2X_2,$$

$$X_2 \xrightarrow{v_m} Q.$$

相应的数学模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = k_1x_0 - k_2x_1 - k_3x_1x_2; \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = k_3x_1x_2 - v_{max}x_2/(k_m + x_2). \end{cases}$$

作无量纲变换：

$$x = x_1, y = x_2, \mathrm{d}t = (k_m + x_2)\mathrm{d}\tau,$$

则系统化为

$$\begin{cases} dx/d\tau = (y+b)(\delta - Bx - xy); \\ dy/d\tau = y(xy + bx - a), \end{cases} \tag{1-10}$$

其中 $b = k_m, a = v_{max}/k_3, \delta = k_1 x_0/k_3, B = k_2/k_3$. 可见 b, a, δ, B 均为正常数，(1-10) 式有平衡点：

$$M_0 = (\delta/B, 0), M = (x^*, y^*),$$

其中 $$x^* = (a-\delta)/(b-B), y^* = (b\delta - aB)/(a-\delta).$$

M 为正平衡点的充要条件为

$$(a-\delta)(b-B) > 0, (a-\delta)(b\delta - aB) > 0.$$

作假设：

$$b > B, a > \delta, \delta/B > a/b. \tag{1-11}$$

通过简单的讨论可知，如果(1-11) 式不成立，则系统(1-10) 不可能存在极限环. 属于简单情况，下面只考虑条件(1-11) 式成立的情况，这时 M 为正平衡点、为非鞍初等奇点，且

当$(b\delta - aB)(a-\delta)^2 - a\delta(b-B)^3 \leqslant 0$时，$M$ 为稳定；

当$(b\delta - aB)(a-\delta)^2 - a\delta(b-B)^3 > 0$时，$M$ 为不稳定.

定理 8 在条件(1-11) 下如果 M 为稳定则 M 必为全局渐近稳定；如果 M 为不稳定，则系统(1-10) 存在唯一的极限环，且为稳定极限环.

回顾定理 1 知，对于服从质量作用律的两分子反应系统是不可能存在极限环的，但定理 8 则说明含有饱和反应速度的两分子反应系统可以有极限环.

1.2.2 多重饱和反应动力学模型

除上述米氏饱和反应速度外，在研究血红蛋白被氧化的饱和反应有 S 形的反应速度，形如

$$v_m = \frac{ax + bx^2}{k + lx + mx^2}.$$

当 $k/l > a/b$ 时，这个速度在(x, v_m)平面上成 s 形曲线. 这里 a, b, l 和 k 均为非负常数，v_m 称为**三重饱和反应速度**. 也有以下表达形式

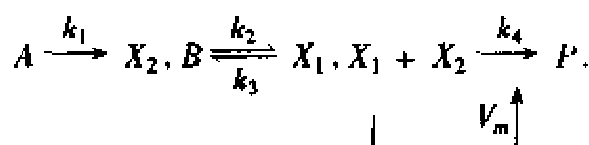
$$v_m = \frac{v_{max} x^2}{(l_1 + x)(l_2 + x)},$$

进一步还有**多重饱和速度**如

$$v_m = \frac{v_{max} x^n}{1 + kx^n}.$$

例 9 细菌培养呼吸过程反应模型.

反应机制为



$$A \xrightarrow{k_1} X_2, B \underset{k_3}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} X_1, X_1 + X_2 \xrightarrow{k_4} P.$$

最后一个反应式表示反应速度对 X_1 来说是饱和反应. 而反应速度与 X_2 则是服从质量作用律，相应的数学模型为

$$\begin{cases} dx_1/dt = k_2b - k_3x_1 - k_4x_1x_2/(1+k_5x_1^2); \\ dx_2/dt = k_1a - k_4x_1x_2/(1+k_5x_1^2). \end{cases}$$

作无量纲化变换：

$$x = k_4/k_3x_1, y = k_4/k_3x_2, \tau = k_3t,$$

则系统化为

$$\begin{cases} dx/d\tau = B - x - xy/(1+qx^2); \\ dy/d\tau = A - xy/(1+qx^2), \end{cases} \tag{1-12}$$

其中 $A = k_1k_4a/k_3, B = k_2k_4b/k_3^2, q = k_3^2k_2/k_4^2$.

系统(1-12)仅有一个平衡点(x^*, y^*)，其中

$$x^* = B - A, y^* = A[1 + q(B-A)^2]/x^*.$$

系统(1-12)的定性研究尚不完整，暂不叙述.

1.2.3　基体抑制作用与反应产物激活作用

反应机制：

$$S_0 \xrightarrow{k_1} S, \quad S + P \xrightarrow{f} 2P, \quad P \xrightarrow{g} Q.$$

相应的数学模型为

$$ds/dt = k_1s_0 - f(s,p),$$
$$dp/dt = f(s,p) - g(p).$$

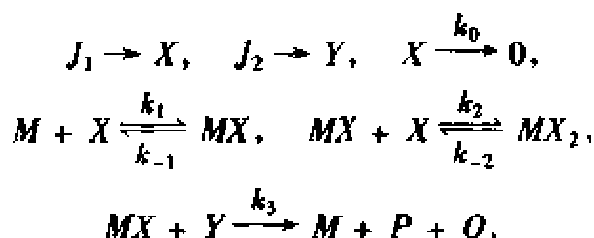
这里f和g是反应速度.更一般可写成

$$\begin{cases} ds/dt = k_1s_0 - k_2s - f(s,p); \\ dp/dt = \mu[f(s,p) - g(p)], \end{cases} \tag{1-13}$$

其中k_2表基体S的流失，μ表示基体反应利用率.所谓基体抑制作用即(1-13)式中反应速度f是s和p的非增函数；所谓反应产物的激活作用(正反馈作用)，即(1-13)式中反应速度f是p增函数.

例10　两基体抑制反应模型.

反应机制为



$$J_1 \to X, \quad J_2 \to Y, \quad X \xrightarrow{k_0} 0,$$
$$M + X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} MX, \quad MX + X \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} MX_2,$$
$$MX + Y \xrightarrow{k_3} M + P + Q.$$

其相应数学模型，并且无量纲化后为

$$\begin{cases} dx/dt = J_1 - x - Br(x,y); \\ dy/dt = J_2 - Ar(x,y), \end{cases} \tag{1-14}$$

其中

$$r(x,y) = \frac{xy}{1 + x + y + ax^2},$$

而 J_1, J_2, A, B, a 均为非负常数.系统(1-14)式有唯一平衡态(x^*, y^*)满足

$$x^* = J_1 - \frac{B}{A}J_2, y^* = \frac{J_2(1 + x^* + \alpha x^{*2})}{AJ_1 - (B + 1)J_2}.$$

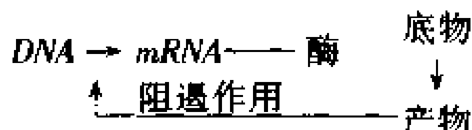
当 $J_1 > J_2(B + 1)/A$ 时 $x^* > 0, y^* > 0$.

定理 9 若平衡点(x^*, y^*)为不稳定焦点或结点,则系统(1-14)在相平面正象限存在极限环.

这个定理说明基体抑制反应系统可以存在极限环,Se'kov 发现,对于反应产物激活作用系统,只要反应产物的激活度高于1,就可以引起极限环类型的持续振荡,也就是说如果 f 可表示成 $f(x, y^{1+\epsilon})$,且 $\epsilon > 0$ 在(0,0)连续,振荡可能发生.

1.2.4 最后产物抑制作用(负反馈作用)反应数学模型

在一个反应链中的产物使得其抑制物质的某一远母体的合成率降低.例如在研究蛋白质合成的遗传调节机制时遇到的现象:



相应的数学模型可写成

$$dx_1/dt = f(x_{n+1}) - k_1x_1,$$
$$dx_i/dt = k_{i-1}x_{i-1} - k_ix_i \quad (i = 2, \cdots, n + 1),$$

其中 $f(x_{n+1})$ 是 x_{n+1} 的减函数,它描述抑制效应.f 常用的形式为

$$f(x_{n+1}) = c/(1 + \alpha x_{n+1}^p).$$

当 $n = 2$ 时,反应系统可写为

$$\begin{cases} dx/dt = 1/(1 + z^m) - \alpha x; \\ dy/dt = x - \beta y, \qquad \alpha > 0, \beta > 0, r > 0; \\ dz/dt = y - rz. \end{cases} \tag{1-15}$$

设 m 为正整数,系统有唯一平衡点(x^*, y^*, z^*).

定理 10 设系统(1-15)在平衡点(x^*, y^*, z^*)处的线性化系统有一特征根 $\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \mu \pm i\sigma(\mu > 0, \sigma > 0)$,则系统(1-15)必存在**空间周期轨道**.

这个定理的结论已被推广到 n 维系统(参见文献[8]).

2 非线性种群动力学模型

2.1 单种群模型

2.1.1 定常环境单种群模型

例 1 马尔萨斯人口模型

$$dN/dt = rN, r = b - a, \tag{2-1}$$

其中 $N(t)$ 表示在时刻 t 人口密度，b 表示出生率，a 表示死亡率，r 表示人口增长率. 若初始人口密度为 N_0，则模型(2-1)的解 $N(t) = N_0e^{rt}$. 因此，只要出生率大于死亡率，则人口密度随着时间成指数增长趋于无穷.

例2 有密度制约的逻辑斯谛(Logistic)模型.

$$dN/dt = rN(1 - N/k), \tag{2-2}$$

其中 r 为内禀增长率. K 为环境容纳量. 方程(2-2)有正平衡点 $N^* = K$，所有正初始条件的解当 $t \to \infty$ 时 $N(t) \to N^*$，称平衡点 N^* 是全局渐近稳定的.

例3 一般定常环境连续增长种群模型.

$$dN/dt = NF(N). \tag{2-3}$$

在模型(2-2)中密度制约因子$(1 - N/K)$对 N 是线性的，而(2-3)式中则考虑非线性密度制约因子 $F(N)$.

定理1 如果函数 $F(N)$ 满足下列条件：

1° 有一个正平衡点 N^*，即存在 $N^* > 0$ 使

$$F(N^*) = 0;$$

2° 对于 $N^* > N > 0$ 有 $F(N) > 0$;

3° 对于 $N > N^*$ 有 $F(N) < 0$,

则模型(2-3)是全局渐近稳定的.

2.1.2 时变环境单种群模型

例4 非自治逻辑斯谛方程

$$dN/dt = r(t)N(t)[1 - N(t)/K(t)], \tag{2-4}$$

此方程过点(t_0, N_0)的解为

$$N(t) = \frac{N_0\exp[\int_{t_0}^{t} r(s)ds]}{1 + N_0\int_{t_0}^{t}\exp[\int_{t_0}^{s} r(s_1)ds_1]\frac{r(s)}{K(s)}ds}.$$

定理2 若函数 $r(t)$ 和 $K(t)$ 满足条件：

$$0 < \underline{r} = \inf_{t\in R^+} r(t) \leqslant r(t) \leqslant \overline{r} = \sup_{t\in R^+} r(t) < +\infty;$$

$$0 < \underline{K} = \inf_{t\in R^+} K(t) \leqslant K(t) \leqslant \overline{K} = \sup_{t\in R^+} K(t) < +\infty,$$

则方程(2-4)存在解

$$N^*(t) = \left\{\int_0^{+\infty}\exp[-\int_0^{s} r(t-u)du]\frac{r(t-s)}{K(t-s)}ds\right\}^{-1},$$

并且 $N^*(t)$ 是全局渐近稳定的.

若方程(2-4)中函数 $r(t)$ 与 $K(t)$ 均为以 ω 为周期的周期函数，记

$$\langle r(t)\rangle_\omega = \int_0^{\omega} r(s)ds, \underline{K} = \min_{(0,\omega)K(t)}, K(t), \overline{K} = \max_{(0,\omega)} K(t).$$

定理3 如果 $r(t)$ 与 $K(t)$ 均为 ω 周期函数，又$\langle r(t) > \omega > 0, 0 < \underline{K} \leqslant K(t)$

$\leqslant \overline{K} < +\infty$,则方程(2-4)存在唯一的 ω 周期解 $N^*(t)$,并且 $N^*(t)$ 是全局渐进稳定的.

2.1.3　时滞逻辑斯谛方程

$$\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K]. \tag{2-5}$$

作代换 $y(t) = -1 + N(t)/K$,再令 $t = \tau\bar{t}$,记 $\alpha = r\tau$,则方程(2-5)化为(仍以 t 记 $\bar{t}$)

$$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = -\alpha y(t-1)[1 + y(t)], \tag{2-6}$$

时滞逻辑斯谛方程(2-5)的正平衡点 $N = K$,即为方程(2-6)的零平衡点 $y = 0$.

定理4　方程(2-6)的零平衡点 $y = 0$,当 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时为渐近稳定;当 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时为不稳定.

当 $\alpha < \frac{3}{2}$ 时方程(2-6)的零平衡点 $y = 0$ 为全局渐近稳定,当 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时存在周期解.

注1　当 $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,方程(2-6)的零平衡点 $y = 0$ 是局部渐近稳定的,Wright 猜想也是全局渐近稳定,但这个问题直到今天还没有答案.

时变环境时滞逻辑斯谛方程:

$$\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t = r(t)N(t)[1 - N(t-\tau(t))/K(t)],$$

也可以与方程(2-5)类似的变换化为

$$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = -a(t)y(t-1)[1 + y(t)]. \tag{2-7}$$

定理5　如果存在一个常数 $r > 0$,使

$$a(t) \leqslant r < 3/2, \quad 对一切\ t \geqslant 0$$

成立,则

1° (2-7)式的零平衡解 $y = 0$ 为一致稳定;

2° 若加之存在一正常数 σ,使

$$a(t) \geqslant \sigma, \quad 对一切\ t \geqslant 0,$$

则(2-7)式零平衡解 $y = 0$ 为一致渐近稳定.

2.1.4　单种群反应扩散模型

前面所考虑的模型都是假设种群密度在空间的分布是均匀的.这时种群的密度 N 只是时间 t 的函数,记为 $N(t)$.如果所考虑的种群密度空间分布是非均匀的,则种群密度 N 不仅是时间 t 的函数,而且是空间位置 X 的函数,记为 $N(X,t)$,这里 X 为空间点(x_1,x_2,x_3),模型(2-3)变成

$$\partial N(X,t)/\partial t = \Delta N(X,t) + N(X,t)F[N(X,t)].$$

简单的情况,考虑逻辑斯谛反应扩散方程的齐次诺伊曼(Neumann)初、边值问题,提法如下:

$$\begin{cases} \partial N/\partial t = \Delta N + N(N^* - N), (X,t) \in \Omega \times [0,\infty); \\ \partial N/\partial n = 0, (X,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty); \\ N(X,0) = \varphi(x), X \in \Omega, \end{cases} \tag{2-8}$$

其中 $N^* > 0$ 为问题(2-8) 的常数平衡解，Ω 为 $\mathbf{R}^3$ 空间中的有界开集，其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，$\partial/\partial n$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法向导数，$\varphi(x)$ 为 Ω 中严格正的光滑函数.

定理 6 逻辑斯谛反应扩散方程的齐次牛曼初、边值问题(2-8) 的正常数平衡解 N^* 是全局稳定的.

2.1.5 具有年龄连续分布的单种群模型

前面所考虑的模型中，只考虑种群的密度变化，不考虑种群的年龄结构，但种群的年龄结构将很大程度地影响种群的生育率和死亡率，从而影响种群密度的变化. 这里将考虑有年龄连续分布的 M-F(Mckendrick-Foerster) 模型

$$\begin{cases} \partial f(a,t)/\partial t + \partial f(a,t)/\partial a = -r(a)f(a,t); \\ f(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)f(a,t)\mathrm{d}a; \\ f(a,0) = f_0(a), \end{cases} \tag{2-9}$$

其中 $f(a,t)$ 表示在时间 t 时年龄为 a 的种群密度，$r(a)$ 表示年龄为 a 的种群死亡率，$\beta(a)$ 表示年龄为 a 的个体的平均生育率.

定理 7 如果满足下面三个条件：

1° $r(a)$, $\beta(a)$ 和 $f_0(a)$ 均非负连续；

2° $\int_0^{+\infty} f_0(a)\mathrm{d}a < +\infty$；

3° 存在 $A > 0$，使当 $a > A$ 时有 $\beta(a) = 0$，

则系统(2-9) 存在唯一的解，记

$$N(t) = \int_0^{+\infty} f(a,t)\mathrm{d}a, R = \int_0^{+\infty} \beta(a)\pi(a)\mathrm{d}a,$$

其中 $\pi(a) = \exp(-\int_0^a \gamma(x)\mathrm{d}x)$. 这里 $N(t)$ 表示在 t 时刻种群的总密度.

定理 8 对模型(2-9)，有

1° 当 $R < 1$ 时，种群走向绝灭，即有

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0;$$

2° 当 $R > 1$ 时，种群密度无限增长，即有：

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty.$$

可以看出，在模型(2-9) 中，种群的出生率 $\beta(a)$ 与死亡率 $\gamma(a)$ 均与种群的密度 $N(t)$ 无关，也就是说模型(2-9) 是非密度制约的. 它是马尔萨斯人口模型的一个推广，其解的性质上也有类同之处. 如果增加密度制约因素，类似于逻辑斯谛模型(2-2) 的年龄结构，种群模型为

$$\begin{cases}\partial f(a,\tau)/\partial t+\partial f(a,t)/\partial a=-\gamma(a)f(a,t)-k\gamma(t)f(a,t),\\ f(0,t)=\int_0^\infty\beta(a)f(a,t)\mathrm{d}a,\\ f(a,0)=f_0(a).\end{cases}\tag{2-10}$$

假设

$$N(t)=\int_0^\infty f(a,t)\mathrm{d}a,\int_0^\infty\gamma(a)\mathrm{d}a=+\infty,$$

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\beta(a)\exp[-\lambda a-\int_0^a\gamma(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}a.$$

定理9　1° 当$F(0)<1$时系统(2-10)仅有平衡态为零解,并且零平衡态是大范围渐进稳定的;2° 当$F(0)>1$时(2-10)出现两个平衡态:零解和正平衡态,并且零平衡态是不稳定的,正平衡态是大范围渐近稳定的.

由定理9可以看出年龄结构模型(2-10)式解的渐近性质与逻辑斯谛模型(2-2)相似.模型(2-10)中考虑到种群密度的制约效应,但这个制约效应只影响死亡率而不影响出生率,而且这个影响是以线性形式出现.如果是非线性而且对出生率也有影响,则可建立更一般的密度制约年龄结构模型

$$\begin{cases}\partial f(a,t)/\partial t+\partial f(a,t)/\partial a=-\gamma(a,N)f(a,t);\\ f(0,t)=\int_0^{+\infty}\beta(a,N)f(a,t)\mathrm{d}a;\\ f(a,0)=f_0(a),\end{cases}\tag{2-11}$$

其中

$$N(t)=\int_0^\infty f(a,t)\mathrm{d}a.$$

模型(2-11)解的渐近性态的研究不像前两个模型那样完整,比较复杂,这里不作介绍[7].

2.1.6　离散时间单种群模型

例5　非密度制约离散单种群模型

$$N(t+1)-N(t)=rN(t)$$

或

$$N(t+1)=\lambda N(t).\tag{2-12}$$

这里$N(t)$是代表第t代种群的密度(或数量).这个模型也可以看成是马尔萨斯人口模型(2-1)的离散化.而且其解的渐近性质也与(2-1)式相同,当$\lambda<1$时,$N(t)$随着t增加而单调减少到$N(t)\to0$,当$\lambda>1$时$N(t)$随着t增加而按指数$N(t)\to\infty$单调增加.

例6　有密度制约离散单种群模型.

$$N(t+1)=N(t)[1+\gamma(1-N(t)/K)].\tag{2-13}$$

这就是所谓虫口方程.它可以视为逻辑斯谛方程差分化的直接推论.但是作为生态模型,它有明显的缺陷,当$N(t)>K(1+\frac{1}{\gamma})$时,有$N(t+1)<0$,这样就不适用

了,因为种群的密度(或数量)均不能是负的,因此在实际中常用的模型为

$$N(t+1)=N(t)\exp[\gamma(1-\frac{N(t)}{K})]. \tag{2-14}$$

这个方程与逻辑斯谛方程(2-2)在解的性质上,当$0<\gamma<2$时,解是类似的,即方程(2-14)存在唯一而且是全局渐近稳定的正平衡点$N=K$.但当$\gamma>2$时,这两个方程解的性质相差很大:当$2<\gamma<2.525$时,方程(2-14)有稳定2点环;当γ值继续增大时,方程(2-14)的解相继地出现4点环,8点环,…,2^n点环;当$r>3.102$时,方程(2-14)将出现混沌解.方程(2-13)也有与(2-14)类似的性质.

例7 有非线性密度制约单种群离散模型

$$N(t+1)=N(t)F[N(t)](\text{或 } N(t+1)=G[N(t)]).$$

这个模型可以看成是模型(2-3)的差分化.为了方便,记:$N(t+1)=x_{t+1}$,$N(t)=x_t$.方程化为

$$x_{t+1}=F(x_t). \tag{2-15}$$

定义1 对应于时间序列$(0,1,\cdots,n,\cdots)$,有点列$(x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots)$,称此点序列为差分方程(2-15)的解(轨道).这里,x_0为初值,有

$$x_1=F(x_0);x_2=F(x_1)=F[F(x_0)]\equiv F^2(x_0)\cdots$$

$$x_n=F(x_{n-1})=F^n(x_0)\cdots$$

定义2 若存在x^*,满足$F(x^*)=x^*$,则称x^*为方程(2-15)的平衡点.

定义3 对于平衡点x^*,若存在一个区间$I=(x^*-\delta,x^*+\delta)$,其中$\delta>0$使对任意$x\in I$,有

$$|F(x)-x^*|<|x-x^*|,$$

则称平衡点x^*是渐近稳定的.

定理10 平衡点x^*若有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\right|_{x=x^*}<1,$$

则x^*是渐近稳定的.

定义4 若存在一正整数k和一点$\bar{x}$,使$\bar{x}=F^k(\bar{x})$,但对于所有满足$1\leqslant n<k$的正整数n都有$\bar{x}\neq F^n(\bar{x})$,则称$\bar{x}$是差分方程(2-15)**周期为k的周期点**.$\{\bar{x},F(\bar{x}),F^2(\bar{x}),\cdots,F^{k-1}(\bar{x})\}$称为周期为$k$的周期轨道(或周期解),或$k$点环.

由以上定义容易看出,如果$\bar{x}$是差分方程(2-15)周期为k的周期点,则$\bar{x}$为下面方程的平衡点

$$x_{t+k}=F^k(x_t). \tag{2-16}$$

定义5 若$\bar{x}$是方程(2-15)周期为k的周期点,又存在$\bar{x}$的区间$I=(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$,$\delta>0$使得对一切$x\in I$,有

$$|F^k(x)-\bar{x}|<|x-\bar{x}|,$$

则称这周期为k的周期点是局部渐近稳定的.

定理11 若$\bar{x}$是(2-15)式周期为k的周期点,且有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(x)\right|_{x=\bar{x}}<1,$$

则 $\bar{x}$ 是局部渐近稳定的.

定义 6　若 $\bar{x}$ 是(2-15)式周期为 k 的周期点,且有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^k(x)\right|_{x=\bar{x}} = 0,$$

则称 $\bar{x}$ 为超稳周期点.

定义 7　若对任意给定的正整数 n,差分方程(2-15)都存在周期为 n 的周期点,则称方程(2-15)具有**混沌解**.

定义 8　若 x^* 是差分方程(2-15)的平衡点,而且是局部稳定的,并且对于任何初始点 $x_0 \in (0,\infty)$ 出发的解 x_t 均有

$$\lim_{t\to\infty} x_t = x^*,$$

则称 x^* 为全局渐近稳定的.

定理 12　若 x^* 是(2-15)式的平衡点,而且 $F(x)$ 满足下列条件:

1° 当 $x^* > x > 0$ 时,$x^* > F(x) > x$;

2° 当 $x > x^*$ 时,$x > F(x) > x^*$,

则 x^* 是全局渐近稳定的.

定理 13　若 x^* 是(2-15)式唯一的平衡点,有

1° 如果 $F(x)$ 在$(0,x^*)$内没有极大值点,则 x^* 是全局渐近稳定的;

2° 如果 $F(x)$ 仅有一个极大值点 $x_M \in (0,x^*)$,则 x^* 为全局渐近稳定的充要条件为

对于所有的 $x \in (x_M, x^*)$,有

$$F^2(x) > x.$$

定理 14(Li.Yorke)　考虑差分方程(2-15),设 J 是一个区间,$F: J \to J$ 的连续映射,假设存在一点 $a \in J$,对于这点记

$$b = F(a), c = F^2(a), d = F^3(a).$$

满足:$d \leqslant a < b < c$(或 $d \geqslant a > b > c$),则对于每一个 $k = 1,2,\cdots$ 在 J 中存在,差分方程(2-15)周期为 k 的周期点,也即(2-15)式有混沌解.

推论 1　如果(2-15)式存在周期为 3 的周期点,则对于任意正整数 k,方程(2-15)有周期为 k 的周期点.换句话说:周期 3 = 混沌.

如何计算周期点?如何计算混沌解?可参见文献[6].

2.1.7　有年龄结构离散单种群模型

以上考虑种群离散模型中,只研究种群数量的变化规律,不区分种群个体的年龄如何.类似于连续分布年龄结构单种群模型在 2.1.5 节中的研究,也应考虑有年龄结构的离散单种群模型.把所讨论的物种的最大成活年龄区间分成 n 个相等的子区间,同时把从 t_0 开始的时间也按与年龄子区间相等的长度加以划分,然后将这两类子区间分别从小到大依次编号,用 $x_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n,\cdots)$ 表示在第 j 个时间段内、年龄位于第 i 段的种群个体数量,假定种群规模的变化只决定于时间和年龄,这里不考虑密度制约因素,设 p_i 是年龄处于第 i 段的个体能活到 $i+1$ 段的概率,即

$$x_{i+1,j+1} = p_i x_{ij}.$$

再设 B_i 是年龄为 i 段上的每一个体在一个时间段内平均生育的下一代的数量,于是有

$$\begin{aligned}
x_{1,j+1} &= B_1 x_{1j} + B_2 x_{2j} + B_3 x_{3j} + \cdots + B_n x_{nj},\\
x_{2,j+1} &= p_1 x_{1j},\\
x_{3,j+1} &= p_2 x_{2j},\\
&\cdots\\
x_{n,j+1} &= p_{n-1} x_{n-1,j},
\end{aligned}$$

并设在第一个时间段上年龄位于各段的个体数量:$x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}$ 为已知. 即为初始值.

运用矩阵可将上述线性系统写成向量差分方程的形式:

$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_j, \tag{2-17}$$

其中

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{n-1} & B_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

方程(2-17)称为**莱斯利(Leslie)矩阵模型**.

2.2 两种群相互作用模型

要研究生活在一个自然环境中的两个不同的种群 X 和 Y(和前面一样约定,以大写字母代表种群的名称,以小写字母代表其相对应种群的密度),从一般的概念来说,两个种群在一个环境中生存,必然会有相互影响,每一种群的存在都会影响对方的相对增长速度,因此在这种情况下,两种群密度变化模型可以粗略地写成

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = xF_1(x,y), \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = yF_2(x,y). \tag{2-18}$$

通常称模型(2-18)为科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)模型.

2.2.1 洛特卡-沃尔泰拉模型

函数 F_1 和 F_2 究竟是什么样的形式?最简单的方法就是用其线性化来代替. 早在1935年高斯和威特(Gause and Witt)就从实验发现对于非常简单的种群(例如酵母、细胞等),这种线性化表示是与事实相符的. 这时模型化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(b_1 + a_{11}x + a_{12}y); \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y(b_2 + a_{21}x + a_{22}y). \end{cases} \tag{2-19}$$

如果(2-19)式有正平衡点(x^*, y^*),则

$$x^* = \frac{a_{12}b_2 - b_1 a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad y^* = \frac{a_{21}b_1 - b_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定理 15　系统(2-19)的正平衡点(x^*,y^*)为渐近稳定的充要条件为

$$x^* a_{11} + y^* a_{22} < 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

定理 16　系统(2-19)的正平衡点(x^*,y^*)为全局渐近稳定的充分条件为

1° 正平衡点(x^*,y^*)存在,$x^* > 0, y^* > 0$;

2° (x^*,y^*)是局部渐近稳定的;

3° $a_{11} < 0, a_{22} < 0$(即每一种群本身是密度制约的).

定理 17　系统(2-19)在相平面上不可能存在极限环和奇异极限环.

模型(2-19)中每一个系数都有一定的生物意义,其中 b_1(或 b_2)是表示 X(或 Y)种群当不存在 Y(或 X)种群时的内禀增长率(即出生率减去死亡率),式中 a_{11} 和 a_{22} 分别表示 X 和 Y 种群的线性密度制约系数,一般情况下 $a_{11} \leqslant 0, a_{22} \leqslant 0$,等号成立表示为非密度制约. 式中系数 a_{12} 和 a_{21} 是代表两种群之间的作用关系,有

1° 当$a_{12} \cdot a_{21} < 0$时,表示两种群为捕食(或寄生物)与被捕食者(或寄主)的关系;当 $a_{12} < 0, a_{21} > 0$ 时,说明 X 种群是被捕食者,而 Y 种群为捕食者.

2° 当$a_{12} > 0$且 $a_{21} > 0$时,说明 X 和 Y 两种群是互惠共存(或称合作)的关系.

3° 当$a_{12} < 0$且 $a_{21} < 0$时,说明 X 和 Y 两种群是相互竞争的关系.

2.2.2　功能性反应模型

先重新写出在捕食者种群无密度制约的情况,即 $a_{22} = 0$时捕食 - 被捕食关系的洛特卡 - 沃尔泰拉模型(这里假设模型中每一个参数均非负).

$$\begin{cases} dx/dt = x(b_1 - a_{11}x) - a_{12}xy; \\ dy/dt = y(-b_2 + ka_{12}x), k = a_{21}/a_{12}. \end{cases}$$

从上面方程容易看出 $a_{12}x$ 为捕食率(单位时间内每一个捕食者 y 捕食食饵的个数),这里 k 表示消化(转化)系数. 可以看到捕食率在这里是与食饵密度成正比的. 当食饵无限增多时,单位时间内每一个捕食者所"吃掉"的食饵也无限增多,也就是说这里捕食者永远"吃不饱",这当然不符合事实,这个不合理现象是由于在建模时采用线性化技术而引起. 如果以 $\phi(x)$ 记捕食率来表示捕食者捕猎食物的功能,要选用其他的函数来描述"吃饱"这个功能,这时所谓功能性反应模型改写为

$$\begin{cases} dx/dt = x(b_1 - a_{11}x) - \phi(x)y; \\ dy/dt = y(-b_2 + k\phi(x)). \end{cases} \tag{2-20}$$

例 8　霍林(Holling) I 类功能性反应系统.

假设存在一个饱和密度 x_1,捕食率为

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \alpha x, & 当\ x \leqslant x_1; \\ \alpha x_1, & 当\ x > x_1. \end{cases}$$

定理 18　若系统(2-20)在 $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ 时有唯一正平衡点,则

1° 当 $a_{11} = 0$ 时,在正平衡点(x^*,y^*)外围存在一族闭轨线,最外面的一个闭轨记为 Γ,在 Γ 之外的轨线非闭,当 t 增大时远离 Γ,称 Γ 为外侧不稳定极限环;

2° 当 $a_{11}\neq 0$,且 $a_{11}\ll 1$ 时,在(x^*,y^*)外围至少存在两个闭轨线.

例 9 霍林 Ⅱ 类功能性反应系统

$$\varphi_2(x)=ax/(1+\omega x).$$

系统(2-20) 当 $\varphi(x)=\varphi_2(x)$ 时,作时间变换 $dt=(1+\omega x)d\tau$ 以及无量纲化变换后可以写成

$$\begin{cases}dx/dt=x(b_1+b_2x+b_3x^2)-xy;\\ dy/dt=-y+xy.\end{cases}\tag{2-21}$$

定理 19 当 $b_2+2b_3\leqslant 0$ 时,系统的唯一正平衡点(x^*,y^*)为全局渐近稳定;当 $b_2+2b_3>0$ 时,正平衡点为不稳定,并且在其外围存在唯一稳定极限环.

例 10 霍林 Ⅲ 类功能性反应系统

$$\varphi_3(x)=ax^2/(1+\omega x^2),$$

或者更高次的功能性反应函数

$$\varphi_4(x)=ax^p/(1+\omega x^p).$$

对于这样高次的功能性反应函数,当 $\varphi(x)=\varphi_4(x)$ 时,系统(2-20) 作无量纲化变换后可写成

$$\begin{cases}dx/dt=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-x^py/(b+x^p);\\ dy/dt=y(\mu x^p/(b+x^p)-D).\end{cases}\tag{2-22}$$

定理 20 系统(2-22) 存在唯一极限环的充分必要条件是下面的不等式成立(设所有参数为正)

$$(pD-(p-2)\mu)\sqrt[p]{\frac{bD}{\mu-D}}<(pD-(p-1)\mu)K.$$

例 11 依氏(Ivlev) 功能性反应系统

$$\begin{cases}dx/dt=rx(1-x)-(1-e^{-ax})y;\\ dy/dt=y((1-e^{-ax})-D).\end{cases}\tag{2-23}$$

设所有参数:r,a 和 D 均为正,并设 $D<1-e^{-a}$.

定理 21 系统(2-23) 当 $a>2$ 时,至多存在一个极限环;当 $0<a\leqslant 2$ 时,不存在极限环.

定理 22 如果

$$a>-\frac{2D+(1-D)\log(1-D)}{D+(1-D)\log(1-D)}\log(1-D),$$

则系统(2-23) 存在唯一且稳定的极限环;不等号反之,则系统(2-23) 不存在极限环.

例 12 功能性反应一般模型(**高斯模型**)

$$\begin{cases}dx/dt=xp(x)-y\phi(x);\\ dy/dt=y(-\sigma+\varphi(x)).\end{cases}\tag{2-24}$$

定理 23(Kuang and Freedman) 对于系统(2-24),如果存在常数 x^* 和 m,有 $0<x^*<m$,使得

$$\psi(x^*)=\sigma\quad 且\quad (x-m)\rho(x)<0.$$

当 $x \neq m$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)}\right)\bigg|_{x=x^*} > 0.$$

当 $x \neq x^*$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x\rho'(x)+\rho(x)-x\rho(x)\phi'(x)/\phi(x)}{-\sigma+\psi(x)}\right) \leqslant 0$$

则模型(2-24)存在唯一极限环,并且这个极限环是全局渐近稳定的.

例 13　高斯型模型的另一形式

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = xg(x) - y\phi(x);\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y[-q(x)+c\phi(x)].\end{cases} \tag{2-25}$$

对于其中函数 $q(x)$, $g(x)$ 和 $\phi(x)$,作如下假设:

1° $g(0) > 0$ 且存在正数 K,使 $g(k) = 0$,且当 $x \neq k$ 时,$(x-K)g(x) < 0$;

2° $\phi(0) = 0$ 且当 $x \geqslant 0$ 时,$\phi'(x) > 0$;

3° $q(0) > 0$,当 $x \geqslant 0$ 时,$q'(x) \leqslant 0$ 且

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = q_\infty > 0.$$

定理 24　若模型(2-25)有正平衡点(x^*,y^*),又捕食者种群等倾线 $y = xg(x)/\phi(x)$ 在 x^* 是减少(增加)的,则(x^*,y^*)是渐近稳定(不稳定)的.

定理 25　若例 13 条件 1° ~ 3° 成立,且

$$(xg(x)/\varphi(x) - y^*)(x - x^*) \leqslant 0,$$

则正平衡点(x^*,y^*)在第一象限是全局渐近稳定的.

例 14　捕食者种群有相互干扰的模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = xg(x) - y^{(m)}\phi(x), \quad 0 < m \leqslant 1;\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y(-s + cy^{m-1}\phi(x) - q(y)).\end{cases} \tag{2-26}$$

把(2-26)式写成更一般的形式

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a(x) - f(x)b(y);\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = n(x)g(y) + c(y).\end{cases} \tag{2-27}$$

定理 26　若模型(2-27)存在正平衡点(x^*,y^*)且满足下列条件:

1° $(n(x) - n(x^*))(x - x^*) > 0$,当 $x \neq x^*$ 时;

2° $(b(y) - b(y^*))(y - y^*) > 0$,当 $y \neq y^*$ 时;

3° 在(x^*,y^*)的一个邻域内有 $a(x)/f(x)$ 和 $c(y)/g(y)$ 均为非增,但两者之一为严格减少的,则平衡位置(x^*,y^*)是渐近稳定的.

例 15　莱塞(Leslie)模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a_1x - a_2x^2 - \beta xy;\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = r(1 - \delta y/x)y.\end{cases} \tag{2-28}$$

一般形式为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a(x) - f(x)y;\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = r(1 - y/k(x))y.\end{cases} \tag{2-29}$$

定理 27　对于系统(2-29)若有正平衡点(x^*,y^*)且

1° $k(x)$ 为非减的;

2° $(a(x)/f(x)-y^*)(x-x^*)\leqslant 0$;
则(x^*,y^*)是全局渐近稳定的.

2.2.3　科尔莫戈罗夫竞争系统

$$\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = x_1F_1(x_1,x_2),\quad \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = x_2F_2(x_1,x_2). \tag{2-30}$$

如果(2-30)式存在一个正的平衡位置(x_1^*,x_2^*),并且假设对于所有的$x_1>0,x_2>0$满足

$$\partial F_1/\partial x_1\leqslant -H_{11},\partial F_2/\partial x_2\leqslant -H_{22},$$
$$|\partial F_1/\partial x_2|\leqslant H_{12},\ |\partial F_2/\partial x_1|\leqslant H_{21},$$

其中$H_{11},H_{12},H_{21},H_{22}$为常数.设$H_{11}>0,H_{22}>0$,则说明每一种群都是密度制约的.

定理 28　模型的正平衡点(x_1^*,x_2^*)为全局渐近稳定的充分条件为

1° $H_{11}>0,H_{22}>0$;

2° $H_{22}H_{11}-H_{12}H_{21}>0$.

例 16　Schoener 模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = r_1x_1\left(\dfrac{l_1}{x_1+e_1}-r_{11}x_1-r_{12}x_2-c_1\right);\\[2ex] \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = r_2x_2\left(\dfrac{l_2}{x_2+e_2}-r_{21}x_1-r_{22}x_2-c_2\right).\end{cases} \tag{2-31}$$

定理 29　若(2-31)式有正平衡点(x_1^*,x_2^*)且

1° $r_1r_{11}>0,r_2r_{22}>0$;

2° $r_1r_2r_{11}r_{22}-r_1r_2r_{12}r_{21}>0$,

则(x_1^*,x_2^*)是全局渐近稳定的.

定理 30　模型(2-30)的正平衡点(x_1^*,x_2^*)为全局渐近稳定的充分条件为:

1° 正平衡点是唯一的;

2° 正平衡点(x_1^*,x_2^*)为局部渐近稳定的;

3° 两种群都是密度制约的,即当$x_1>0,x_2>0$时有:$\partial F_1/\partial x_1<0,\partial F_2/\partial x_2<0$;

4° 存在正数A和B,使:
对任何$x_2>B$,存在$C>0$使$F_1(c,x_2)<0$;
对任何$x_1>A$,存在$D>0$使$F_2(x_1,D)<0$.

例 17　Gilpin-Ayala 竞争模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = r_1x_1\left[1-\left(\dfrac{x_1}{k_1}\right)^{\theta_1}-a_{12}\dfrac{x_2}{k_1}\right];\\[2ex] \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = r_2x_2\left[1-a_{21}\dfrac{x_1}{k_2}-\left(\dfrac{x_2}{k_2}\right)^{\theta_2}\right],\end{cases} \tag{2-32}$$

其中θ_1,θ_2以及其他参数均为正数.

定理 31　若模型(2-32)有唯一局部稳定的正平衡点(x_1^*,x_2^*),则(x_1^*,x_2^*)是

全局稳定的.

2.2.4 科尔莫戈罗夫捕食系统

对于系统(2-30),设其中 F_1 和 F_2 具有一阶连续偏导数并记

$$F_{ij} = \partial F_i/\partial x_j \quad (i,j = 1,2).$$

假设下列条件:

1° $F_{12} < 0$(食饵受捕食者的抑制作用);

2° $F_{21} > 0$(捕食者得到食饵的给养);

3° 当 $x_2 = 0$ 时, $F_{11} < 0$(若无捕食者,食饵是密度制约的);

4° $F_{22} < 0$(捕食者增长是密度制约的);

5° 存在常数 $A > 0$,使 $F_1(0,A) = 0$(A 为食饵不存在时捕食者的上临界密度);

6° 存在常数 $B > 0$,使 $F_1(B,0) = 0$(B 为无捕食者时食饵的负载容量);

7° 存在常数 $C > 0$,使 $F_2(C,0) = 0$(C 为无捕食者时食饵的下临界密度);

8° $x_2F_2 \leqslant \alpha[x_1F_1(x_1,0) - x_1F_1(x_1,x_2)] - \mu x_2$,其中 α,μ 为正常数;

9° 设 $B > C$;

10° 被捕食者等倾线的方程 $F_1(x_1,x_2) = 0$,可以解出 x_2 为 x_1 的函数,并此解是唯一的,记为 $x_2 = f(x_1)$,这里 f 定义于区间 $[0,B]$ 上,f 是连续可微、单调减少的,并且 $f(0) = A, f(B) = 0$;

11° 捕食者等倾线方程 $F_2(x_1,x_2) = 0$,可以唯一地解出 x_1 为 x_2 的函数,记为 $x_1 = g(x_2)$,这里 g 在区间 $[0,\infty)$ 中定义,为单调增加的连续可微函数,并且 $g(0) = c$.

定理 32(科尔莫戈罗夫) 设模型(2-30)的右端函数 F_1, F_2 满足条件:(1° ~ 11°),则或者正平衡点 (x_1^*, x_2^*) 为稳定的,或者存在围绕 (x_1^*, x_2^*) 的极限环,位于第一象限的内部.

这个定理的条件比较强,以后有一些改进和推广[5].

2.2.5 具有常数时滞的两种群模型

例 18 具常数时滞科尔莫戈罗夫模型正平衡点的局部稳定性.

$$\begin{cases} dx/dt = x(t)f(x(t), y(t-\tau)), \\ dy/dt = y(t)g(x(t-\tau), y(t)), \end{cases} t > 0. \tag{2-33}$$

这里时滞 τ 是非负常数.

定理 33 若(2-33)式有正平衡点 (x^*, y^*)($f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$)且满足

$$f_x(x^*, y^*) < 0, g_y(x^*, y^*) < 0,$$

$$|f_x(x^*, y^*)| > |g_x(x^*, y^*)|, |g_y(x^*, y^*)| > |f_y(x^*, y^*)|,$$

则对任何 $\tau \geqslant 0$,(x^*, y^*) 是局部渐近稳定的.

定义 9 一个具有时滞的系统,例如(2-33),如果这个时滞无论大小如何,其平衡点的稳定性均与无时滞时此系统的稳定性相同,则称这个时滞为**无害时滞**.

例 19 两种群洛特卡-沃尔泰拉竞争时滞模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = x(t)(r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t-\tau)); \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = y(t)(r_2 - a_{21}x(t-\tau) - a_{22}y(t)), \end{cases} \tag{2-34}$$

其中 a_{ij} 和 $r_i(i,j=1,2)$ 均为正常数，当

$$a_{11}/a_{21} > r_1/r_2 > a_{12}/a_{22}$$

时，正平衡点(x^*,y^*)为渐近稳定，与时滞 τ 的大小无关，即 τ 是无害时滞.

例 20　两种洛特卡-沃尔泰拉捕食时滞模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = x(t)(K_1 - x(t) - \alpha y(t-\tau)); \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = y(t)(-K_2 + \beta x(t-\tau) - y(t)), \end{cases} \tag{2-35}$$

其中 K_1,K_2,α,β 均为正常数，当

$$K_1\beta > K_2$$

时，正平衡点(x^*,y^*)为渐近稳定，与时滞 τ 的大小无关，即 τ 是无害时滞.

例 21　莱塞捕食时滞模型.

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = x(t)(\alpha_1 - \alpha_2 x(t) - \beta y(t-\tau)); \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = ry(t)(1 - \delta y(t)/x(t-\tau)). \end{cases} \tag{2-36}$$

若其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta,\delta$ 和 r 均为正常数时，正平衡点(x^*,y^*)为渐近稳定，与时滞 τ 的大小无关，即 τ 是无害时滞.

例 22　两种群合作时滞模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K_1 + \alpha g(t-\tau)}\right); \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = y(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{K_2 + \beta x(t-\tau)}\right). \end{cases} \tag{2-37}$$

若其中 α,β,K_1 和 K_2 均为正常数且满足 $\alpha\beta < 1$，则正平衡点(x^*,y^*)为渐近稳定，与时滞 τ 的大小无关，即 τ 是无害时滞.

例 23　常数时滞洛特卡-沃尔泰拉捕食模型的全局稳定性.

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t = x(t)[\varepsilon_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t) - \beta_{11}x(t-\tau) - \beta_{12}y(t-\tau)]; \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = y(t)[-\varepsilon_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t) + \beta_{21}x(t-\tau) - \beta_{22}y(t-\tau)]. \end{cases} \tag{2-38}$$

设其中的系数均为非负常数，正平衡位置为(x^*,y^*)，

$$x^* = \frac{\varepsilon_1(a_{22}+\beta_{22}) + \varepsilon_2(a_{12}+\beta_{12})}{(a_{11}+\beta_{11})(a_{22}+\beta_{22}) + (a_{12}+\beta_{12})(a_{21}+\beta_{21})};$$

$$y^* = \frac{\varepsilon_1(a_{21}+\beta_{21}) - \varepsilon_2(a_{11}+\beta_{11})}{(a_{11}+\beta_{11})(a_{22}+\beta_{22}) + (a_{12}+\beta_{12})(a_{21}+\beta_{21})}.$$

$y^* > 0$ 的条件为 $\varepsilon_1(a_{21}+\beta_{21}) > \varepsilon_2(a_{11}+\beta_{11})$.

假设条件

1° $a_{11} - \dfrac{\beta_{11}^2}{a_{11}} - \dfrac{c_1\beta_{12}^2}{c_2 a_{22}} > 0$;

2° $a_{22} - \dfrac{\beta_{22}^2}{a_{22}} - \dfrac{c_2\beta_{21}^2}{c_1 a_{11}} > 0$;

3° $\left(-c_1a_{12}+c_2a_{21}+c_1\frac{\beta_{12}\beta_{22}}{a_{22}}-c_2\frac{\beta_{11}\beta_{21}}{a_{11}}\right)^2$

$<c_1c_2\left(a_{11}-\frac{\beta_{11}^2}{a_{11}}-\frac{c_1\beta_{12}^2}{c_2a_{22}}\right)\left(a_{22}-\frac{\beta_{22}^2}{a_{22}}-\frac{c_2\beta_{21}^2}{c_1a_{11}}\right)$.

定理 34 若存在正数 c_1 和 c_2，使条件 1° ~ 3° 成立，则模型(2-38)的正平衡点 (x^*,y^*) 为全局渐近稳定.

推论 2 当 $a_{12}=a_{21}=0,\beta_{12}\beta_{22}>0,\beta_{11}\beta_{21}>0$，且满足条件

$$a_{11}^2-\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}(\beta_{11}\beta_{22}+\beta_{21}\beta_{12})>0,\ a_{22}^2-\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}(\beta_{11}\beta_{22}+\beta_{21}\beta_{12})>0,$$

则系统(2-38)的正平衡点为全局渐近稳定.

2.2.6 具有连续时滞的两种群模型

例 24 有限连续时滞洛特卡-沃尔泰拉捕食模型

$$\begin{cases}dx(t)/dt=x(t)[a-a_{11}x(t)-a_{12}y(t)-\int_0^r K_1(\theta)x(t-\theta)d\theta-\\ \qquad\int_0^r K_2(\theta)y(t-\theta)d\theta];\\ dy(t)/dt=y(t)[-d+a_{21}x(t)-a_{22}y(t)+\int_0^r K_3(\theta)x(t-\theta)d\theta-\\ \qquad\int_0^r K_4(\theta)y(t-\theta)d\theta]\end{cases}\tag{2-39}$$

作以下假设(对所有 $i=1,2,\cdots,4$)：

1° 当 $\theta\in[0,r]$ 时，$K_i(\theta)\geqslant0$ 且连续；

2° 当 $\theta\in(0,r)$ 时，$K'_i(\theta)\leqslant0$ 且连续，而且 $\lim\limits_{\theta\to0^+}K'_i(\theta)$ 和 $\lim\limits_{\theta\to r^-}K'_i(\theta)$ 均存在.

3° 当 $\theta\in(0,r)$ 时，$K''_i(\theta)\geqslant0$ 且连续.

设所有参数 $a,d,a_{ij}(i,j=1,2)$ 均为正数，记 $\int_0^r K_i(\theta)d\theta(i=1,2,3,4)$ 分别为 $\bar a_{11},\bar a_{12},\bar a_{21},\bar a_{22}$，则(2-39)式有正平衡点 (x^*,y^*) 的条件为

4° $a(a_{21}+\bar a_{21})>(a_{11}+\bar a_{11})d$.

定理 35 若条件 1° ~ 4° 满足，并且对于所有的 $\theta\in(0,r)$，有

5° $a_{21}/a_{12}[K'_2(\theta)]^2<2a_{11}/(rK''_4(\theta))$,

$a_{12}/a_{21}[K'_3(\theta)]^2<2a_{22}/(rK''_1(\theta))$

成立，则系统(2-39)所有当 $t\in[-r,0]$ 时取值 $x_0(t)>0,y_0(t)>0$ 的任何初始值的解 $(x(t),y(t))$ 当 $t\to\infty$ 时都有 $(x(t),y(t))\to(x^*,y^*)$.

例 25 有限连续时滞洛特卡-沃尔泰拉竞争模型.

$$\begin{cases}dx(t)/dt=x(t)[r_1-a_1x(t)-b_1\int_{-T}^0 K_1(s)y(t+s)ds],\\ dy(t)/dt=y(t)[r_2-a_2\int_{-T}^0 K_2(s)x(t+s)ds-b_2y(t)],\end{cases}\quad t>0.\tag{2-40}$$

假设 a_1,a_2,r_1,r_2,b_1,b_2 均为正常数,并设成立:

$$a_1/a_2 > r_1/r_2 > b_1/b_2. \tag{2-41}$$

函数 $K_1(s)$ 和 $K_2(s)$ 定义在$[-T,0]$上为非负连续核函数,并有

$$\int_{-T}^{0} K_1(s)\mathrm{d}s = \int_{-T}^{0} K_2(s)\mathrm{d}s = 1. \tag{2-42}$$

定理36　若条件(2-41),(2-42)成立,则系统(2-40)有初始条件:当 $-T \leqslant t \leqslant 0$ 时有

$$x(t) = \varphi_1(t) \geqslant 0,\quad y(t) = \varphi_2(t) \geqslant 0$$

(这里 T 为任意正数).这个初始问题对于所有 $t \geqslant 0$ 有一个解 $x(t),y(t)$,并且 $x(t),y(t)$ 保持非负;对于任意非负连续函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$,这个初始问题的解 $x(t),y(t)$ 都有

$$(x(t),y(t)) \longrightarrow (x^*,y^*),\text{当 } t\to\infty \text{ 时}.$$

这里(x^*,y^*)为(2-40)式的正平衡点

$$x^* = \frac{r_1b_2 - r_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\quad y^* = \frac{a_1r_2 - a_2r_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

例26　无限连续时滞洛特卡-沃尔泰拉捕食模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(\varepsilon_1 - \alpha_1 x - r_1 y); \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y\left(-\varepsilon_2 - \alpha_2 y + r_2\int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \end{cases} \tag{2-43}$$

这里 $\varepsilon_i,\alpha_i,r_i > 0(i=1,2)$, $F(t)\geqslant 0,\int_0^{\infty} F(t)\mathrm{d}t = 1$.设当 $-\infty < t < 0$ 时种群密度是已知的非负有界函数.

$$x(t) = \varphi_1(t),y(t) = \varphi_2(t),\ -\infty < t < 0.$$

如果核函数 $F(t) = a\mathrm{e}^{-at}$,则模型(2-43)等价于

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(\varepsilon_1 - \alpha_1 x - r_1 y); \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y(-\varepsilon_2 - \alpha_2 y + r_2 z); \\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}t = a(x - z), \end{cases} \tag{2-44}$$

其中

$$z = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

定理37　1° 当$\varepsilon_2/r_2 > \varepsilon_1/\alpha_1$时系统(2-44)在第一象限内部无平衡点,模型(2-44)仅有平衡点(0,0,0)和$(\varepsilon_1/\alpha_1,0,\varepsilon_1/\alpha_1)$,(0,0,0)为不稳定,在第一象限内所有解满足

当 $t\to\infty$ 时 $x\to\varepsilon_1/\alpha_1, y\to 0, z\to\varepsilon_1/\alpha_1$;

2° 当$\varepsilon_1/\alpha_1 > \varepsilon_2/r_2$时系统(2-44)除了平衡点(0,0,0)和$(\varepsilon_1/\alpha_1,0,\varepsilon_1/\alpha_1)$外还存在正平衡点$(x^*,y^*,z^*)$,当 $0 < \dfrac{r_1r_2}{\alpha_1\alpha_2} < 8$ 时,在第一象限内所有解满足:

当 $t\to\infty$ 时 $x\to x^*, y\to y^*, z\to z^*$;

3° 当$\varepsilon_1/\alpha_1 > \varepsilon_2/r_2$时若平衡点$(x^*,y^*,z^*)$为不稳定,则系统(2-44)必存在周期解.

关于时滞种群模型的研究,还有许多工作要做[9].

2.2.7　变系数两种群洛特卡 - 沃尔泰拉模型

若 $f(t)$ 为在 $t\in\mathbf{R}^+$ 内的连续函数,且有正的上、下确界

$$\underline{f}=\inf_{t\in R^+}f(t),\quad \overline{f}=\sup_{t\in R^+}f(t).$$

若 $f(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数,则记

$$\underline{f}=\min_{t\in[0,\omega]}f(t),\overline{f}=\max_{t\in[0,\omega]}f(t),\langle f\rangle_\omega=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(s)\mathrm{d}s.$$

例 27　变系数洛特卡 - 沃尔泰拉竞争模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x[r_1(t)-a_{11}(t)x-a_{12}(t)y];\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=y[r_2(t)-a_{21}(t)x-a_{22}(t)y].\end{cases}\tag{2-45}$$

对应的常系数竞争模型为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x[r_1-a_{11}x-a_{12}y];\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=y[r_2-a_{21}x-a_{22}y].\end{cases}\tag{2-46}$$

这里 r_i 和 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 均为正常数,由定理 16 可知,当

$$a_{11}/a_{21}>r_1/r_2>a_{12}/a_{22}\tag{2-47}$$

满足时,系统(2-46)存在唯一正平衡点(x^*,y^*),且它是全局渐近稳定的.其中

$$x^*=\frac{r_1a_{22}-a_{12}r_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y^*=\frac{a_{11}r_2-a_{21}r_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

定理 38　若 $r_i(t),a_{ij}(t)(i,j=1,2)$ 均为严格正的 ω 周期函数,且满足条件

$$\underline{a}_{11}/\overline{a}_{21}>\overline{r}_1/\underline{r}_2>\overline{a}_{12}/\underline{a}_{22},\tag{2-48}$$

则系统(2-45)存在唯一严格正的 ω 周期解,而且它是全局渐近稳定的.

定理 39　若 $r_i(t),a_{ij}(t)(i,j=1,2)$ 均为连续的、有正上下界的几乎周期函数,而且满足条件

$$\underline{a}_{11}/\overline{a}_{21}>\overline{r}_1/\underline{r}_2\geqslant\underline{r}_1/\overline{r}_2>\overline{a}_{12}/\underline{a}_{22},\tag{2-49}$$

则系统(2-45)存在唯一严格正、全局渐近稳定几乎周期解.

定理40　设 $r_i(t),a_{ij}(t)(i,j=1,2)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上连续,有正上下确界,且满足条件(2-49),则

1° 系统(2-45)存在一个解$(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$,满足不等式

$$0<\frac{\underline{r}_1\underline{a}_{11}-\overline{a}_{12}\overline{r}_2}{a_{11}\underline{a}_{22}-\overline{a}_{12}\underline{a}_{21}}=s_1\leqslant\tilde{x}(t)\leqslant\delta_1=\frac{\overline{r}_1\overline{a}_{22}-\underline{a}_{12}\underline{r}_2}{\underline{a}_{11}\overline{a}_{22}-\underline{a}_{12}a_{21}},$$

$$0<\frac{\underline{a}_{11}\underline{r}_2-\overline{a}_{21}\overline{r}_1}{\underline{a}_{11}a_{22}-\underline{a}_{12}a_{21}}=\delta_2\leqslant\tilde{y}(t)\leqslant s_2=\frac{\overline{a}_{11}\overline{r}_2-\underline{a}_{21}\underline{r}_1}{a_{11}\underline{a}_{22}-a_{12}\underline{a}_{21}}.$$

2° 系统(2-45)任意两个具正初始条件的解$(x_1(t),y_1(t))$和$(x_2(t),y_2(t))$当 $t\to\infty$ 时,有

$$x_1(t)-x_2(t)\to0,\quad y_1(t)-y_2(t)\to0.$$

即系统(2-45)任意正初始条件的解$(x(t),y(t))$,对于任意正常数 ϵ,当 t 充分大

时,有

$$s_1-\epsilon<x(t)<\delta_1+\epsilon,\quad \delta_2-\epsilon<y(t)<s_2+\epsilon.$$

定理 41　设 $r_i(t), a_{ij}(t)(ij=1,2)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 中连续,有正上、下确界,且满足

$$\underline{r}_1/\overline{r}_2>\overline{a}_{12}/\underline{a}_{22},\ \underline{r}_1/\overline{r}_2\geqslant\overline{a}_{11}/\underline{a}_{21}. \tag{2-50}$$

设 $(x(t),y(t))$ 是系统(2-45)任一具正初始条件的解,则

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}[x(t)-x^*(t)]=0.$$

这里 $x^*(t)$ 是逻辑斯谛方程

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x[r_1(t)-a_{11}(t)x]$$

使 $0<\delta\leqslant x^*(t)\leqslant\Delta<\infty$ 的解,δ,Δ 为正常数.

另一情况下若条件

$$\overline{r}_1\overline{a}_{22}\leqslant\underline{a}_{12}\underline{r}_2,\ \underline{a}_{11}\underline{r}_2>\overline{r}_1\overline{a}_{21}$$

满足时也有相对应的结论(把 $x(t)$ 与 $y(t)$ 对调).

2.3　复杂生态系统

这里所谓复杂生态系统是指有三个和三个以上的种群所组成的生态群落中种群之间的互相作用的生态模型.

2.3.1　多种群模型的稳定性

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t=x_iF_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2-51}$$

假设函数 $F_1(\boldsymbol{x}),F_2(\boldsymbol{x}),\cdots,F_n(\boldsymbol{x})$ 在正锥 $R_0=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}$ 上连续,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,并设存在正平衡点 $\boldsymbol{x}^*$,即

$$F_i(\boldsymbol{x}^*)=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

定义 10　在正锥 R_0 内函数 $V(\boldsymbol{x})$ 如果满足下列条件:

1° $V(\boldsymbol{x}^*)=0$;

2° 在 R_0 内,$V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 点上有一个整体的最小,等于零;

3° 在 R_0 内,曲面簇 $V(\boldsymbol{x})=K$ 对于每一个正值 K 是闭曲面;

4° 关于系统(2-51)的导数

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\partial V(\boldsymbol{x})/\partial x_i x_i F_i(\boldsymbol{x})$$

是非正的,对于所有 $\boldsymbol{x}\in R_0$ 成立,

则 $V(\boldsymbol{x})$ 称为是模型(2-51)的李雅普诺夫函数.

如果在 R_0 内存在李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$,而且 $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负定,则模型(2-51)的正平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 是全局渐近稳定的.也称模型(2-51)在 R_0 内是全局渐近稳定的.

定理 42　系统(2-51)在 R_0 内是全局渐近稳定的充分条件:

1° 有一个正的平衡点 $\boldsymbol{x}^*$;

2° 存在一个正常数集 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_i^*)F_i(\boldsymbol{x}) < 0$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in R_0$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ 成立.

在生态学的研究中，除了要了解系统(2-51)的正平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ 的渐近性质外，还要研究那些非负平衡点 $\overline{\boldsymbol{x}} \in \partial R_0$($R_0$ 的边界)的渐近性质，为此需引进扇形稳定性的概念.

记 $M = \{1,2,\cdots,n\}$，M 为正整数所组成的集合. 又记 P 是 M 的一个子集，再记 $Q = M - P$，即 Q 是 P 在 M 中的余集. 这样就可以描述系统(2-51)的非负平衡点，若 $\overline{x}$ 是一个非负平衡点，当 $i \in P$ 时 $\overline{x}_i > 0$，而当所有的 $i \in Q$ 时 $\overline{x}_i = 0$.

为了给出非负平衡位置的邻域的概念，先给出某些集合的定义，记 $V(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}} \|$，对于正数 ϵ 和 δ，记

$R(\epsilon, I) = \{\boldsymbol{x} \mid V(\boldsymbol{x}) < \epsilon$，当 $i \in I$ 时 $x_i > 0$，当 $i \in M - I$ 时 $x_i \geqslant 0\}$，

$S(\epsilon, I) = \{\boldsymbol{x} \mid V(\boldsymbol{x}) < \epsilon$，当 $i \in I$ 时 $x_i > 0$，当 $i \in M - I$ 时 $x_i = 0\}$.

从几何上看，$R(\epsilon, I)$ 是以 $S(\epsilon, I)$ 为底的包含在正锥 R_0 中的一个半球.

定义 11 非负平衡点 $\overline{x}$ 称为扇形稳定的，如果对任意小的正数 ϵ，存在对应的正数 $\delta(\epsilon)$，使系统起始于 $R(\delta, p)$ 的每一个解，对于所有的 t 值，保留在 $R(\epsilon, p)$ 内，并且当 $t \to \infty$ 时收敛于 $\overline{x}$.

定义 12 如果 $\overline{x}$ 是扇形稳定的，并且每一个起始于集合 $R(d, p)$ 的解在任何有限时间内都包含在 $R(d, p)$ 内，且当 $t \to \infty$ 时都趋于非负平衡点 $\overline{x}$，则 $\overline{x}$ 称为关于集合 $R(d, p)$ 是扇形稳定的(d 为有限数).

若 $d = \infty$，则称 $\overline{x}$ 是全局扇形稳定的.

要得到非负平衡点为扇形稳定的某些充分条件. 记矩阵

$$\boldsymbol{K} = \overline{x}_i \partial F_i / \partial x_j \big|_{\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}},$$

这里 $i, j \in p$.

定理 43 系统(2-51)的非负平衡点 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 为局部扇形稳定的充分条件是矩阵 K 的所有特征值有负实部，并且

$$F_i(\overline{\boldsymbol{x}}) < 0 \text{ 对所有 } i \in Q \text{ 成立}.$$

定理 44 系统(2-51)的非负平衡位置 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是关于集合 $R(d, p)$ 扇形稳定的充分条件为：存在正常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得对于 $R(d, p)$ 内每一个点，函数

$$W(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - \overline{x}_i)F_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0.$$

并且除了 $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}$ 外，$W(\boldsymbol{x})$ 不沿系统(2-51)的任一个解恒等于零.

推论 3 系统(2-51)的非负平衡位置 $\overline{x}$ 是全局扇形稳定的充分条件为：存在正常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得在 $R(\infty, p)$ 中每一个点，函数 $W(\boldsymbol{x})$ 为非正，而且除 $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}$ 外不沿系统(2-51)的任一个解恒等于零.

定理 45 假设存在一个常数矩阵 G，使得

1° $\partial F_i(\boldsymbol{x}) / \partial x_i \leqslant G_{ii}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，

$$|\partial F_i(x)/\partial x_j| \leqslant G_{ij}, i \neq j$$

对于 $R(\infty, p)$ 中所有的 x 都成立；

2° $-G$ 的顺序主子式均为正；

3° $F_i(\bar{x}) \leqslant 0$，对所有 $i \in Q$，

则系统(2-51)的非负平衡点 $\bar{x}$ 是全局扇形稳定.

例 28　两种群洛特卡-沃尔泰拉模型

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(b_1 + a_{11}x + a_{12}y), \\ dy/dt &= y(b_2 + a_{21}x + a_{22}y), \end{aligned} \tag{2-52}$$

其中 $a_{11} < 0, b_1 > 0$. 考虑非负平衡点$(\bar{x}, 0)$，$\bar{x} = -b_1/a_{11} > 0$. 若 $a_{22} < 0, a_{12} < 0$，$a_{21} > 0$，则非负平衡点$(\bar{x}, 0)$全局扇形稳定的充分条件为

$$b_2/a_{21} < b_1/a_{11}.$$

2.3.2　复杂生态系统的持续生存

考虑模型(2-51)，假设函数 F_i 在锥体

$$R_0 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

上满足解的唯一性条件，于是过任一点 $x_0 \in R_0$，模型(2-51)都存在满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的右行饱和解 $x = \varphi(t, x_0)$，$t \in \Delta$，这里 $\Delta = [0, T_\varphi]$ 表示解的最大存在区间.

为方便，以后总假设解的存在区间为无穷大，即 $T_\varphi = +\infty$. 特别是当系统的一切解有界，则任何解 $\varphi(t, x_0)$ 必在$(0, +\infty)$上有定义.

定义 13　对任何 $x \in \mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$ 和所有的 i，

1° 如果有

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi_i(t, x) > 0,$$

则称系统(2-51)是**弱持续生存**(weak persistence)；

2° 如果有

$$\liminf_{t\to\infty} \varphi_i(t, x) > 0,$$

则称系统(2-51)是**强持续生存**(strong persistence)；

3° 如果有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_i(s, x)\,ds > 0,$$

则称系统(2-51)是**平均持续生存**(persistence in mean)；

4° 如果存在正数 δ(δ 与 x 无关)有

$$\liminf_{t\to\infty} \varphi_i(t, x) \geqslant \delta,$$

则称系统(2-51)是**一致持续生存**(uniform persistence)；

5° 若系统(2-51)一致持续生存，并且它的所有解有界，即

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi_i(t, x) < 1/\delta,$$

则称系统(2-51)是**永久持续生存**(permance).

将满足以上各种持续生存定义的系统均称为持久型的系统.

定义 14 若存在系统的一个解 $\varphi(t,x)$, $x\in \mathrm{int}\mathbf{R}_+$, 使得对某个 i, 有

$$\limsup_{t\to\infty}\varphi_i(t,x)=0,$$

则称系统为非持续生存,或称是绝灭型的.

例 29 对于一维的微分方程

$$dx/dt=\alpha x,$$

则当 $\alpha\geqslant 0$ 时是一致持续生存的,当 $\alpha<0$ 时是绝灭型的.

由此例看出对于一维方程的持久性研究比较容易,要用一维方程

$$du/dt=w(u) \tag{2-53}$$

的持久性来判断一个复杂生态系统的持久性.

定理 46 若存在函数 $V:\mathbf{R}_+^n\to\mathbf{R}_+^n$, 满足:

1° $V(x)$ 在 $\mathbf{R}_+^n$ 连续可微;

2° 对于某一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$, 如果 $x_i\to 0$, 则有 $V(x)\to 0$;

3° $V'(x)=dV/dt=\sum_{i=1}^{n}\partial V/\partial x_i x_i F_i(x)\geqslant \omega(V(x))$,

则由方程(2-53)弱持续生存可推出方程(2-51)为弱持续生存.

若将条件 3° 改成

3°′ $V'(x)\leqslant\omega(V(x))$,

则由方程(2-53)非持续生存可推出系统(2-51)为非持续生存.

定义 15 1° 满足定理 46 的条件 1° ~ 3° 且方程(2-53)为持续生存,则称 $V(x)$ 为**持久性函数**.

2° 满足定理 46 的条件 1°,2°,3°′ 且方程(2-53)为非持续生存,则称 $V(x)$ 为**绝灭性函数**.

例 30 洛特卡-沃尔泰拉食物链系统

$$\begin{cases} dx_1/dt=x_1(a_{10}-a_{11}x_1-a_{12}x_2);\\ dx_2/dt=x_2(-a_{20}+a_{21}x_2-a_{23}x_3);\\ \qquad\cdots\\ dx_{n-1}/dt=x_{n-1}(-a_{n-1,0}+a_{n-1,n-2}x_{n-2}-a_{n-1,n}x_n);\\ dx_n/dt=x_n(-a_{n,0}+a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases} \tag{2-54}$$

利用持久性函数

$$V(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_i}\quad (r_i>0\text{ 为待定参数})$$

可以证得如下定理.

定理 47 当 $a_{11}>0$ 时,系统(2-54)的所有具正初始条件的解有界,且当 $\mu>0$ 时是永久持续生存,当 $\mu<0$ 时是非持续生存,这里

$$\mu=a_{10}-\frac{a_{11}}{a_{21}}\left[a_{20}+\sum_{i=2}^{k}\left(\prod_{i=2}^{j}\frac{a_{2i-2,2i-1}}{a_{2i,2i-1}}\right)a_{2j,0}\right]-$$

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{j}\frac{a_{2i-1,2i}}{a_{2i+1,2i}}\right)a_{2j+1,0},$$

其中

$$h=\begin{cases}n/2, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\(n-1)/2, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;}\end{cases}$$

$$k=\begin{cases}n/2-1, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\(n-1)/2, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

定理 48　若食物链系统(2-54)有孤立正平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，则 x^* 是全局渐近稳定的，即 x^* 为稳定且对任意初始值 $x_0\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$ 的解 $\varphi(t,x)$，当 $t\to+\infty$ 时都有 $\varphi(t,x)\to x^*$.

2.3.3　多种群洛特卡－沃尔泰拉系统

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t=x_i(b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2-55}$$

利用常用的李雅普诺夫函数

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i[x_i-x_i^*-x_i^*\ln(x_i/x_i^*)],$$

这里 x^* 是(2-55)式的正平衡点，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为待定正常数，可以得到如下定理.

定理 49　系统(2-55)的正平衡点 x^* 是全局稳定的充分条件为：如果存在一个正的对角线矩阵 C，使得 $CA+A^{\mathrm T}C$ 是非正，并且函数

$$W(x)=\frac{1}{2}(x-x^*)^{\mathrm T}(CA+A^{\mathrm T}C)(x-x^*)$$

除在 $x=x^*$ 外沿系统(2-55)的任一轨线均不恒等于零.

定义 16　如果存在正对角线矩阵 $C=\operatorname{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 使得 $CA+A^{\mathrm T}C$ 为负定(半负定)，则矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为沃尔泰拉－李雅普诺夫稳定(半稳定).

定义 17　一矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为是一个 M 矩阵，如果当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}\leqslant 0$，而且下列条件中任何一个成立：

1° A 的所有特征值有正实部；

2° A 的顺序主子式为正，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}>0,\quad k=1,2,\cdots,n;$$

3° A 是非奇异的，而且 $A^{-1}\geqslant 0$；

4° 存在一个向量 $x>0$，使 $Ax>0$；

5° 存在一个向量 $y>0$，使 $A^{\mathrm T}y>0$.

定理 50　如果 A 是一个 M 矩阵，则存在正对角线矩阵 $C=\operatorname{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 使得矩阵 $B=\frac{1}{2}(CA+A^{\mathrm T}C)$ 为正定.

定理 51 模型(2-55)为全局稳定的充分条件为

1° 有一个正平衡点 x^*;

2° 存在一个矩阵 $G = g(_{ij})_{n\times n}$,使对所有 $i,j = 1,2,\cdots,n$ 存在

$$a_{ii} \leqslant g_{ii}, \quad |a_{ij}| \leqslant g_{ij}(\text{对 } i \neq j);$$

3° 矩阵 $-G$ 是 M 矩阵.

为了叙述系统(2-55)的持久性定理,作如下记号:以 ∂R_+^n 记 R_+^n 的所有边界,以 $\Omega(x_0)$ 记过点 x_0 的轨线 $x = \varphi(t,x_0)$ 的 ω 极限集,以 $\Omega(\partial R_+^n)$ 记在 R_+^n 的边界上任意一点出发轨线 ω 极限集的总体.

定理 52 设系统(2-55)的一切解有界,且 $\Omega(\partial R_+^n)$ 仅含孤立平衡点,若存在常数 $p_i(p_i > 0, i = 1,2,\cdots,n)$,使线性不等式组

$$\sum_{i=1}^{n} p_i[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j] > 0$$

对 ∂R_+^n 上所有非负平衡点成立时,系统(2-55)为永久持续生存.

定义 18 在系统(2-55)中,

1° 如果所有的 $a_{ij} \geqslant 0$(当 $i \neq j$),则称系统(2-55)为合作系统;

2° 如果所有的 $a_{ij} \leqslant 0(i \neq j)$,则称系统(2-55)为竞争系统;

3° 如果所有的 $a_{ij}a_{ji} \leqslant 0(i = j)$,则称系统(2-55)为捕食系统.

定理 53 如果系统(2-55)是合作系统($a_{ij} > 0$),且有一正的平衡点 x^*,则 x^* 是全局渐近稳定的充要条件是 $-A$ 的所有主子式为正.

定理 54 如果系统(2-55)是合作系统,则有一个渐近稳定正平衡点 x^* 的充要条件是 A 为渐近稳定的矩阵.

定义 19 如果系统(2-55)的系数矩阵 A 满足

1° $a_{ii} \leqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$,且至少有一个 i 使 $a_{ii} < 0$;

2° 当且仅当 $a_{ji} = 0(i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$ 时,$a_{ij}a_{ji} \leqslant 0, a_{ij} = 0$;

3° 存在 $i_1, i_2, \cdots, i_m(m \geqslant 3)$ 使得 $a_{i_1i_2}, a_{i_2i_3}\cdots, a_{i_mi_1}$ 不为零,

则系统(2-55)称为环型捕食系统,否则称为**链型捕食系统**.

定理 55 链型捕食洛特卡-沃尔泰拉系统(2-55)的系数矩阵 A 是沃尔泰拉-李雅普诺夫半稳定的.

定理 56 三种群链型捕食洛特卡-沃尔泰拉系统(2-55)($n = 3$),若存在一正平衡点 x^*,又 x^* 是局部渐近稳定,则 x^* 为全局渐近稳定.

猜想 1 n 种群链型捕食洛特卡-沃尔泰拉系统(2-55),若存在一正平衡点 x^*,且 x^* 是局部渐近稳定,则 x^* 为全局渐近稳定.

注 2 这个猜想已被证明当 $n \leqslant 7$ 时是成立的.

例 31 May-Leonard 纯竞争三种群模型

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1(1 - x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3), \\ dx_2/dt = x_2(1 - \beta x_1 - x_2 - \alpha x_3), \alpha \neq 1, \beta \neq 1. \\ dx_3/dt = x_3(1 - \alpha x_1 - \beta x_2 - x_3), \end{cases} \tag{2-56}$$

定理 57 1° 当 $\alpha + \beta = 2$ 时,在 R_+^3 内平面 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 与双曲面 $x_1x_2x_3$

$=c$(c为参数)的交线为一簇圆,这簇圆为系统(2-56)的一簇空间周期解,并且系统(2-56)在$\mathbf{R}_+^3$内部所有的轨道都以这一簇空间周期解中的一个为ω极限集.

2° 当$\alpha+\beta>2$时,在$x_1=0,x_2=0$和$x_3=0$三个平面上分别存在联结平衡点$E_{11}(1,0,0)$与$E_{12}(0,1,0)$,E_{11}与$E_{13}(0,0,1)$以及E_{12}与E_{13}的唯一轨线.这三条轨线构成一个奇异闭轨线F,并且除了正平衡点外,系统(2-56)在$\mathbf{R}_+^3$内部所有的轨道均以F为ω极限集.

定理 58 若系统(2-55)为竞争系统,即$a_{ij}<0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,且如下不等式成立

$b_j/a_{jj}>b_i/a_{ij}$,当$i<j$时;

$b_j/a_{jj}<b_i/a_{ij}$,当$i>j$时,

则边界平衡点$\bar{x}=(b_1/a_{11},0,\cdots,0)$在$\mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$内全局吸引.

2.3.4 变系数洛特卡-沃尔泰拉系统

例 32 多种群变系数竞争系统

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t=x_i\left[r_i(t)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j\right],\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2-57}$$

若函数$f(t)$在$\mathbf{R}^+:(t\geqslant 0)$内为正,连续,$\omega$周期函数,记$\underline{f}=\min\limits_{(0,\omega)}f(t)$,$\bar{f}=\max\limits_{(0,\omega)}f(t)$,有

定理 59 假设$r_i(t),a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$均为在$\mathbf{R}^+$内的正、连续、$\omega$周期函数,并且满足

$$\underline{r}_i>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{a}_{ij}(\bar{r}_j/\underline{a}_{jj}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则系统(2-57)至少存在一个严格正的ω周期解.

定理 60 如果定理59的条件满足,而且

$$\underline{a}_{ii}>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{a}_{ij}+\alpha,$$

其中α为一正数,则系统(2-57)存在唯一严格正的ω周期解,并且它是全局渐近稳定的.

对于几乎周期系数的洛特卡-沃尔泰拉系统,引进如下记号.如果f是几乎周期函数,记

$$\underline{f}=\inf_{t\in\mathbf{R}^+}f(t),\quad \bar{f}=\sup_{t\in\mathbf{R}^+}f(t),$$

$$\langle f\rangle_\infty=\lim_{t-s\to\infty}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau/(t-s).$$

关于单种群逻辑斯谛模型,有

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t=x_i(r_i(t)-a_{ii}(t)x_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2-58}$$

定理 61 若$r_i(t),a_{ii}(t)(i=1,2,\cdots,n)$均为正几乎周期函数,且$\langle r_i\rangle_\infty>0$,$\underline{a}_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n$,则方程(2-58)存在唯一严格正几乎周期解$\tilde{x}_i(t)(i=1,2,$

$\cdots, n$),而且 $\tilde{x}_i(t)$ 是全局渐近稳定的.

定理 62 设 $r_i(t), a_{ij}(t)(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是正的几乎周期函数,$\langle r_i \rangle_\infty > 0$. $\underline{a}_{ii} > 0$,而且

$$a_{ii}(t) > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ji}(t) + \mu, \quad t \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,\cdots,n,$$
$$\langle R_i \rangle_\infty > 0.$$

这里 μ 为任一正数,又

$$R_i(t) = r_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(t)\tilde{x}_j(t),$$

则系统(2-57)存在一个几乎周期解为严格正、全局一致渐近吸引的(这里 $\tilde{x}_j(t)$ 即为定理 61 中的 $\tilde{x}_i(t)$).

例 33 多种群变系数合作系统

$$\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = x_i(r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j), \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{2-59}$$

记

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}, \quad \overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{n\times n}.$$

定理 63 若 $r_i(t), a_{ij}(t)(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 中连续 ω 周期函数,$a_{ii}(t) < 0, a_{ij}(t) \geqslant 0, i \neq j, \langle r_i \rangle \omega > 0(i,j = 1,2,\cdots,n)$,且条件

$$(-1)^k \det(\overline{a}_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} > 0, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

满足,则合作系统(2-59)存在唯一全局渐近稳定的 ω 周期解.

2.3.5 多种群离散模型

$$x_i(t+1) = x_i(t)F_i(x_1(t),\cdots,x_n(t)) \equiv G_i(x_1(t),\cdots,x_n(t)),$$
$$i = 1,2,\cdots,n. \tag{2-60}$$

定义 20 若存在 $x^*(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, x_i^* 为正常数($i = 1,2,\cdots,n$),使对所有的 i,有

$$F_i(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 1 \text{ 或 } G_i(x^*) = x_i^*, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

则称 x^* 为系统(2-60)的**正平衡位置**.

系统(2-60)在 x^* 的线性化系统为

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} (\partial G_i/\partial x_j)_{x=x^*} x_j, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

写成矩阵形式为

$$x_i(t+1) = Ax(t), \quad A = (a_{ij}) = (\partial G_i/\partial x_j)_{x=x^*}.$$

定理 64 若矩阵 A 的所有特征值的模都小于 1,则系统(2-60)的正平衡点 x^* 为局部渐近稳定.

设 Ω 是在正象限内的一个开域,又系统(2-60)的正平衡点 $x^* \in \Omega$.

定义 21　若函数 $V(x)$ 具有性质：

1° 对于所有 $x \in \Omega$，且 $x \neq x^*$ 时有 $V(x) > 0$，而 $V(x^*) = 0$；

2° 在 Ω 内对于每一个 $K > 0$，曲面 $V(x) = K$ 是一闭曲面，而且函数 $V(x)$ 在 $x = x^*$ 有唯一极小值；

3° 函数 $\Delta V(x) = V(G(x)) - V(x)$ 对于所有的 $x \in \Omega$ 为非正，

则称函数 $V(x)$ 为模型(2-60)在区域 Ω 内的李雅普诺夫函数.

定理 65　若系统(2-60)在区域 Ω 内存在一个李雅普诺夫函数 $V(x)$，并且 $\Delta V(x)$ 不沿系统(2-60)在区域 G 内任一整条解恒等于零，则 x^* 是渐近稳定且区域 Ω 是 x^* 的正向吸引区域. 如果 $\Omega = \mathbf{R}_+^n$，则 x^* 为全局渐近稳定.

例 34　多种群洛特卡 - 沃尔泰拉离散系统

$$x_i(t+1) = x_i(t)\exp[r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t)], \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{2-61}$$

设其中 $a_{ii} < 0$，记 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

定理 66　若所有 $a_{ij} \leqslant 0 (1 \leqslant i < j \leqslant n)$，则系统(2-61)为最终一致有界.

定理 67　若存在 $p_1, p_2, \cdots, p_n > 0$，使得对于系统(2-61)的任意边界平衡点 $\bar{x}$，有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j) > 0,$$

则系统(2-61)是永久持续生存的.

3　微生物连续培养的数学模型

3.1　单种微生物连续培养模型

为了描述微生物在培养室内培养生长的过程以及营养液的消耗过程，用动力学的方法来建立微生物与营养液之间相互作用的动力学模型. 以 $x(t)$ 和 $s(t)$ 分别记培养室内在时刻 t 微生物 X 的浓度和营养液 S 的浓度，两者在培养室内的相互作用，可以用两分子作用机制写为 $X + S \xrightarrow{K_1} 2X$，如果服从质量作用律，则应用分子反应动力学建模为

$$dx/dt = K_1 sx.$$

这里反应速率为 $\mu(s) = K_1 s$，但是如果不是服从质量作用律，则可一般地写成

$$dx/dt = \mu(s)x.$$

除了服从质量作用律的反应速率(非饱和反应速率)外. 常用的饱和反应速率有如下几种：

1° Monod　　$\mu_1(s) = \mu_m s/(K_m + s)$，

其中，μ_m 为最大理论反应速率，K_m 为米氏反应常数；

2° Blackman $\mu_2(s)=\begin{cases}K_2, & 当\ s<s^*\ 时;\\ \mu_m, & 当\ s\geqslant s^*\ 时;\end{cases}$

3° 具内在代谢(Monod) $\mu_3(s)=\dfrac{\mu_m s}{K_m+s}-K_d$;

4° Mond Haldene $\mu_4(s)=\dfrac{\mu_m s}{K_m+s+s^2/K_i}$;

5° Tessiet $\mu_5(s)=\mu_m s\exp\left(-\dfrac{s}{K_s}\right)/(K_m+s)$;

6° Tessiet $\mu_6(s)=\begin{cases}\mu_m(s)/(K+s), 当\ s<s_0\ 时;\\ \mu_m s/(K+s)-i(s-s_0), 当\ s>s_0\ 时.\end{cases}$

定义 1 利用营养基 S 培养微生物 X,连续培养过程的设备装置 —— **恒化器**(chemostat),包含有三个部分(如图 3-1 所示):

1° 有一个固定容积 V 的培养室,其中装营养液和微生物,有搅拌和供氧;

2° 有供液系统,单位时间以流量为 Q 供应浓度为 s_0 的营氧液,连续不断地流进培养室;

3° 有溢流装置,使培养室内体积保持不变.

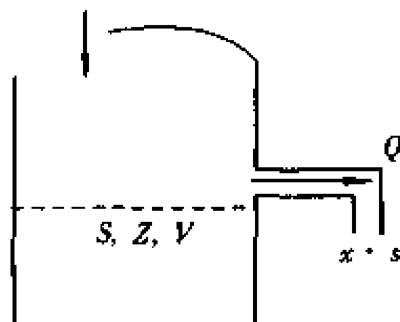


图 3-1

例 1 米氏反应速度,单种微生物连续培养模型

$$\begin{cases}dx/dt=\mu_m sx/(K_m+s)-Qx;\\ ds/dt=Q(s_0-s)-\mu_m sx/\delta(K_m+s),\end{cases}\tag{3-1}$$

其中,$1/\delta$ 表微生物增长对营养基的消耗率.在这里,设 δ 为正常数.

模型(3-1)经过无量纲化变换,可化为

$$\begin{cases}ds/dt=1-s-msx/(a+s);\\ dx/dt=msx/(a+s)-x.\end{cases}\tag{3-2}$$

定理 1 1° 若 $m\leqslant 1$ 或 $m>1$ 但 $\lambda=a/(m-1)\geqslant 1$,则系统(3-2)的每一个解都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$;

2° 若 $m>1,\lambda<1$ 则系统(3-2)所有具正初始值的解都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=1-\lambda$,$\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=\lambda$.

例 2 变消耗率微生物连续培养模型

$$\begin{cases}dx/dt=\mu_m sx/(K_m+s)-Qx;\\ ds/dt=Q(s_0-s)-\dfrac{\mu_m sx}{(A+Bs)(K_m+s)}.\end{cases}\tag{3-1)'$$

容易计算出模型(3-1)′有两个平衡点(0,1)和(x^*,s^*).

定理 2 当 $A/B<R$ 时,系统(3-1)′在正平衡点(x^*,s^*)外围存在极限环,当 $A/B>R$ 时不存在极限环.其中

$$R = \frac{[\alpha\beta(1-\beta) - \beta(1+\beta)]s_0}{(\alpha-1)[(\alpha-1)^2+\beta]}, \quad \alpha = \mu_m/\alpha, \beta = K/s_0.$$

$R = A/B$ 是系统(3-1)′ 的 Hopf 分岔值.

3.2 多种微生物混合培养模型

利用恒化器装置来同时培养几种微生物.假设这些微生物都依靠同一营养基而生长,这样以流量为 Q 流入浓度为 s_0 的营养基,而在培养室内同时存在几种以浓度为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的微生物.又假设这些微生物之间互不干扰,用数学模型的方法来研究微生物的生长过程.

例 3 两种微生物混合培养模型.

在同一恒化器中,利用同一种营养基 S,同时培养两种微生物 X_1 和 X_2,其模型为

$$\begin{cases} dx_1/dt = -Qx_1 + \mu_1 x_1; \\ dx_2/dt = -Qx_2 + \mu_2 x_2; \\ ds/dt = Q(s_0 - s) - x_1/(\delta_1\mu_1) - x_2/(\delta_2\mu_2), \end{cases} \tag{3-3}$$

其中,$1/\delta_1$ 和 $1/\delta_2$ 分别为两种微生物 X_1 和 X_2 对营养基的消耗率.这里设 δ_1 和 δ_2 均为常数.

$$\mu_1 = \mu_{1m}s/(K_1 + s), \quad \mu_2 = \mu_{2m}s/(K_2 + s).$$

模型(3-3) 经无量纲化变换后,可以化为

$$\begin{cases} ds/dt = 1 - s - m_1xs/(a_1 + s) + m_2sy/(a_2 + s); \\ dx/dt = m_1xs/(a_1 + s) - x; \\ dy/dt = m_2ys/(a_2 + s) - y. \end{cases} \tag{3-4}$$

设系统(3-4) 任一正初始条件的解记为$(s(t), x(t), y(t))$,并记 $\lambda_1 = a_1/(m_1 - 1)$, $\lambda_2 = a_2(m_2 - 1)$.

定理 3 1° 如果 $m_1 \leqslant 1(m_2 \leqslant 1)$,则有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0(\lim_{t\to\infty} y(t) = 0);$$

2° 如果 $m_1 > 1(m_2 > 1)$,并且 $\lambda_1 \geqslant 1(\lambda_2 \geqslant 1)$,则有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0(\lim_{t\to\infty} y(t) = 0);$$

3° 如果 $m_i > 1, i = 1,2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$,则有

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lambda_1, \lim_{t\to\infty} x(t) = 1 - \lambda_1, \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

如果 $\lambda_1 > \lambda_2$ 则上结果中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 对调.

例 4 多种微生物混合培养模型

在同一恒化器中,利用同一种营养基 S,同时培养几种微生物 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,其模型为

$$\begin{cases} ds/dt = (s_0 - s)Q - \sum_{i=1}^{n} m_i x_i s/\delta_i(a_i + s); \\ dx_i/dt = m_i x_i s/(a_i + s) - Qx_i, \end{cases} \tag{3-5}$$

其中，$1/\delta_i$ 为第 i 种微生物 X_i 对营养基的消耗率．这里设所有的 $\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为常数．

定理 4 系统(3-5)具有任意正初始条件的解 $s(t)、x_1(t),\cdots,x_n(t)$，且对所有 $t\in(0,\infty)$ 均为正而且有界．

定理 5 记 $b_i=m_i/Q, i=1,2,\cdots,n$，如果

1° $b_i\leqslant 1$;

2° $a_i/(b_i-1)>s_0, b_i>1$,

则系统(3-5)的所有正初始值的解有 $\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$.

定理 6 1° 如果 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则系统(3-5)的所有正初始值的解满足：

$$\lim_{t\to\infty}s(t)=\lambda_1, \lim_{t\to\infty}x_1(t)=(s_0-\lambda_1)(a_1+\lambda_1)Q/K_1\lambda_1,$$

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0, i=2,3,\cdots,n, K_1=m_1/\delta_1;$$

2° 如果对于某个 $j(2\leqslant j\leqslant n)$ 有 $0<\lambda_1=\cdots=\lambda_j<\lambda_{j+1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则系统(3-5)所有正初始值的解，当 $t\to\infty$ 时是趋于系统(3-5)在正锥体 R_+^{n+1} 边界上的平衡点 $\overline{X}_j=(\lambda_1,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_j,0,\cdots,0)$，其中 $\overline{x}_i(i=1,\cdots,j)$ 满足

$$(s_0-\lambda_1)Q-\sum_{i=1}^{j}[K_i\lambda_i/(\lambda_i+a_i)\overline{x}_i]=0,\quad i=1,2,\cdots,j.$$

例 5 时变输入**微生物连续培养模型**．

上面考虑的模型都是假定营养基连续输入的浓度为常定 s_0，如果输入的浓度是随时间而改变的，特别是时间的周期函数(例如为 $s_0+be(\omega t)$)，则培养模型变成

$$\begin{cases}ds/dt=Q[s_0+be(\omega t)-s]-\mu_m sx/\delta(K_m+s);\\ dx/dt=\mu_m sx/(K_m+s)-Qx.\end{cases}$$

通过无量纲化变换，这个模型可以化为

$$\begin{aligned}ds/dt&=Q[1+be(t)-s]-mxs/(a+s),\\ dx/dt&=mxs/(a+s)-Qx.\end{aligned}\tag{3-6}$$

这里 $e(t)$ 是周期函数，特别设 $e(t)=\sin t$.

定理 7 1° 如果 $m/Q<\mu^{-1}$，则系统(3-6)的非负 2π 周期解 $(\overline{s},0)$ 是大范围渐近稳定的；

2° 如果 $m/Q>\mu^{-1}$，则非负周期解 $(\overline{s},0)$ 是不稳定的，并且这时系统(3-6)至少存在一个正 2π 周期解 $(s^*(t),x^*(t))$，这里 $x^*(t)>0$，且 $0<s^*(t)<\overline{s}(t)$，其中

$$\overline{s}(t)=1+\frac{bQ}{\sqrt{1+Q^2}}\sin(t+\delta),$$

$\overline{s}(t)$ 是方程 $ds/dt=Q(1+b\sin t)-Qs$ 的唯一的 2π 周期解

$$\mu=1-\frac{a}{\sqrt{(a+1)^2-b^2Q^2/(1+Q^2)}}.$$

3.3　在恒化器中捕食链培养模型

在一个恒化器培养室内，用一种营养基 S 同时培养两种微生物 X_1 和 X_2，其中 X_1 是靠营养基 S 来培养繁殖的，而 X_2 则是微生物 X_1 的捕食者，X_2 与营养基 S 不发生直接的关系. 现在分别以小写 $s(t)$，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 来表示 S，X_1 和 X_2 在时刻 t 的浓度，以 $\mu_1(s)$ 记用营养基 S 培养微生物 X_1 的培养速率，$1/\delta_1$ 为其常数消耗率，以 $\mu_2(x_1)$ 记用微生物 X_1 培养微生物 X_2 的培养速率，$1/\delta_2$ 为其常数消耗率，s_0 为营养基输入浓度，Q 为营养基输入流量，这样恒化器培养模型为

$$\begin{cases} \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = Q(s_0 - s) - 1/(\delta_1\mu_1(s)x_1); \\ \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = (\mu_1(s) - Q)x_1 - 1/(\delta_2\mu_2(x_1)x_2); \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = (\mu_2(x_1) - Q)x_2. \end{cases} \tag{3-7}$$

考虑简单情况，设其中

$$\mu_1(s) = \alpha s/(K_1 + s),\quad \mu_2(x_1) = \beta x_1/(K_2 + x_1),$$

把 $\mu_1(s)$ 和 $\mu_2(x_1)$ 代入模型(3-7)后经无量纲化变换可化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 1 - s - m_1xs/(a_1 + s); \\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -x + m_1sx/(a_1 + s) - m_2xy/(a_2 + x); \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = m_2xy/(a_2 + x) - y. \end{cases} \tag{3-8}$$

记 $\lambda_i = a_i/(m_i - 1)$，$i = 1,2$.

定理 8　1° 如果 $m_1 \leqslant 1$ 或 $m_1 > 1$ 但 $\lambda_1 \geqslant 1$，则系统(3-8)所有正初始条件的解，有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0(\text{显然同时也有}\lim_{t\to\infty} y(t) = 0);$$

2° 如果 $m_2 \leqslant 1$ 或 $m_2 > 1$ 但 $\lambda_2 \geqslant 1$，则系统(3-8)所有具正初始条件的解，有

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

由定理 8 知，要进一步弄清系统(3-8)解的性质，可假设

$$m_i > 1,\text{且}\ 0 < \lambda_i < 1,\ i = 1,2. \tag{3-9}$$

经变换 $z(t) = 1 - s(t) - x(t) - y(t)$ 系统(3-8)可化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -z; \\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x\left[\dfrac{m_1(1 - x - y - z)}{1 + a_1 - x - y - z} - 1 - \dfrac{m_2y}{a_2 + x}\right]; \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y\left[\dfrac{m_2x}{a_2 + x} - 1\right]. \end{cases} \tag{3-10}$$

显然，$Z = 0$ 为其解，而且系统(3-10)所有的解当 $t\to\infty$ 时都以 $Z = 0$ 为 ω 极限集. 因此仅要研究在解平面 $Z = 0$ 上的性质，即化为研究系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\left[\dfrac{m_1(1 - x - y)}{1 + a_1 - x - y} - 1 - \dfrac{m_2y}{a_2 + x}\right]; \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left[\dfrac{m_2x}{a_2 + x} - 1\right]. \end{cases} \tag{3-11}$$

系统(3-11)有三个平衡点：

1° $E_0(0,0)$，当 $\lambda_1 < 1$ 时为鞍点，其稳定分界线与不稳定分界线都在坐标轴上；

2° $E_1(1-\lambda_1,0)$，当 $\lambda_1+\lambda_2 > 1$ 时是渐近稳定，当 $\lambda_1+\lambda_2 < 1$ 时是鞍点；

3° 正平衡点 $E_2(x^*,y^*)$，当 $\lambda_1+\lambda_2 > 1$ 时，E_2 为负平衡点，仅当 $\lambda_1+\lambda_2 < 1$ 时正平衡点 E_2 存在且指标为正，当 $D > 0$ 时 E_2 不稳定，当 $D < 0$ 时 E_2 局部渐近稳定，其中

$$D = \frac{y^*}{m_2\lambda_2} - \frac{m_1 a_1\lambda_2}{(1+a_1-\lambda_2-y^*)^2}.$$

定理 9 当 $D < 0$ 时，系统(3-11)的正平衡点 (x^*,y^*) 在第一象限是全局渐近稳定的；当 $D > 0$ 时，如果正平衡点 (x^*,y^*) 存在，则在 (x^*,y^*) 外围至少存在一个周期解.

定理 10 若 $m_i > 1, 0 < \lambda_i < 1, i = 1,2$，且 $\lambda_1+\lambda_2 < 1$ 以及 $D < 0$，则系统(3-8)的正平衡点 (s^*,x^*,y^*) 在第一象限是全局渐近稳定的.

例 6 时变输入捕食链培养模型.

假设营养基的输入浓度是时间的函数，并假设这个函数有正的上下界，$A_0 \leqslant S_0(t) \leqslant A_1$，这样模型(3-8)变为

$$\begin{cases} ds/dt = s_0(t) - s - m_1xs/(a_1+s); \\ dx/dt = m_1xs/(a_1+s) - x - m_2xy/(a_2+x); \\ dy/dt = m_2xy/(a_2+x) - y. \end{cases} \tag{3-12}$$

记任意正初值：$s(0) = s^0 > 0, x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$ 的解为 $\phi(t) = (s(t), x(t), y(t))$.

定理 11 系统(3-12)的每一个解 $\phi(t)$，当 $t \to \infty$ 时，有

$$\phi(t) \to A = \{(s,x,y) \in \mathbf{R}_+^3 : A_0 \leqslant s+x+y \leqslant A_1\}.$$

定理 12 如果

$$A_0 > \frac{1}{m_1-1}\left[a_1 + \frac{(A_1+a_2)m_1^2}{(m_1-1)m_2}\right],$$

则系统(3-12)是持续生存的.

4 传染病动力学模型

为了研究某一地区传染病的发展趋势，更好地利用动力学的方法建模，把所研究地区的人口分成三类.

S 类：易感者类(susceptible)，即在这一地区内所有未染病者的全体. 这一类人若与染病者作有效接触，就容易受传染而得病.

I 类：染病者类(infective)，即在这一地区内已染上传染病，而且仍在发病期的人的全体. 这一类人若与易感者类的人作有效接触，就容易把疾病传染给易感者.

R 类：消除者类(removed)，即表示在这一地区内因为染病而死亡或病愈有免疫

能力的人的全体.这一类人不再受染病者的传染而重新得病,也不会把疾病传染给易感者.

现在以 $S(t)$, $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别代表在时刻 t 时,属于S类,I类和R类中的人数,传染病动力学模型,就是要用动力学的方法,建立数学模型来描述三类人随时间的变化规律.

4.1　KM模型的阈值理论

早在1927年,W.O.Kermack And A.G.Mckendrick首先利用动力学的方法来建立传染病的数学模型,称这个模型为KM模型.这个模型的建立是基于以下三个基本假设(称之为KM假设).

假设A　设所研究地区的人口的总数量是常数,不因时间变化而改变.

假设B　设易感者由受传染病的影响,其人数随时间而变化的变化率与当时易感者的人数和当时染病者的人数之积成正比.

假设C　设从染病者类转到消除者类的速度与当时染病者类的人数成正比.

如果把S,I和R三类人看成是某种分子化学反应的三种物质,则KM三假设可用符号语言写成:

假设A　$S(t)+I(t)+R(t)=N=\text{const}$;

假设B　$S+I\xrightarrow{\beta}2I$;

假设C　$I\xrightarrow{r}R$,

其中 β, r 均为正常数.这三个假设将成为整个传染病动力学模型研究的基础.

例1　无人口出生和死亡的KM传染病模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=-\beta SI;\\ \mathrm{d}I/\mathrm{d}t=\beta SI-rI;\\ \mathrm{d}R/\mathrm{d}t=rI,S(t)+I(t)+R(t)=1.\end{cases}\tag{4-1}$$

初值 $S(0)=S_0>0$, $I(0)=I_0>0$, $R(0)=0$.其中 $\beta>0$ 为传染率系数, $r>0$ 为移除率,记 $\rho=r/\beta$ 为相对移除率.这里不妨取总人口数 $N=1$(否则可作适当的变换达到).

定理1　如果 $S_0<\rho$,则当 t 增加趋于无穷时,染病者的数量 $I(t)$ 单调下降趋于零;如果 $S_0>\rho$,则当 t 增加时,染病者的数量 $I(t)$ 增加到一定数量 $I_{\max}$ 后就单调减少趋于零,并且 $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=S(\infty)$ 存在.它是下面方程的唯一正根

$$S_0\exp[-1/\rho(1-z)]-z=0.$$

例2　出生率与死亡率相等的SIR模型.

考虑出生率与死亡率相等,也即保持人口总数不变,服从KM三假设的SIR模型为

$$\begin{cases}\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=-\beta IS+\mu-\mu S;\\ \mathrm{d}I/\mathrm{d}t=\beta IS-rI-\mu I;\\ R(t)=1-S(t)-I(t),S(0)=S_0>0,I(0)=I_0>0,R(0)\geqslant 0.\end{cases}\tag{4-2}$$

μ 为出生和死亡率，设出生的婴儿均为易感者.

定理 2　记 $S(t),I(t)$ 是系统(3-2) 的解，有

1° 如果 $\sigma = \beta/(\mu + r) > 1$，则区域 $D:\{(S,I),0 \leqslant S \leqslant 1,0 < I \leqslant 1\}$ 是平衡点 $(1/\sigma,\mu(\sigma - 1)/\beta)$ 的一个吸引区域；

2° 如果 $\sigma < 1$，则 D 是平衡点(1,0) 的吸引区域.

例 3　无出生率和死亡率 SIS 模型.

SIS 模型区别于 SIR 模型之处在于这里染病者病愈后无免疫力，仍会受感染，机制为

$$S + I = N = \text{const}, S + I \xrightarrow{\beta} 2I, I \xrightarrow{1/\tau} S,$$

其中 β 为传染率，τ 为平均染病周期，均为常数，则模型为

$$\begin{cases} dS/dt = -\beta SI + 1/\tau I; \\ dI/dt = \beta SI - 1/\tau I, S + I = N. \end{cases} \tag{4-3}$$

定理 3　如果 $\rho > N$，则 $D:\{(S,I),0 \leqslant S \leqslant N,0 < I \leqslant N\}$ 是平衡点 $(N,0)$ 的吸引区域；如果 $\rho < N$，则 D 是平衡点 $(\rho, N - \rho)$ 的吸引区域，其中 $\rho = \dfrac{1}{\beta\tau}$.

例 4　出生率等于死亡率的 SIRS 模型.

SIRS 模型区别于 SIR 模型之处，在于消除类中的免疫者在一定时间后会失去免疫力，而变成易感者，将会受到再度感染，机制为

$$S + I \xrightarrow{\lambda} 2I, \quad I \xrightarrow{r} R, \quad R \xrightarrow{\alpha} S.$$

模型为(假设新出生婴儿为易感者)

$$\begin{cases} dS/dt = -\lambda IS + \delta - \delta S + \alpha R; \\ dI/dt = \lambda IS - \delta I - rI; \\ dR/dt = rI - \alpha R - \delta R. \end{cases} \tag{4-4}$$

定理 4　系统(4-4) 若存在正平衡点，则是全局渐近稳定的.

4.2　具有种群动力的 KM 模型

如果人口总数 N 不是常数，而是随着时间变化的 $N(t)$，即 KM 三假设中，假设 A 不成立，保存另两个假设，这样的模型称为有种群动力的 **KM 传染病模型**.

例 5　Logistic 增长的 SIS 模型.

如果所研究的区域内在时刻 t 时易感者的数量为 $x(t)$，染病者的数量为 $y(t)$，总人口 $N(t) = x(t) + y(t)$. 设 $N(t)$ 满足**逻辑斯谛方程**

$$dN(t)/dt = bN(t)(1 - N(t)/K).$$

不妨设容纳量 $K = 1$，又设新出生婴儿为易感者，则

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = bN(t) - bN(t)x(t) - bN(t)y(t),$$

即

$$dx/dt = bN - bNx; dy/dt = -bNy.$$

则逻辑斯谛增长的 **SIS 模型**为

$$\begin{cases} dx/dt = bN - bNx - axy + ry; \\ dy/dt = axy - ry - dy - bNy; \\ x(t) + y(t) = N(t), x(0) + y(0) \in [0,1), \end{cases} \tag{4-5}$$

其中 a 为传染率, r 为治愈率, d 为因病死亡率.

定理 5　区域 $U = \{(x,y) \mid_{x,y \geq 0}$ 且 $x + y \leq 1\}$ 是系统(3-5)的正向不变集;如果 $a > b + r + d$,则系统(3-5)在 U 内存在唯一正平衡点(x^*, y^*);而且系统(3-5)所有初始于 U 内点的轨线,当 $t \to +\infty$ 时都趋于(x^*, y^*).

例 6　具两种传染病的逻辑斯谛增长 SIS 模型.

总的人群 N 中分成三类: X 表易感者, Y 和 Z 分别表示两种病的染病者,传染机制为

$$X + Y \xrightarrow{a_1} 2Y, \quad X + Z \xrightarrow{a_2} 2Z, \quad Y \xrightarrow{r_1} X, \quad Z \xrightarrow{r_2} X.$$

逻辑斯谛增长 SIS 模型为

$$\begin{cases} dx/dt = bN - bNx - a_1xy - a_2xz + r_1y + r_2z; \\ dy/dt = a_1xy - r_1y - d_1y - bNy; \\ dz/dt = a_2xz - r_2z - d_2z - bNz, \end{cases} \tag{4-6}$$

其中,

$$x(0), y(0), z(0) > 0, x(0) + y(0) + z(0) \leq 1, N(t) = x(t) + y(t) + z(t).$$

定理 6　假设 $a_1 > b + r_1 + d_1, a_2 > b + r_2 + d_2$,系统(4-6)有非负平衡点$(\bar{x}_1, \bar{y}, 0)$和$(\bar{x}_2, 0, \bar{z})$.

1° 如果 $0 \leq a_1 - a_2 < r_1 + d_1 - (r_2 + d_2)$,或者如果 $a_1 \leq a_2$ 且 $r_1 + d_1 - (r_2 + d_2) \geq 0$,但两不等式中至少一个不等号是严格的,则(4-6)任意正初始值解$(x(t), y(t), z(t))$有

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}_2, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = \bar{z};$$

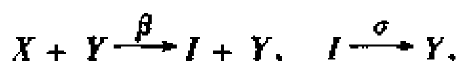
2° 如果 $a_1 > a_2$,且 $\bar{x}_1 < [r_1 + d_1 - (r_2 + d_2)]/(a_1 - a_2) < \bar{x}_2$,则对于(4-6)式任意正初始值解$(x(t), y(t), z(t))$有

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) > 0,$$

也即 $y(t)$ 持续生存.

例 7　逻辑斯谛增长的 SEI 模型.

Anderson 建立欧洲狐狸狂犬病模型.以 X, I 和 Y 分别表示易感者、染病而未发病者和染病且发病者类,机制为



$$X + Y \xrightarrow{\beta} I + Y, \quad I \xrightarrow{\sigma} Y,$$

$N(t) = x(t) + y(t) + I(t)$, $N(t)$ 不是常数,满足逻辑斯谛增长模型:

$$dN/dt = rN(1 - N/K), \quad r = a - b.$$

相应的 SEI 模型为

$$\begin{cases} dx/dt = rx - rxN - \beta xy; \\ dI/dt = \beta xy - (\sigma + b + rN)I; \\ dy/dt = \sigma I - (\alpha + b + rN)y. \end{cases}$$

这里设 $K = 1$.把上面三个方程相加得

$$dN/dt = ax - (b + rN)N - \alpha y,$$

这里 α 是因病死亡率.上面三个方程等价系统为

$$\begin{cases} dx/dt = (a - b)x - rxN - \beta xy; \\ dy/dt = \sigma(N - x - y) - (\alpha + b + rN)y; \\ dN/dt = ax - (b + rN)N - \alpha y. \end{cases} \tag{4-7}$$

系统(4-7)有非负平衡点(1,0,1)和正平衡点(x^*, y^*, N^*).

定理 7 当$(a + \alpha)(a + \sigma) < \sigma\beta$时,系统(3-7)无正平衡点,非负平衡点(1,0,1)是稳定的;当$(a + \alpha)(a + \sigma) > \sigma\beta$时,正平衡点存在.可由霍普夫(Hopf)分歧理论得到在(x^*, y^*, N^*)产生稳定极限环,疾病出现周期现象.

4.3 非线性传染力的传染病模型

回顾 KM 模型:

$$dS/dt = -\beta SI, \quad dI/dt = \beta SI - rI, \quad dR/dt = rI,$$

其中 βSI 称为传染率,而 βS 称为**传染力**.这里传染力是 s 的线性函数,没有考虑饱和状态.如果增加饱和状态的考虑,则模型写成

$$dS/dt = -f(S)I, \quad dI/dt = f(S)I - rI, \quad dR/dt = rI. \tag{4-8}$$

从另一角度来看,在(4-1)式中,βSI 为传染率,而其中 βI 代表在单位时间内每一个易感者接触染病者的概率,称为**接触率**.这里接触率是 I 的线性函数,没有考虑饱和状态.如果增加饱和状态的考虑,则模型写成

$$dS/dt = -Sg(I), \quad dI/dt = Sg(I) - rI, \quad dR/dt = rI. \tag{4-9}$$

如果传染力和接触率都考虑饱和状态,则模型为

$$dS/dt = -IH(I,S), \quad dI/dt = IH(I,S) - rI, \quad dR/dt = rI; \tag{4-10}$$

例 8 非线性接触率 SI 模型的阈值.

$$\begin{cases} ds/dt = -sg(I), \\ dI/dt = sg(I) - rI, R = 1 - S - I. \end{cases} \tag{4-11}$$

假设函数 $g:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 连续有界函数,满足条件:

1° 对所有 $x \in \mathbf{R}_+$,有 $g(x) \geqslant 0$;

2° $g(0) = 0$;

3° 存在一个正数 $c > 0$,使对所有 $x \in \mathbf{R}_+$,有 $g(x) \leqslant c$;

4° g 的导数在 $\mathbf{R}_+$ 内的任何区间内存在、有界,并且 $g'(0) > 0$;

5° 对所有 $x \in \mathbf{R}_+$,有 $g(x) \leqslant g'(0)x$.初始条件:$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geqslant 0, R(0) = 0, S_0 + I_0 = 1$.

定理 8 1° 系统(4-11)正初始值的解对任何 t 保持为正,即 $S(t) > 0, I(t) > 0$;

2° 所有解一致有界;

3° 区域 D 是系统(4-12)的一个正向不变集,这里

$$D = \{(S,I) \mid S \geqslant 0, I \geqslant 0, S + I \leqslant 1\}.$$

定理 9　如果$(S(t),I(t))$是系统(4-11)在区域 D 内任意一解,则有

1° $\lim\limits_{t\to\infty}S(t) = s(\infty) > 0$;

2° 如果$g'(0)/r > 1$,则 $I(t)$ 开始是单调增加,但增加到一个最大值后减少趋于零;

3° 如果$g'(0)/r < 1$,则 $I(t)$ 单调减少趋于零.

例 9　**非线性传染力有种群动力 SIRS 模型**

$$\begin{cases} dS/dt = -IH(I,S) - bS + rR + B(N); \\ dI/dt = IH(I,S) - (b+v)I; \\ dR/dt = vI - (b+r)R. \end{cases} \tag{4-12}$$

其中,$H(I,S)$是非线性传染力,b是自然死亡率,$B(N)$是出生率,$N = S + I + R$为人口总数量,设新生婴儿为易感者,v 是移除率,r 是失去免疫力的概率.设 $B(N)$ 和 $H(I,S)$ 为可微函数且对于所有的 $I \geqslant 0$有 $H(I,0) = 0$;$\partial H/\partial S > 0$.把三个方程相加,有

$$dN/dt = B(N) - bN. \tag{4-13}$$

假设(4-13)有唯一正平衡点 $N_0 > 0$,且是全局稳定的.换句话说,系统(4-12)有一解平面 $S + I + R = N_0$,且系统(4-12)所有正初始值的解都渐近于这个平面.这样,只要考虑在这平面上解的渐近性质,方程化为

$$\begin{cases} dI/dt = IH(I,N_0 - I - R) - (b+v)I; \\ dR/dt = vI - (b+r)R. \end{cases} \tag{4-14}$$

当 $H = KI^pS^q$ 时,则系统化为

$$\begin{cases} dI/dt = KI^pS^q - (b+v)I; \\ dR/dt = vI - (b+r)R. \end{cases} \tag{4-15}$$

当 $H = KI^2S$ 时,并经无量纲化变换后,系统化为

$$dI/dt = aI^2S - I,\quad dR/dt = r_1(I - R/h), \tag{4-16}$$

其中 r_1, a, h 为正常数.$S = N_0 - I - R$,$N_0 > 0$为常数.因为 $S \geqslant 0$,所以只要在 D 内考虑

$$D:\{I \geqslant 0, R \geqslant 0, I + R \leqslant N_0\}.$$

易知系统(4-16)在 D 内有三个平衡点:$O(0,0)$,$P_1(I_1,R_1)$和$P_2(I_2,R_2)$.不妨设 $I_1 < I_2$,在适当的条件下系统(4-16)在 P_2 的外围可以出现两个极限环,且出现同宿轨道的存在性(参见文献[6]).

4.4　非正比移除率的传染病模型

回顾 KM 模型

$$dS/dt = -\beta SI,\quad dI/dt = \beta SI - rI,\quad dR/dt = rI. \tag{4-17}$$

在模型(4-17)中,移除率为 rI.这里 r 为常数,写为$\dfrac{1}{\tau}$,则常数 τ 为平均染病周期.系统(4-17)的第二个方程等价于积分方程

$$I(t)=\int_0^t \beta S(x)I(x)e^{-\frac{1}{\tau}(t-x)}dx, \tag{4-18}$$

其中函数 $e^{-\frac{1}{\tau}s}$ 表示染病者得病后经过时间 s 仍为染病者(未愈)的概率.显然有

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\tau}t}dt=\tau(\text{平均染病周期}).$$

在KM模型中使用了这个简单的概率函数 $e^{-\frac{1}{\tau}S}$.如果改用一般的概率函数 $p(S)$,则积分方程(4-18)为

$$I(t)=\int_0^t \beta S(x)I(x)p(t-x)dx.$$

设 $p(0)=1,\tau=\int_0^\infty p(S)dS$,因此非正比移除率的传染病模型为

$$\begin{cases}dS/dt=-\beta SI;\\ I(t)=\int_0^t \beta S(x)I(x)p(t-x)dx.\end{cases} \tag{4-19}$$

例 10 微分差分方程 SEIS 传染病模型.

SEIS模型区别于SIS模型在于在SEIS模型中增加了E类(潜病者类),这一类人已受到疾病的传染,但未发病,不传染其他的易感者,其传染机制为 $S+I\xrightarrow{b}E+I,E\xrightarrow{r}I,I\xrightarrow{c}S$.假设 $S+I+E=1$,按KM假设建模应为

$$dS/dt=-bSI+cI,\quad dE/dt=bSI-rE,\quad dI/dt=rE-cI.$$

如果由E类到I类的概率函数不是指数函数,而是阶梯分布

$$p(S)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant S\leqslant\tau \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } S>\tau \text{ 时}.\end{cases}$$

如果用 $x(t),y(t)$ 和 $z(t)$ 分别代表S类、E类和I类在时刻 t 的人数,则SEIS模型为

$$\begin{cases}dx(t)/dt=bx(t-\tau)y(t-\tau)-cx(t);\\ dy(t)/dt=cx(t)-bx(t)y(t);\\ dz(t)/dt=b[x(t)y(t)-x(t-\tau)y(t-\tau)],\end{cases} \tag{4-20}$$

其中

$$z(t)=1-x(t)-y(t).$$

因此有

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1.$$

设当 $t\in[-\tau,0]$ 时,$(x(t),y(t))=(x_0(t),y(t))$.这里函数 $x_0(t),y_0(t)$ 在 $[-\tau,0]$ 上连续并且 $0\leqslant x_0(t)\leqslant 1,0\leqslant y_0(t)\leqslant 1$.

定理 10 若 $(x(t),y(t))$ 是上面初值问题的任意解,则

1° $(x(t),y(t))$ 对一切 $t\geqslant 0$ 存在,并 $0\leqslant x(t)\leqslant 1,0\leqslant y(t)\leqslant 1$;

2° 如果 $0<b\leqslant c$,则系统(4-20)所有位于正象限 G_0 内的解,当 $t\to\infty$ 时都渐近于(0,1);

3° 如果 $0<c<b$,则平衡解(0,1)是不稳定的,并且位于 G_0 上的所有其他的

解$(x(t),y(t))\neq(0,1)$.当$t\to\infty$时都渐近于正平衡解(x^*,y^*),其中

$$x^*=\frac{b-c}{b(1+cr)},\quad y^*=\frac{c}{b}.$$

4.5　离散时间传染病模型

例11　无种群动力离散SI模型.

假设所研究的地区人口(种群)的总数(总密度)是不变的,把此地区人口分成两类,以$I(t)$表示在时刻t时染病者的数量,$S(t)$表示易感者的数量,$N=S(t)+I(t)$为人口总数量,设为常数;以p记S类中的每一个人A在单位时间内与I类中任一个人B产生有效接触的概率,记$q=1-p\equiv e^{-a}$;则q为A与B不产生有效接触的概率,因此$q^{I(t)}$表示S类中任一给定的易感者A在单位时间内不和I类中任何一个人产生有效接触的概率.由以上假设可以知道,在单位时间内新被传染而得病的染病者数为

$$S(t)[1-q^{I(t)}]=S(t)[1-e^{-aI(t)}]=I(t+1).$$

在$t+1$时刻易感者的数量

$$S(t+1)=S(t)-[I(t+1)-I(t)]=S(t)e^{-aI(t)}+I(t),$$

又有

$$S(t)+I(t)=N.$$

为了简单,引进标准化变换.

$$I(t)=Nx_1(t),\quad S(t)=Nx_2(t),\quad aN=A,$$

则离散时间SI模型为

$$x_1(t+1)=x_2(t)[1-e^{-Ax_1(t)}],$$

$$x_2(t+1)=x_1(t)+x_2(t)e^{-Ax_1(t)},\quad x_1(t)+x_2(t)=1.$$

把后面两式代入第一式,并以x代替x_1,以n代替t有

$$x_{n+1}=(1-x_n)(1-e^{-Ax_n}),\quad A>0.\tag{4-21}$$

定理11　如果$0<A\leqslant 1$,则对任何$x_0\in[0,1]$,从x_0出发,方程(4-21)的解x_n:当$n\to\infty$时,$x_n\to 0$;如果$A>1$,则当$n\to\infty$时,$x_n\to x^*\in(0,\frac{1}{2})$.这里$x^*$满足方程

$$x^*=(1-x^*)(1-e^{-Ax^*}).$$

例12　无种群动力离散SIR模型.

类似于例59的推导,设移除率$r=1$,则模型为

$$I(t+1)=S(t)[1-e^{-aI(t)}],\quad S(t+1)=I(t)+S(t)e^{-aI(t)},$$

$$R(t+1)=I(t),\quad S(t)+R(t)+I(t)=1.$$

标准化后可得到SIR模型

$$x_{n+1}=(1-x_n-x_{n-1})(1-e^{-Ax_n}).\tag{4-22}$$

参 考 文 献

1 刘来福.生物统计.北京:北京师范大学出版社,1987.
2 汪云九,顾凡及.生物控制论研究方法.北京:科学出版社,1986.
3 陈兰荪.生物数学引论.北京:科学出版社,1988.
4 周怀梧.数理医药学.上海:上海科学技术出版社,1983.
5 陈兰荪.数学生态学模型与研究方法.北京:科学出版社,1988.
6 陈兰荪,陈键.非线性生物动力系统.北京:科学出版社,1993.
7 马知恩.种群生态学的数学建模与研究.合肥:安徽教育出版社,1996.
8 李炳熙.高维动力系统的周期轨道:理论和应用.上海:上海科学技术出版社,1984.
9 Kuang Yang(况阳). Delay differential equations, with applications in population dynamics. New York: Academic Press. INC, 1993.

索 引

使用说明：1. 本索引收录了本卷正文中用黑体排印的大部分术语.

2. 术语依第一字的读音按汉语拼音字母表顺序排列. 如果拼音相同，根据音调，按阴平、阳平、上声、去声、轻声的次序排列. 如果音和音调也相同，按总笔画数排列.

3. 以符号、数字或字母起首的术语，按符号、数字、拉丁字母、希腊字母的顺序，分别集中排在以汉字起首的术语前面. 其中字母依首写字母按字母的顺序排列.

4. 以数学家译名为首的术语(例如，傅里叶变换)，依译名按汉字的排法排列.

5. 术语后面的数字，表示该术语出现在本书中的页码.

以符号、数字起首的术语

以拉丁字母起首的术语

以希腊字母起首的术语

以汉字起首的术语

A

B

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

Y

Z

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·近代数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2001年2月
ISBN 7-5609-2173-6

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②近代-数学-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·近代数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:李立鹏 余健棠 封面设计:刘 卉
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:32 插页:6 字数:1 260 000
版次:2001年2月第1版 印次:2001年2月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2173-6/O·206 定价:90.00元